

Геометрическая прогрессия: последовательность с постоянным множителем

Изучим, как работает повторяющееся умножение в последовательностях.



Где встречается геометрическая прогрессия

Эта тема помогает описывать проценты, рост и убывание в задачах 9 класса. Величина меняется не на прибавку, а на постоянный коэффициент — так работают вклад, деление бактерий и затухание сигналов.



Определение геометрической прогрессии

1. Последовательность членов

Геометрическая прогрессия — это последовательность, где каждый следующий член получают из предыдущего умножением на одно и то же число.

2. Первый член и знаменатель

Первый член обозначают a_1 , а постоянный множитель — q . Именно он показывает, во сколько раз изменяется каждый новый член последовательности.

3. Общая формула

Любой член прогрессии находят по формуле $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$. Она позволяет сразу вычислять нужный элемент, не выписывая все предыдущие значения.

4. Признак геометрической прогрессии

Если отношение соседних членов остаётся одинаковым для всей последовательности, то она является геометрической. Это главное условие, которое нужно запомнить.



3

— это знаменатель
последовательности 2, 6, 18,
54.

Школьный курс алгебры, 9 класс



Знаменатель q показывает постоянный множитель между соседними членами и сразу определяет, будет ли ряд расти, убывать или чередовать знаки.

Пример геометрической прогрессии: удвоение чисел

Понятный ряд

Последовательность 3, 6, 12, 24, 48 удобна для проверки правила: каждый следующий член вдвое больше предыдущего. Такой пример легко запомнить и быстро распознать.

Значение знаменателя

Здесь $q = 2$, потому что каждый шаг означает умножение на два. Один и тот же множитель сохраняется на всём протяжении последовательности.

Наглядный рост

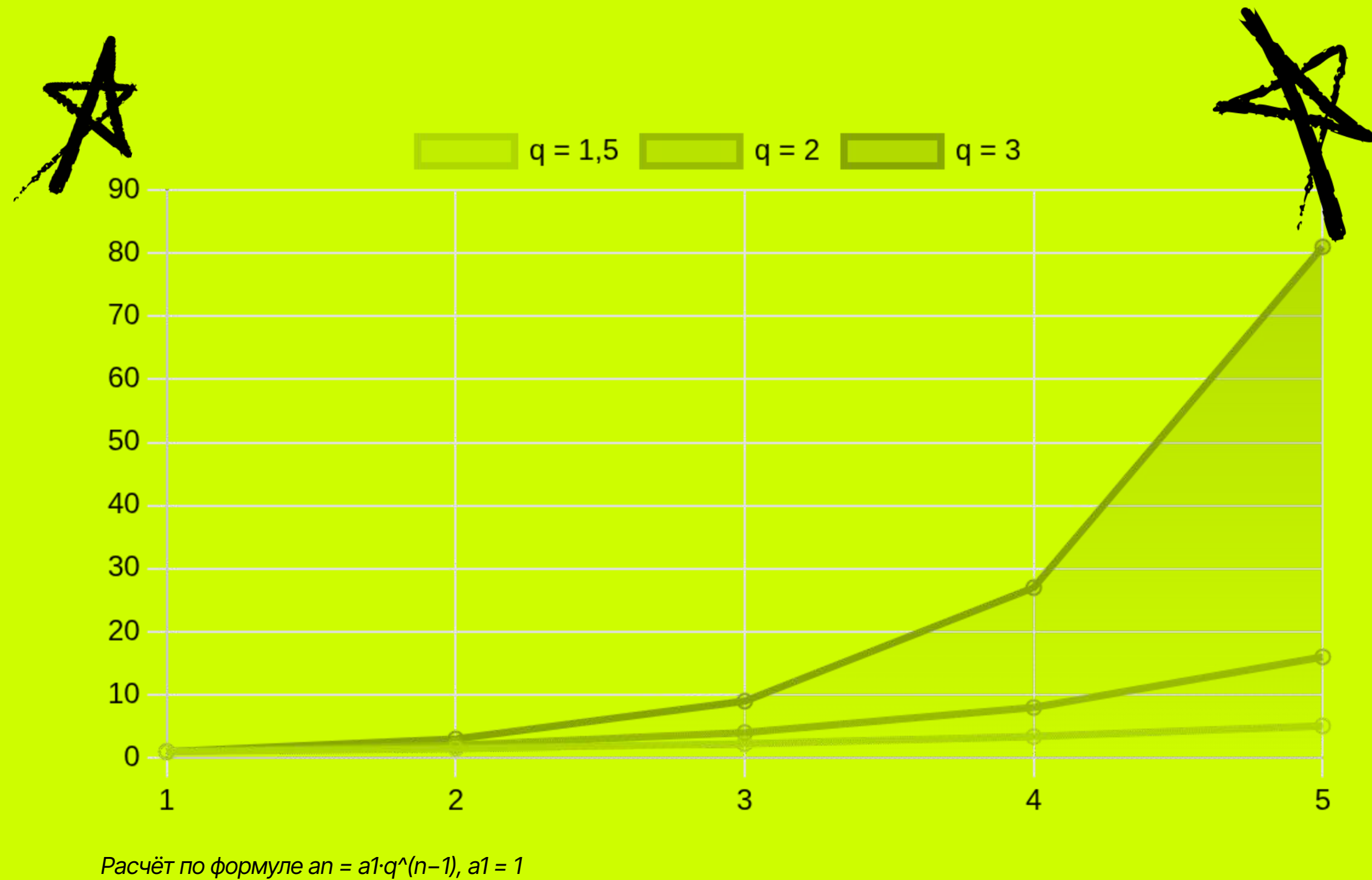
Схема $3 \rightarrow 6 \rightarrow 12 \rightarrow 24 \rightarrow 48$ показывает, как быстро увеличиваются значения при постоянном умножении. Именно поэтому геометрическая прогрессия описывает ускоренный рост.



Как меняется рост при разных знаменателях

При одинаковом начале последовательности разница становится заметной уже через несколько шагов: чем больше q , тем сильнее ускоряется рост.

Большой знаменатель даёт более резкое увеличение членов: при $q = 3$ рост намного быстрее, чем при $q = 1,5$.



Основные свойства членов геометрической прогрессии



Связь соседних членов

Каждый член связан с предыдущим и следующим одинаковым множителем q . Поэтому, зная один член и знаменатель, можно восстановить всю последовательность.



Поиск любого члена

Если известны a_1 и q , то любой член находится по формуле. Не нужно выписывать всю цепочку: достаточно подставить номер нужного члена.



Проверка последовательности

Для четырёх подряд идущих членов верно правило: произведение крайних равно произведению средних. Это удобно для быстрой проверки, является ли ряд геометрическим.

Арифметическая и геометрическая прогрессии: главное различие

Арифметическая прогрессия

Сравним два вида последовательностей и увидим, чем отличается их правило изменения.

В арифметической прогрессии важна разность, а в геометрической — постоянный множитель. Именно это определяет характер изменения членов.

Признак	Арифметическая	Геометрическая
Действие	прибавляют	умножают
Параметр	d	q
Пример	2, 4, 6, 8	2, 6, 18, 54

Формула n-го члена и её применение

1.

Основная запись

Формула $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$ помогает найти любой член прогрессии. Она особенно удобна, когда последовательность длинная и выписывать все члены не нужно.

2.

Что означает степень

Показатель $n-1$ показывает, сколько раз нужно умножить первый член на q . После первого члена каждое новое значение получается одним повторным действием.

3.

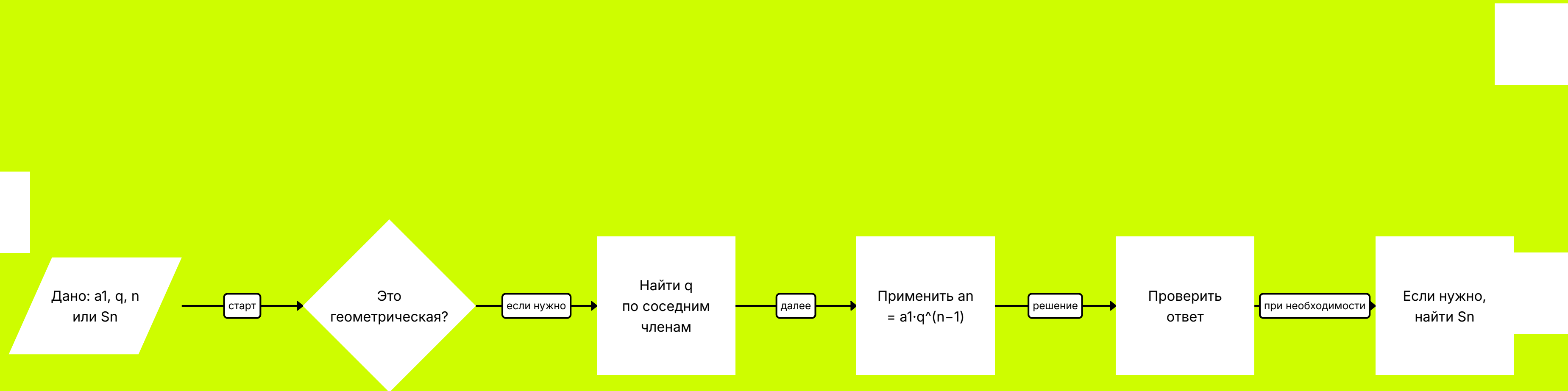
Пример вычисления

Если $a_1 = 5$ и $q = 3$, то $a_5 = 5 \cdot 3^4 = 405$. Такой расчёт показывает, как быстро могут возрастать значения в геометрической прогрессии.



Алгоритм решения задач на геометрическую прогрессию

Последовательность шагов помогает не запутаться при поиске члена, знаменателя или суммы.



Сумма первых n членов геометрической прогрессии

Записываем первые члены

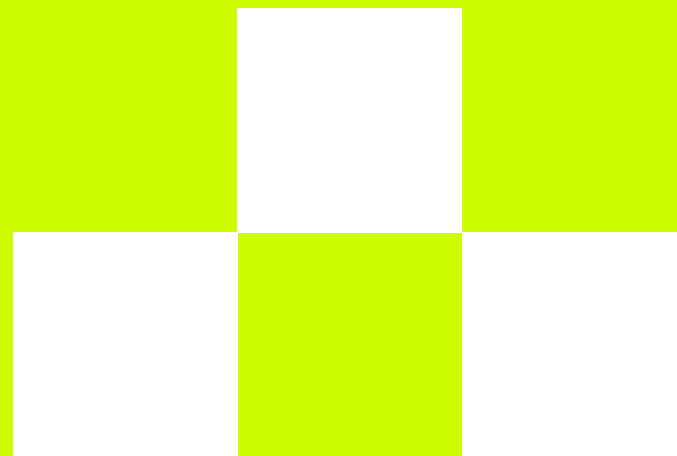
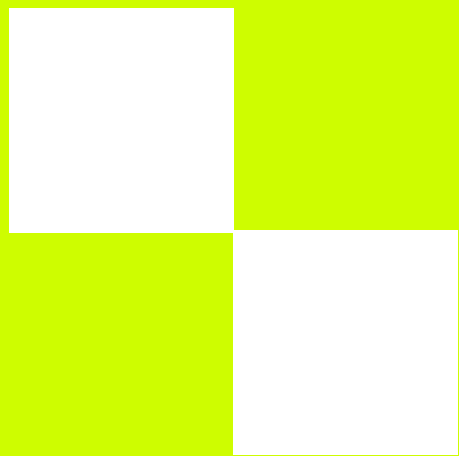
Сначала выписывают несколько членов прогрессии и определяют, как они связаны с первым членом и знаменателем q .

Особый случай $q = 1$

Когда все члены одинаковы, сумма находится проще: нужно умножить общий член на количество слагаемых n .

Применяем формулу

Если $q \neq 1$, сумму находят по формуле $S_n = a_1(q^n - 1)/(q - 1)$, не складывая все члены по отдельности.



Зачем нужна формула суммы



Экономит время

Формула сразу даёт результат для длинной последовательности, поэтому не нужно вручную складывать много чисел и записывать каждый промежуточный шаг.

Снижает риск ошибки

Чем больше членов, тем легче ошибиться при сложении. Формула помогает избежать лишних вычислений и получить ответ аккуратнее.

Удобна в задачах

В школьных упражнениях она позволяет быстро находить сумму первых 5, 10 или 20 членов без громоздких записей и повторов.

Помогает в жизни

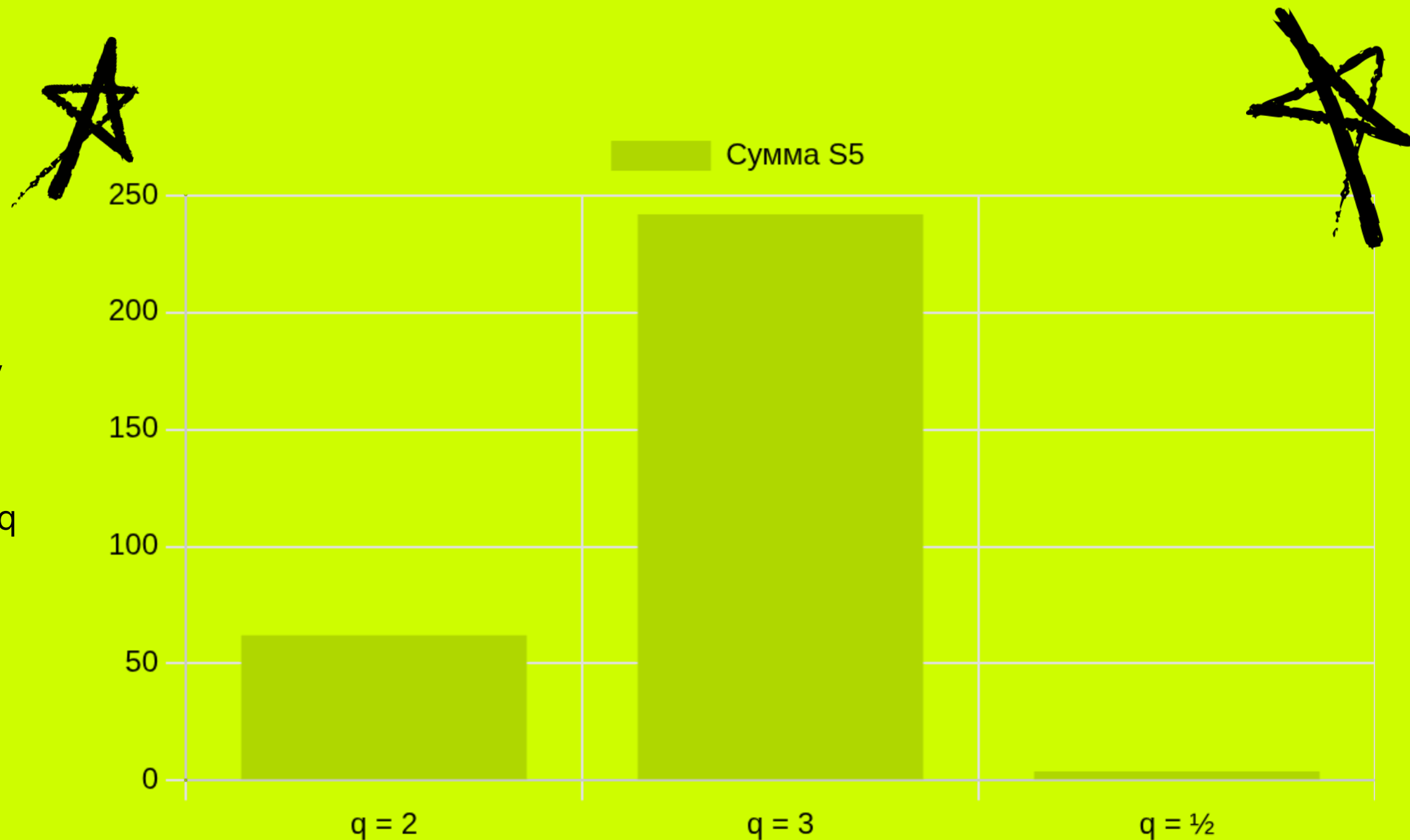
Такой способ используют, когда нужно посчитать накопления, расходы или уменьшение величины по шагам в повторяющемся процессе.



Сравнение сумм при разных знаменателях

Во всех трёх случаях начальный член одинаков, поэтому различие связано только с коэффициентом изменения. Это удобно для сравнения влияния q .

Чем больше q при $q > 1$, тем быстрее растёт сумма. При $q < 1$ общий результат заметно меньше.



Расчёт по формуле $S_n = a_1(q^n - 1)/(q - 1)$, при $a_1 = 2$ и $n = 5$.

Сложный процент как пример геометрической прогрессии

Вклад, который растёт сам

Если банк каждый год начисляет процент на уже увеличенную сумму, вклад начинает расти по правилу умножения. При ставке 10% сумма каждый год становится больше в 1,1 раза.



Цепочка начислений

Из 1000 рублей получаются 1100, потом 1210 и 1331 рублей. Каждое новое значение зависит не только от начальной суммы, но и от предыдущего результата, поэтому рост ускоряется.



Убывающая геометрическая прогрессия

Коэффициент меньше 1

Если $0 < q < 1$, каждый следующий член получается делением на одно и то же число в обратном смысле. Поэтому последовательность постепенно уменьшается.

Не равномерное вычитание

Здесь величина уменьшается не на одинаковое число, а каждый раз умножается на один и тот же коэффициент. Это главное отличие от обычного вычитания.

Примеры из жизни

Так описывают затухание звука, ослабление сигнала и уменьшение остатка вещества. Во всех случаях процесс идёт одинаковыми долями, а не одинаковыми разностями.

Наглядная последовательность

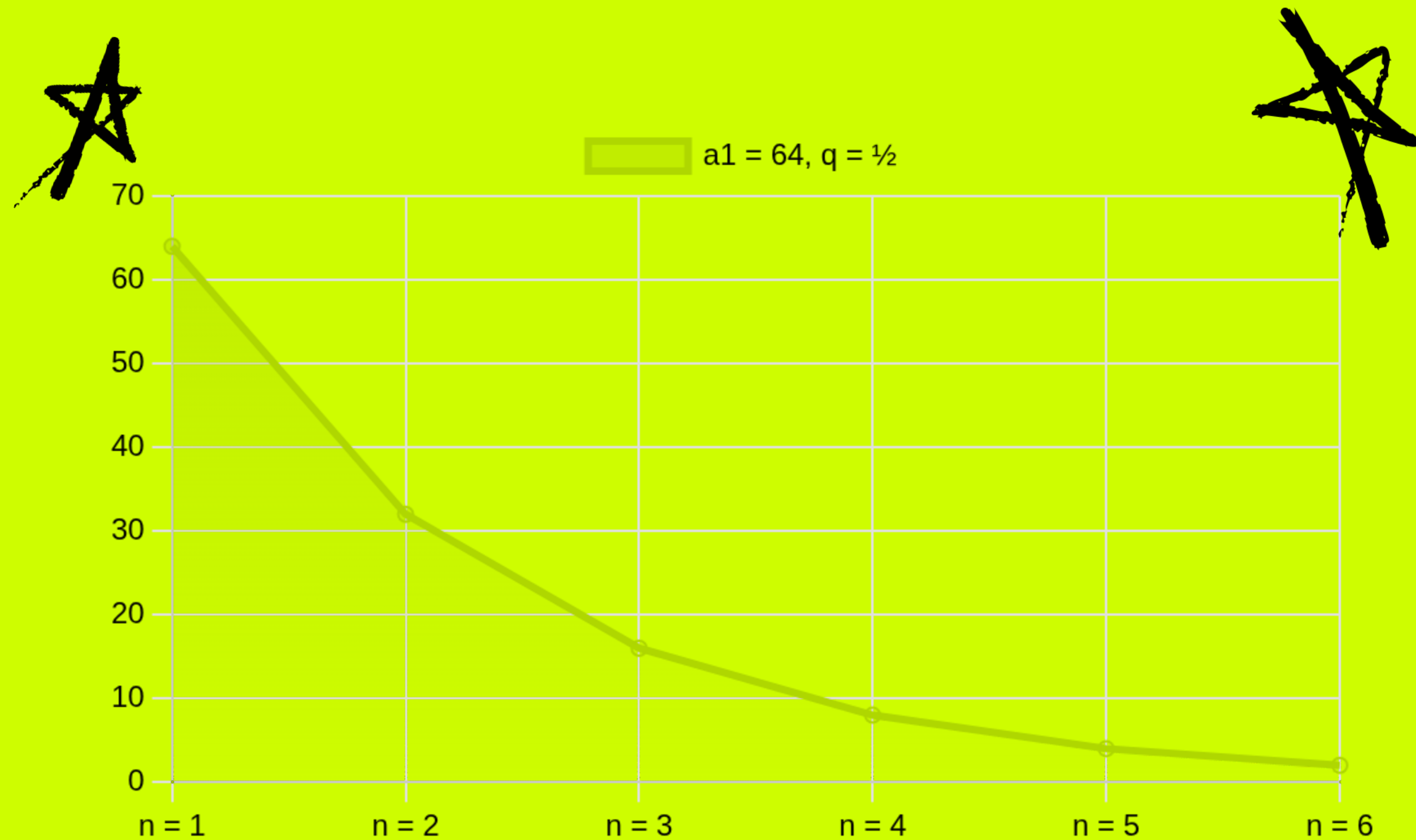
Пример 100, 50, 25, 12,5, 6,25 показывает, как быстро падают значения. Чем дальше, тем меньше становятся члены прогрессии.



Как выглядит убывание при q меньше 1

На каждом шаге значение уменьшается в два раза, поэтому падение сначала заметнее, а затем становится всё мягче.

График показывает устойчивое уменьшение без резких скачков. При повторном умножении на число меньше 1 значения быстро приближаются к нулю.



Последовательность рассчитана по формуле $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$, при $a_1 = 64$ и $q = \frac{1}{2}$.

Типичные задачи по геометрической прогрессии



Задача	Дано	Используем
Найти a_8	a_1, q	a_n
Найти q	2 члена	a_2/a_1
Найти S_6	a_1, q	S_n

Школьные типы заданий по теме «Геометрическая прогрессия»

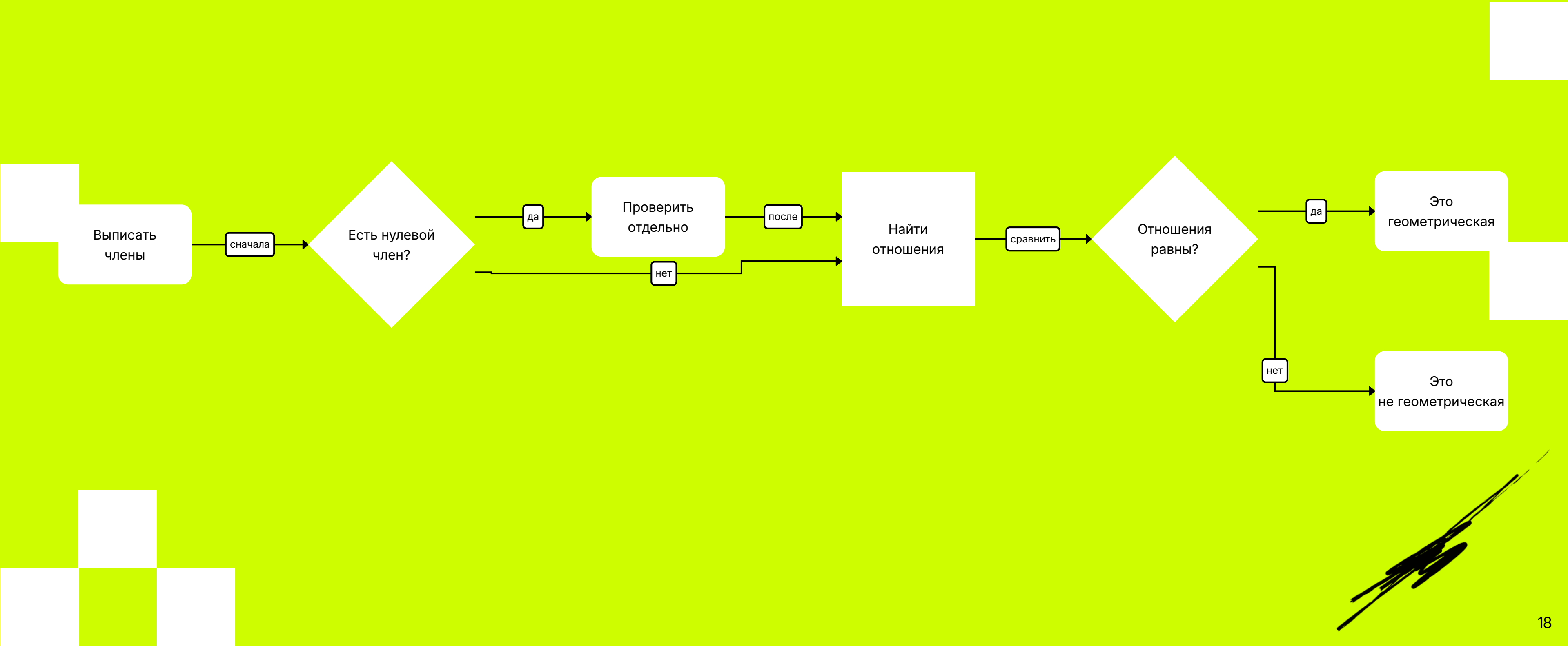


В таблице собраны самые частые типы заданий и основной инструмент для их решения.

Во всех случаях важно сначала понять, что известно, а затем выбрать нужную формулу. Основные опоры — a_1, q, a_n и S_n .

Как проверить, является ли последовательность геометрической

Проверка выполняется по отношениям соседних членов и помогает быстро отличить геометрическую прогрессию от других последовательностей.



Типичные ошибки при работе с геометрической прогрессией



Сложение вместо умножения

Часто по привычке прибавляют одно и то же число, хотя в геометрической прогрессии каждый член получают умножением на постоянный коэффициент.



Ошибка в степени

В формуле a_n важно не забыть показатель $n-1$. Если взять n или перепутать его, полученный член последовательности будет неверным.



Неверный знаменатель

Знаменатель q нужно находить как отношение соседних членов. Если перепутать порядок деления, получится другое число и весь ответ изменится.



Случай $q = 1$

Иногда по ошибке применяют формулу суммы как обычно, хотя при $q = 1$ все члены равны. Тогда сумму находят простым умножением на n .



Геометрическая прогрессия вокруг нас

Геометрическая прогрессия помогает описывать рост, уменьшение и повторяющееся умножение. Понимание a_1 , q , формул a_n и S_n делает задачи понятными и полезными для жизни.

