

Линейные уравнения с двумя переменными и их системы

Как связаны две величины и как найти
их общее решение?



Уравнения вокруг нас

Пары величин встречаются в покупках, движении и школьных задачах. Записывая их через x и y , мы переводим условия текста на язык алгебры и сразу видим, сколько решений может быть у уравнения или системы.



Что означает линейное уравнение с двумя переменными

1. Общий вид

Линейное уравнение с двумя переменными записывают в виде $ax + by = c$, где a , b и c — числа, а x и y — переменные.

2. Только первая степень

В таком уравнении переменные не возводят в квадрат, не извлекают из них корень и не перемножают x на y . Поэтому зависимость остаётся линейной.

3. Пара как проверка

Подставляя конкретные значения x и y , мы проверяем, выполняется ли равенство. Если да, то такая пара чисел является решением уравнения.

4. Много решений

Одному линейному уравнению обычно подходят разные пары чисел, поэтому его решений бесконечно много. Все они образуют одну и ту же прямую.

5. Зачем это нужно

Понимание вида уравнения помогает легче строить график, находить решения и переходить к решению систем, где требуется одна общая пара чисел.

График линейного уравнения — прямая

Все решения на плоскости

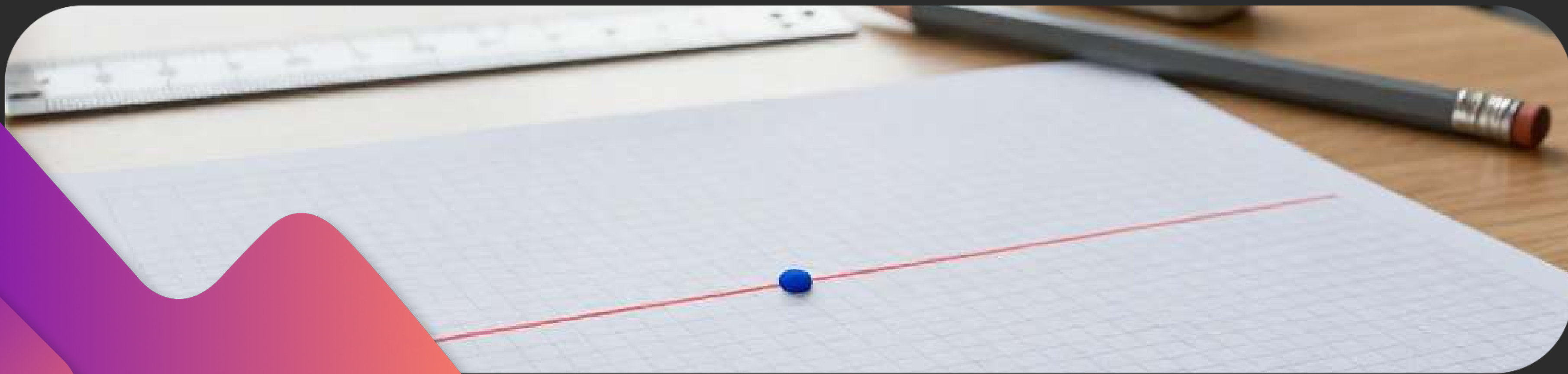
Если изобразить все пары чисел, которые подходят уравнению, получится прямая линия. Каждая точка этой прямой соответствует одному решению.

Достаточно двух точек

Чтобы построить прямую, обычно находят две подходящие пары чисел, отмечают две точки и проводят через них линию.

Пример построения

Для уравнения $x + y = 6$ подходят, например, пары $(0; 6)$, $(2; 4)$ и $(6; 0)$. Все эти точки лежат на одной прямой.



Примеры уравнений и подходящих решений

Уравнение	Пара	Проверка
$x + y = 5$	(2; 3)	$2 + 3 = 5$
$2x - y = 1$	(2; 3)	$2 \cdot 2 - 3 = 1$
$x - 3y = 9$	(12; 1)	$12 - 3 \cdot 1 = 9$

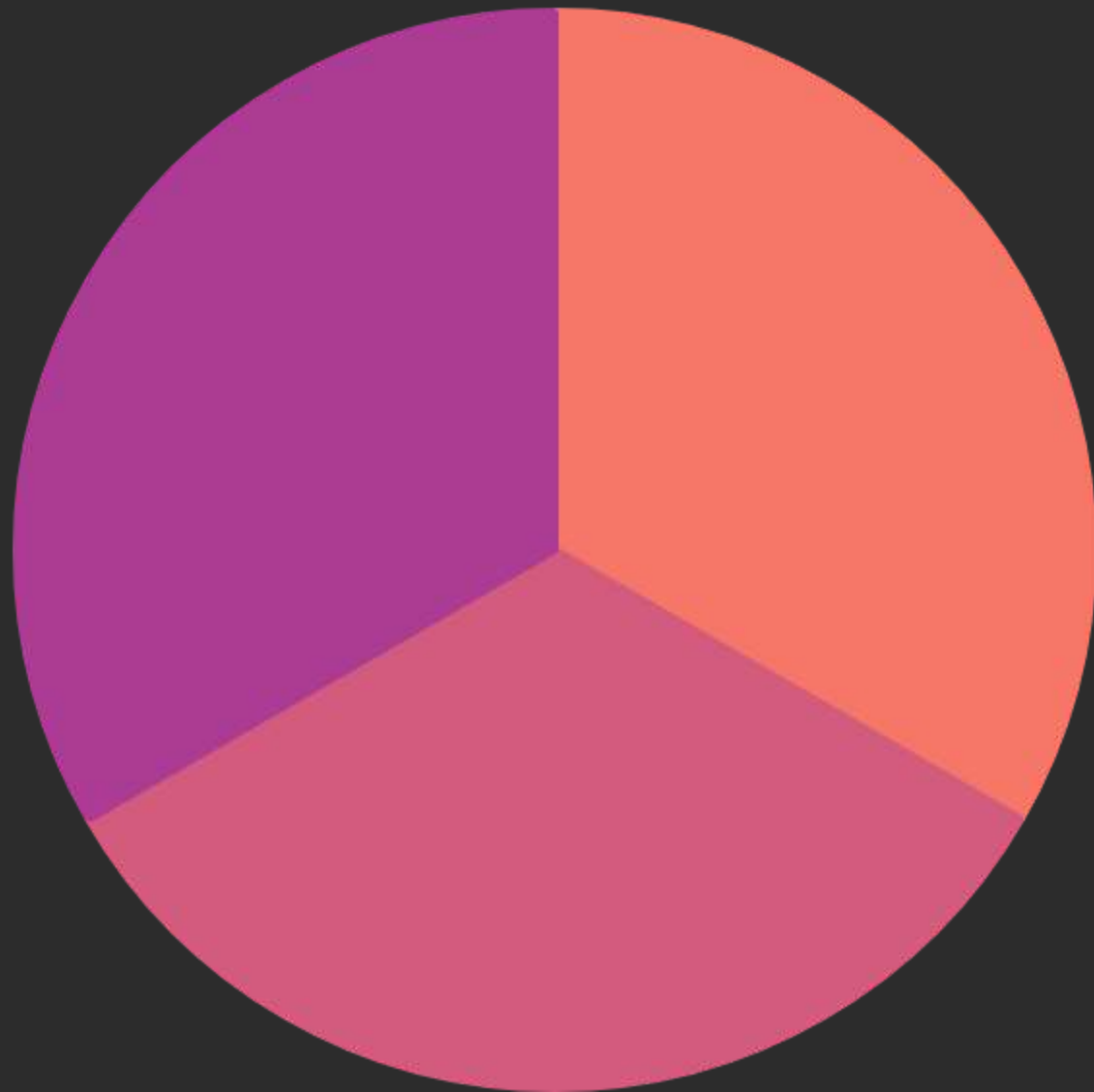
Школьный курс алгебры

В таблице показано, как проверяется пара чисел для линейного уравнения.

Одному линейному уравнению могут подходить разные пары чисел, и каждая верная пара является его решением.

Сколько решений может быть у системы

Одно решение Бесконечно много Нет решений



На число решений влияет взаимное расположение двух прямых на координатной плоскости. Это удобно видеть сразу по их положению.

Пересечение даёт одно решение, совпадение — бесконечно много, а параллельные прямые не имеют общих точек.

Что такое система линейных уравнений

Два условия сразу

Система состоит из двух линейных уравнений с одними и теми же переменными x и y . Нужно найти пару, которая подходит каждому уравнению одновременно.

Общее решение

Решением системы называется такая пара чисел, которая делает верными оба равенства. Если хоть одно условие не выполняется, пара не подходит.

Графический смысл

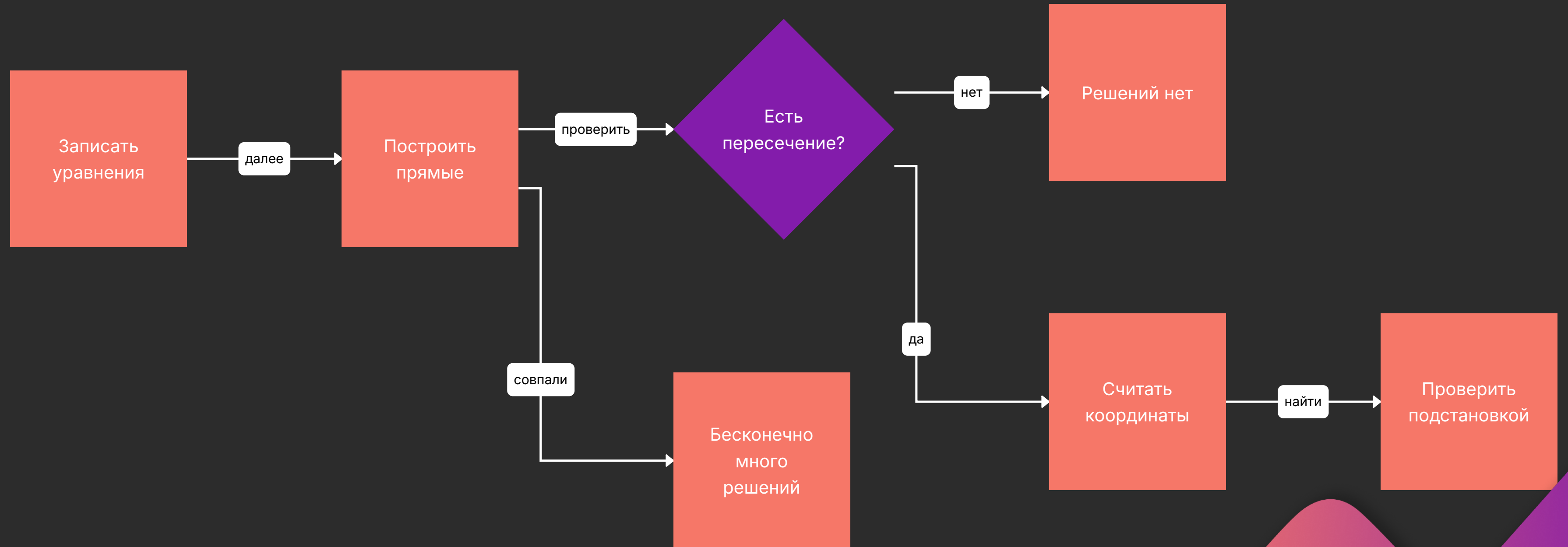
На координатной плоскости решение системы соответствует точке пересечения двух прямых. Именно в этой точке выполняются оба уравнения сразу.

Возможные случаи

Если прямые пересекаются, система имеет одно решение. Если они совпадают, решений бесконечно много. Если прямые параллельны, общих точек нет.

Решаем систему по графику

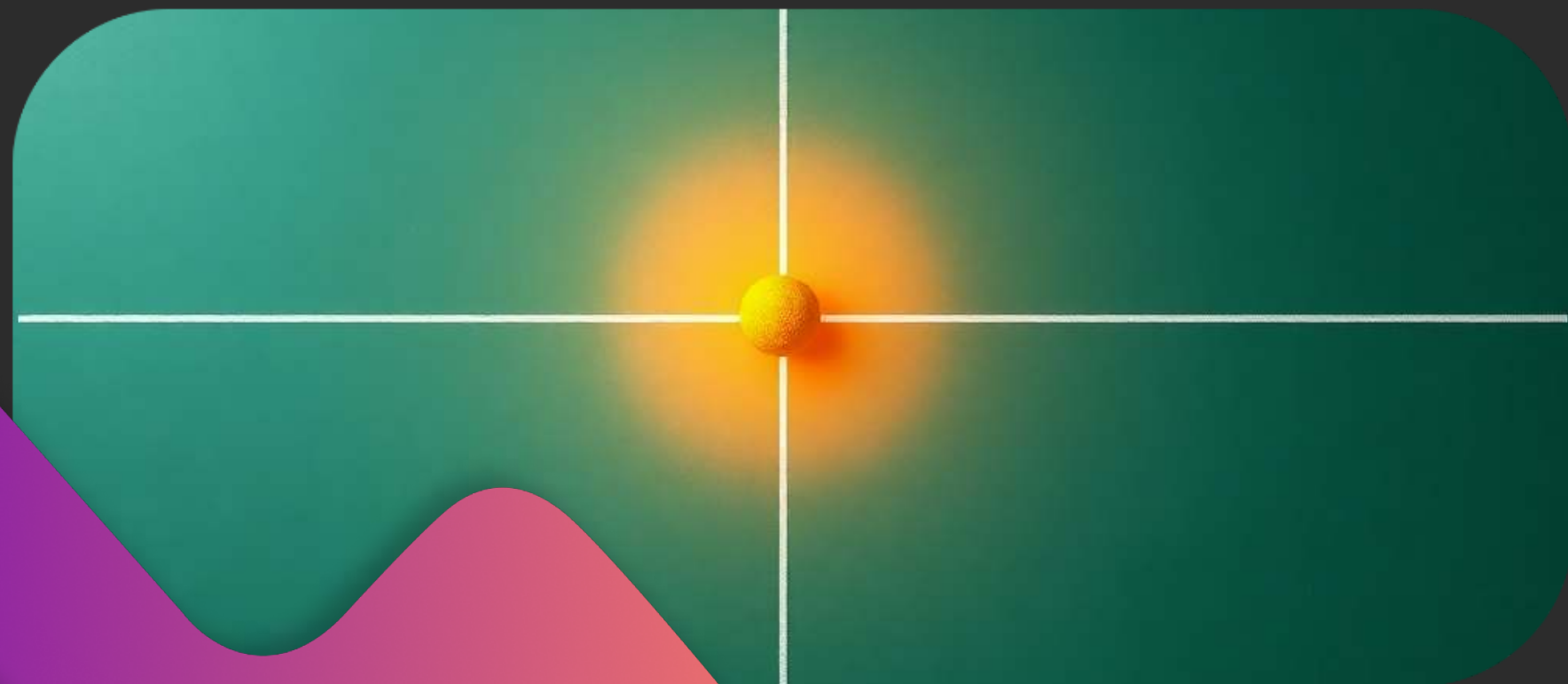
Последовательность действий для нахождения общего решения двух линейных уравнений



Пример графического решения системы

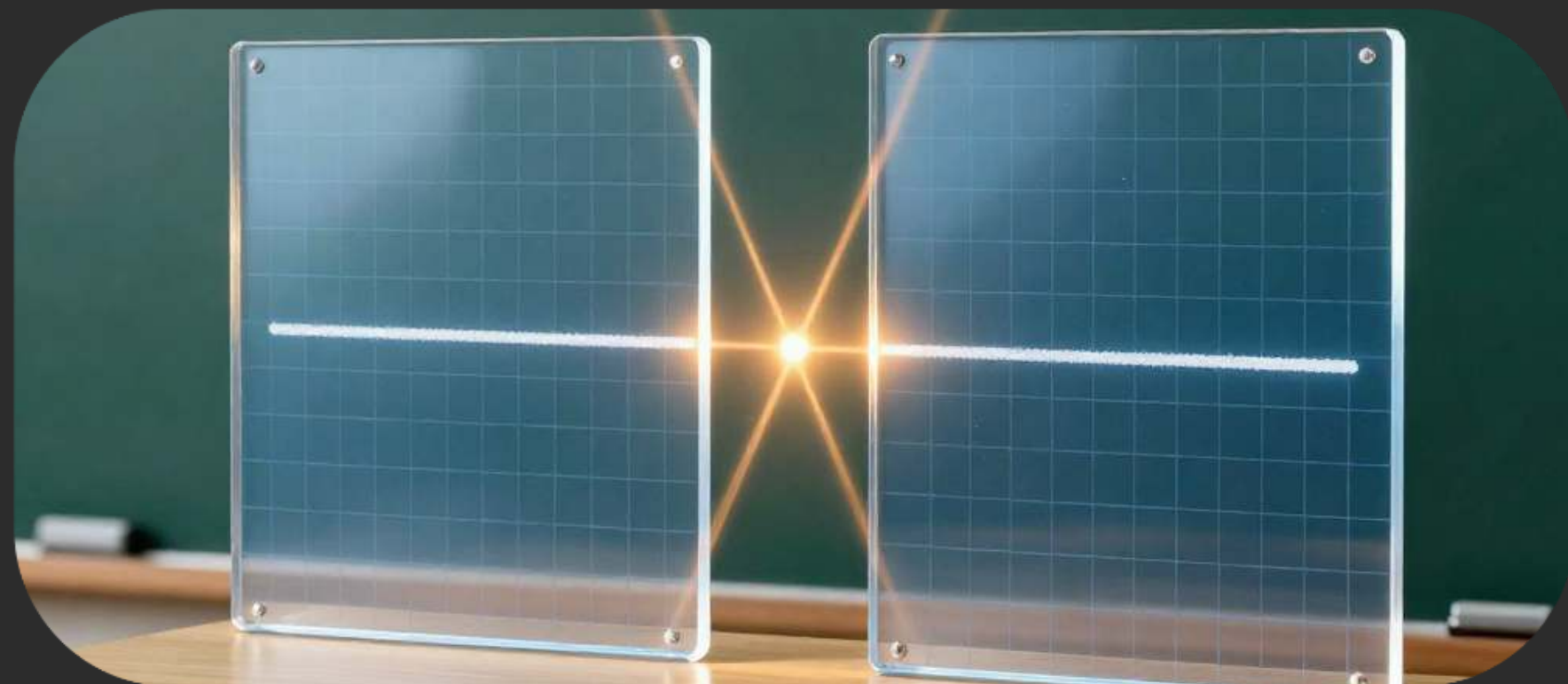
Точка, где линии встречаются

На одной координатной плоскости строят две прямые для уравнений $x + y = 7$ и $x - y = 1$. Они пересекаются в одной точке, поэтому система имеет единственное решение. По рисунку легко увидеть, что это точка $(4; 3)$, где обе линии сходятся.



Проверка на рисунке и в записи

После нахождения точки пересечения подставляют её координаты в оба уравнения: $4 + 3 = 7$ и $4 - 3 = 1$. Совпадение ответа на графике и в вычислениях показывает, как алгебра помогает проверить геометрический результат.



Способ подстановки

1.

Выразить переменную

Сначала в одном из уравнений выражают одну переменную через другую, например $y = 7 - x$. Так система становится удобнее для дальнейших вычислений.

2.

Подставить во второе

Затем найденное выражение подставляют во второе уравнение. В результате получается уже одно уравнение с одной переменной, которое можно решить обычным способом.

3.

Найти вторую переменную

После нахождения значения x подставляют его в удобное выражение и вычисляют y . Так получают пару чисел, которая может быть ответом системы.

4.

Обязательно проверить

В конце найденную пару подставляют в оба исходных уравнения. Проверка подтверждает правильность ответа и помогает заметить ошибки в вычислениях.

Когда удобно использовать способ подстановки

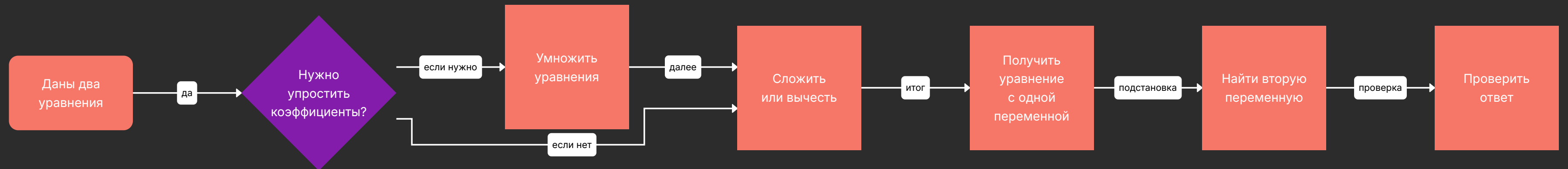
Ситуация	Почему удобно	Пример
Одна переменная выражена	Сразу подставляем	$y = 5 - x$
Коэффициент 1 или -1	Легко выразить переменную	$x + 2y = 9$
Уравнение легко упростить	Меньше вычислений	$3x = 12 - y$

Три типичные ситуации, в которых подстановка помогает быстро свести систему к одному уравнению с одной переменной.

Способ подстановки особенно полезен там, где выражение одной переменной уже готово или его нетрудно получить.

Как работает способ сложения

Алгоритм решения системы линейных уравнений способом сложения



Пример решения способом сложения

1. Записываем систему

Рассматриваем уравнения $2x + y = 9$ и $3x - y = 6$.
Здесь удобно сложить их сразу, потому что коэффициенты при y противоположны и переменная исчезает.

2. Находим x

Складываем почленно: $5x = 15$. Отсюда $x = 3$. Так одна переменная найдена без дополнительных преобразований, а система стала намного проще для дальнейшего решения.

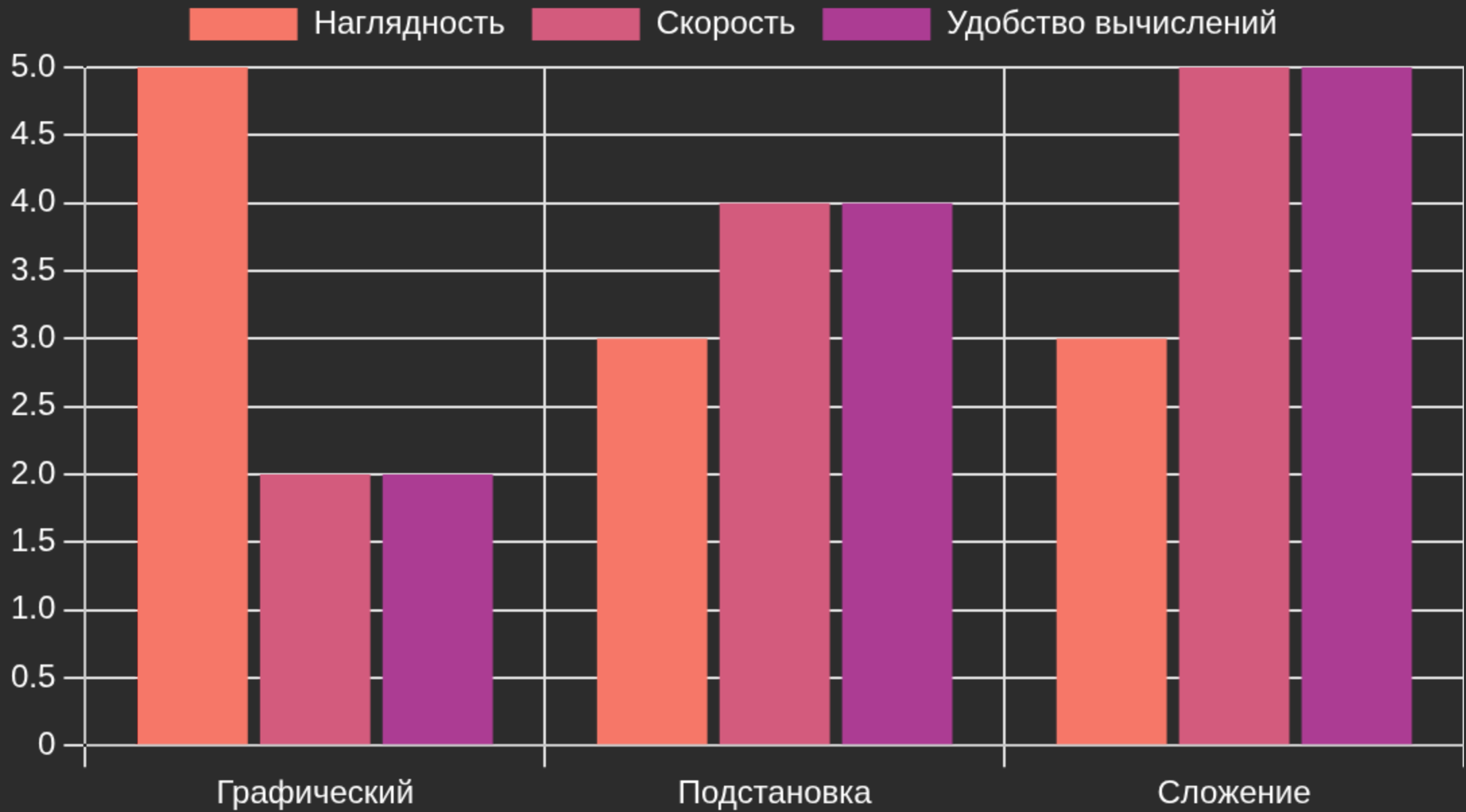
3. Находим y

Подставляем $x = 3$ в первое уравнение: $2 \cdot 3 + y = 9$, значит $y = 3$. Теперь получена полная пара чисел, подходящая системе.

4. Проверяем ответ

Проверка подтверждает: $2 \cdot 3 + 3 = 9$ и $3 \cdot 3 - 3 = 6$. Ответ системы — $(3; 3)$, а способ сложения действительно убрал одну переменную.

Сравнение способов решения системы



Каждый способ полезен в своей ситуации: один лучше показывает рисунок, другой экономит шаги, третий упрощает вычисления.

Универсального лучшего способа нет: выбор зависит от записи уравнений и того, что проще увидеть в задаче.

Особые случаи систем



Нет решений

Если графики двух уравнений — параллельные прямые, у них нет общих точек. Тогда система не имеет решения, потому что одна пара чисел не подходит обоим уравнениям.



Бесконечно много решений

Если обе прямые совпадают, каждая точка этой прямой является решением системы. В алгебраической записи после преобразований получается верное тождество, а не одно число.



Проверка записи

Иногда противоречие вида $0 = 5$ сразу показывает, что решения нет. Такие случаи помогают понять, что система может иметь не только один ответ, но и совсем ни одного.

Проверка найденного решения

Подставьте в оба уравнения

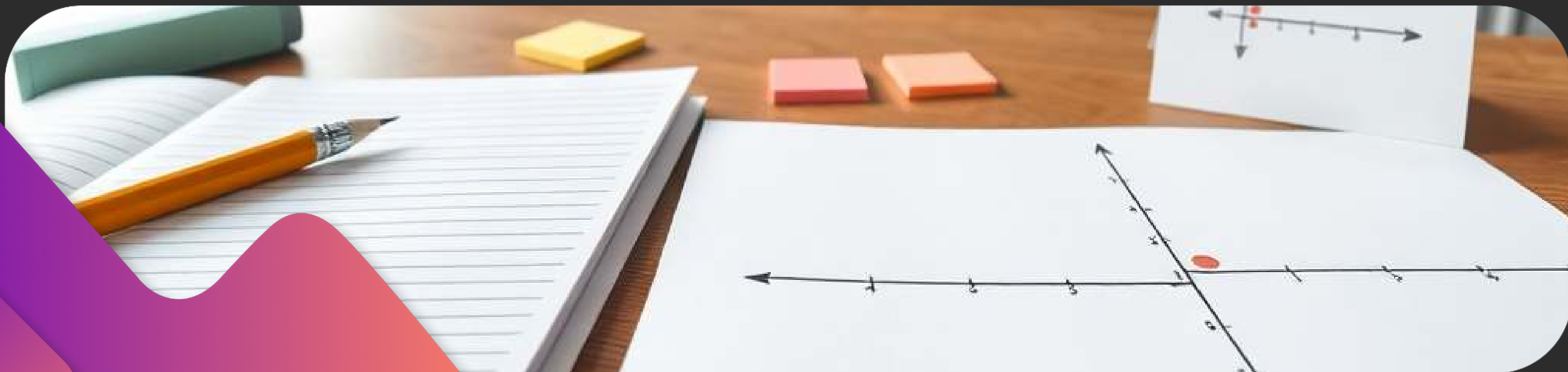
Найденную пару чисел нужно проверить сразу в двух исходных уравнениях. Если хотя бы одно равенство не выполняется, ответ нельзя считать верным, даже если он выглядит правдоподобно.

Сверьте порядок координат

Важно не перепутать x и y , когда записываете пару чисел. Ошибка в порядке часто даёт неверную проверку, хотя сами вычисления могут быть выполнены правильно.

Исправьте возможную ошибку

Проверка помогает заметить неточности в переносе слагаемых, раскрытии скобок и подсчётах. Поэтому её выполняют в конце каждого решения системы как обязательный шаг.



Типичные ошибки при решении систем

Ошибка	Пример	Как избежать
Не проверяют оба уравнения	Проверили одно	Сверять оба
Путают знаки	+у стало -у	Следить за переносом
Меняют порядок координат	(3; 2) вместо (2; 3)	Читать x, потом y
Теряют коэффициент	2x стало x	Писать множитель

Школьный курс алгебры

Частые ошибки и способы их избежать при решении систем линейных уравнений.

Аккуратная запись, внимание к знакам и обязательная проверка заметно уменьшают число ошибок при решении систем.

Задачи из реальной жизни



Покупки и цены

Системы помогают найти стоимость двух товаров, если известны общая сумма покупки и количество каждого предмета. Переменные x и y обычно обозначают цену или число одинаковых вещей.



Поездки навстречу

В задачах о движении системы описывают расстояние, время и скорость двух участников. Такие задачи удобно записывать через x и y , чтобы связать данные в одном расчёте.



Сравнение условий

Системы используют, когда нужно сравнить две ситуации сразу: например, два тарифа, две упаковки или два способа оплаты. Тогда одно решение должно удовлетворять обоим условиям.

Как коэффициенты влияют на вид прямой



При изменении коэффициентов прямая остаётся прямой, но её наклон меняется. Это хорошо видно на координатной плоскости.

Чем больше модуль коэффициента при одной переменной, тем круче наклон; знак коэффициента определяет направление подъёма или спуска.

Уравнения вида $ax + by = c$, учебный анализ наклона прямых

Тема, которая связывает рисунок и алгебру

Линейные уравнения с двумя переменными описывают прямые, а их системы помогают находить общую точку. Разные способы решения дополняют друг друга, а проверка делает ответ надёжным.