

Комплексные числа и арифметические операции над ними

Расширяем привычную алгебру до чисел
вида $a+bi$.



Зачем нужны комплексные числа

Когда уравнение не имеет решения в действительных числах, комплексные числа сохраняют логику вычислений и дают ответ там, где раньше его не было. Эта тема показывает, как математика расширяет свои правила без противоречий.



Определение комплексного числа

01

Общий вид

Комплексное число записывают как $z=a+bi$, где a — действительная часть, а b — мнимая часть. Такая форма удобна для всех последующих вычислений и преобразований.

03

Частные случаи

Если $b=0$, то комплексное число совпадает с действительным. Если $a=0$ и $b\neq 0$, оно называется чисто мнимым и не имеет действительной части.

02

Мнимая единица

Символ i обозначает мнимую единицу, для которой выполняется равенство $i^2=-1$. Именно это свойство отличает комплексные числа от обычных действительных чисел.

04

Стандартная запись

Форма $a+bi$ считается алгебраической записью комплексного числа. В ней сразу видны обе части числа, поэтому она используется при сложении, вычитании, умножении и делении.



Две оси

Каждому числу $z=a+bi$ на комплексной плоскости соответствует точка (a, b) . Горизонтальная ось показывает действительную часть, а вертикальная — мнимую.



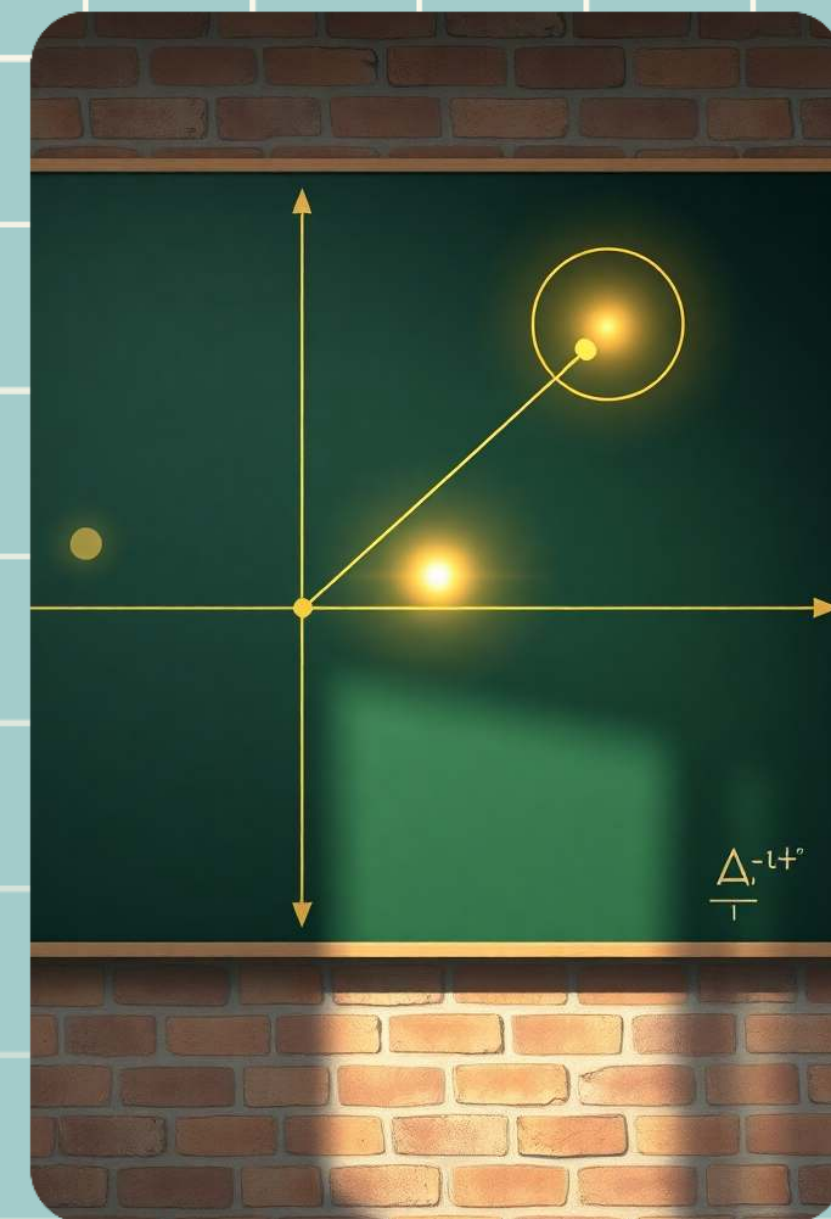
Нуль и положение точки

Начало координат отвечает числу 0. Чем больше значения a и b , тем дальше точка находится от начала координат и тем нагляднее её положение.



Геометрическая польза

Такое изображение связывает формулу и рисунок: можно видеть симметрию, модуль числа и его аргумент, а не только выполнять алгебраические преобразования.



Комплексная плоскость и координатное представление

Основные характеристики комплексного числа

- Сопоставление записи числа, его частей и геометрического образа помогает быстро переходить от формулы к свойствам.
- Все основные свойства комплексного числа определяются его координатами: алгебраическая запись, сопряжение и модуль взаимосвязаны.

Характеристика	Запись
Комплексное число	$z=a+bi$
Действительная часть	$\operatorname{Re}(z)=a$
Мнимая часть	$\operatorname{Im}(z)=b$
Сопряжённое	$\bar{z}=a-bi$
Модуль	$ z =\sqrt{a^2+b^2}$
Точка на плоскости	(a, b)





Равенство комплексных чисел

Главное условие

Два комплексных числа равны только тогда, когда совпадают их действительные части и одновременно совпадают мнимые части. Одного совпадения записи недостаточно.

Проверка вычислений

Если $a+bi=c+di$, то обязательно $a=c$ и $b=d$. Это правило удобно использовать при проверке результатов, чтобы убедиться, что ответ записан корректно.

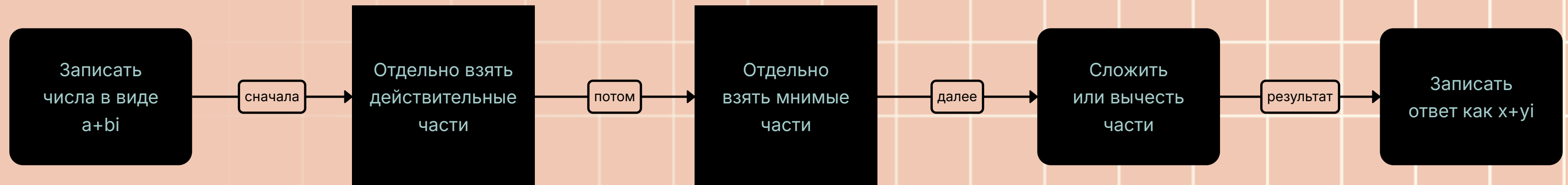
Стандартный вид

При решении уравнений и упрощении выражений важно приводить ответ к форме $x+yi$. Тогда сравнение частей становится прямым и не вызывает затруднений.

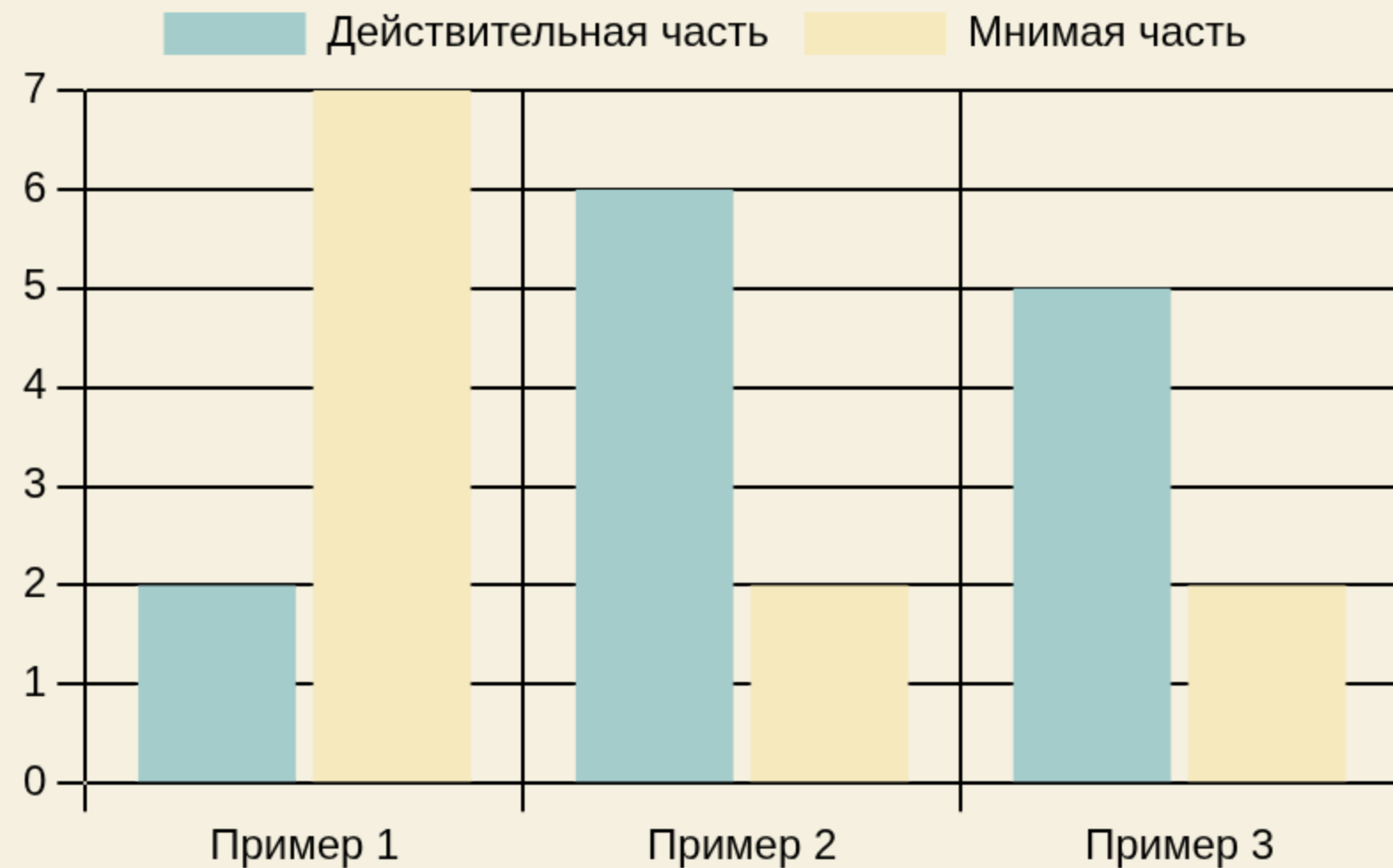
Как складывать и вычитать комплексные числа



Алгоритм основан на поэтапной работе с действительной и мнимой частями.



Примеры сложения комплексных чисел



- В каждом примере складываются одноимённые части, поэтому видно, как меняются обе координаты результата.
- Сложение комплексных чисел выполняется по компонентам: отдельно для действительной и отдельно для мнимой части.

Учебные примеры по алгебре

Умножение комплексных чисел

01 Раскрытие скобок

Произведение двух комплексных чисел вычисляют по распределительному свойству: каждое слагаемое первого множителя умножается на каждое слагаемое второго. Это даёт четыре произведения.

02 Использование i^2

После раскрытия скобок появляется член i^2 , который заменяют на -1 . Именно этот шаг переводит выражение из промежуточного вида в удобную алгебраическую форму.

03 Общая формула

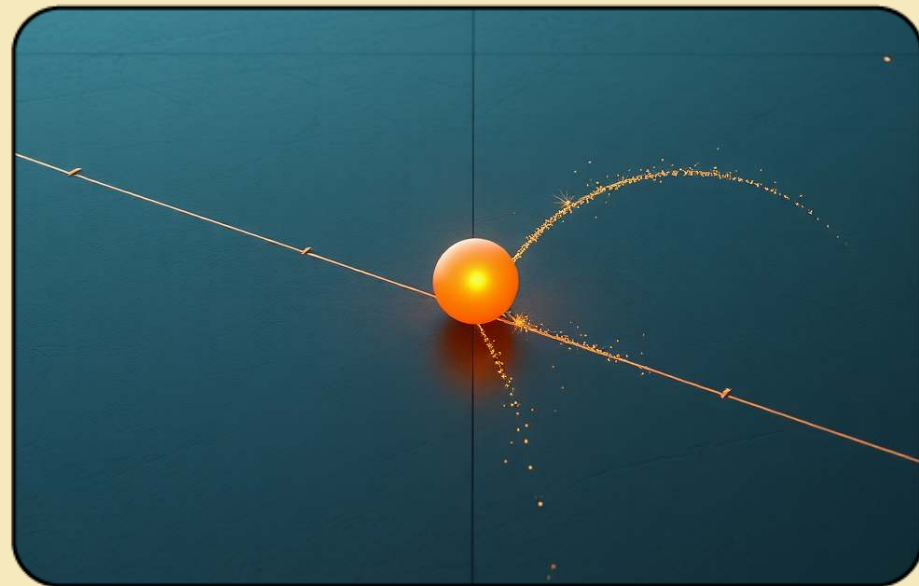
Для чисел $(a+bi)$ и $(c+di)$ получается выражение $(ac-bd)+(ad+bc)i$. Оно показывает, как перемешиваются действительные и мнимые части при умножении.



04 Финальная запись

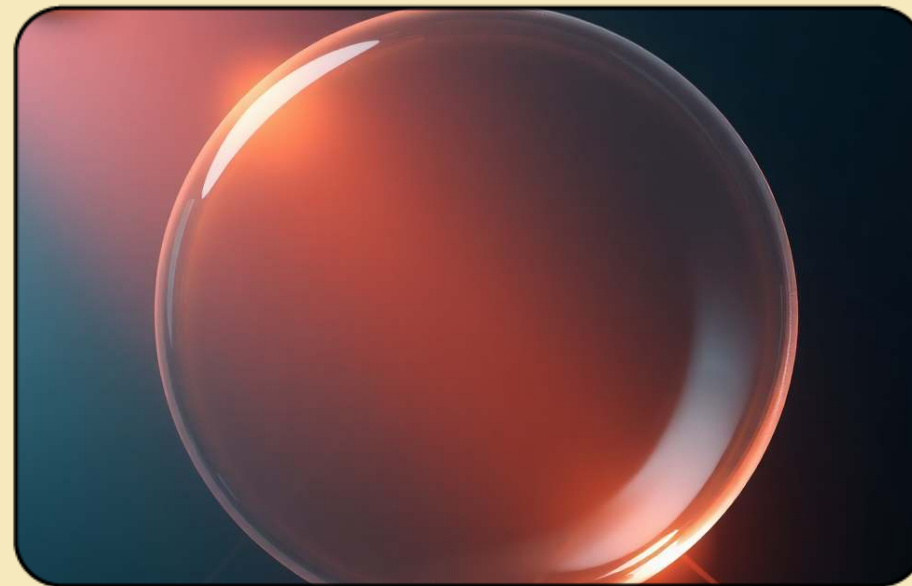
Полученный результат всегда приводят к виду $x+yi$. Такая форма позволяет сразу увидеть действительную и мнимую части и использовать ответ в дальнейших вычислениях.

Что показывает умножение на плоскости



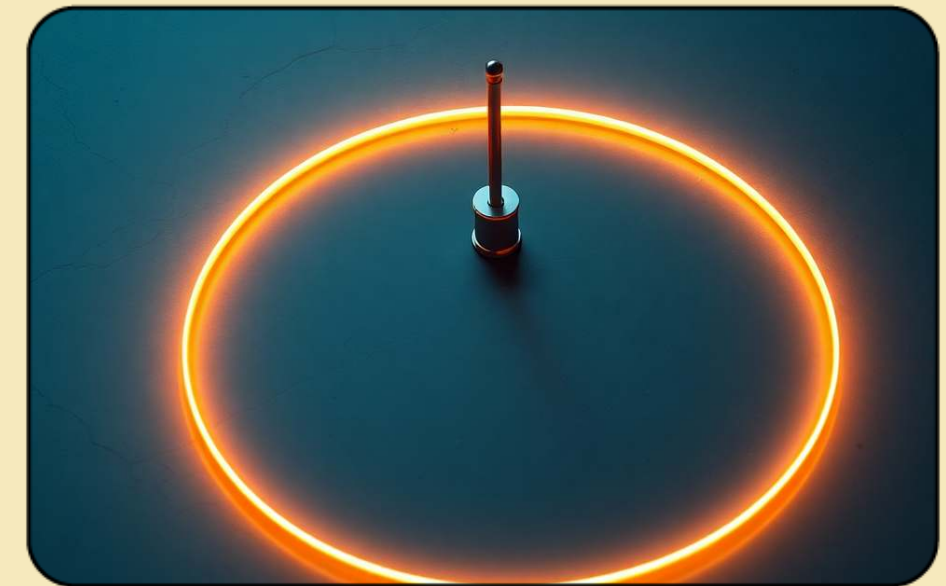
Поворот и растяжение

На комплексной плоскости умножение ведёт себя не только как обычное вычисление, но и как геометрическое преобразование. Точка может удаляться от начала координат и одновременно поворачиваться вокруг него. Поэтому одно действие меняет и длину, и направление.



Роль тригонометрической формы

Если число записано в тригонометрической форме, его модуль и аргумент ведут себя особенно наглядно. При умножении модули перемножаются, а аргументы складываются, что позволяет сразу предсказывать новый образ числа без громоздких преобразований.



Практический смысл

Если умножить число на множитель с модулем 2, расстояние до начала координат удвоится. При этом направление вектора изменится на угол, заданный аргументом множителя, поэтому на рисунке легко увидеть результат операции.

Деление комплексных чисел через сопряжённое

01

Приведение знаменателя

Чтобы разделить одно комплексное число на другое, знаменатель умножают на сопряжённое к нему число. Тогда в выражении исчезает мнимая часть, а вычисления становятся стандартными и контролируемыми.

03

Что получается в знаменателе

После перемножения внизу возникает сумма квадратов $\sqrt{c^2 + d^2}$. Она всегда действительна и не содержит $\sqrt{i}$, поэтому дробь легче упростить и приводить к форме $\sqrt{x + yi}$.

02

Умножение на сопряжённое

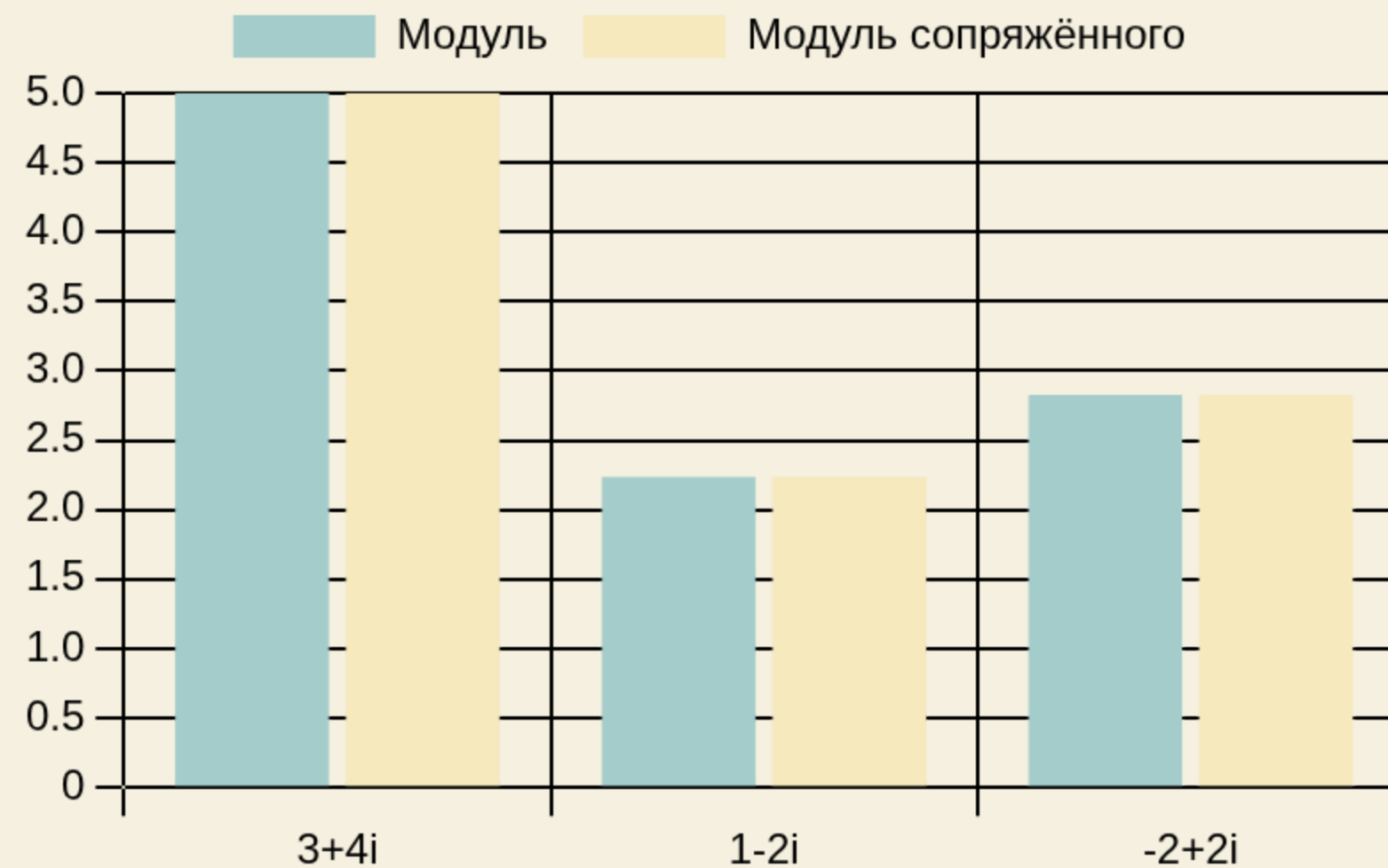
Если нужно найти $\sqrt{(a+bi)/(c+di)}$, числитель и знаменатель умножают на $\sqrt{(c-di)}$. Это не меняет значение дроби, но переводит её к более удобному виду для дальнейших преобразований.

04

Итоговый результат

Верхнюю часть затем раскрывают и отдельно собирают действительные и мнимые слагаемые. В ответе обязательно получают комплексное число в алгебраической записи, что позволяет проверять вычисления по частям.

Сопряжённое число и модуль на примерах



- На диаграмме видно, что у числа и его сопряжённого модуль совпадает, а меняется только знак мнимой части. Это отражает симметрию относительно оси действительных чисел.
- Модуль не зависит от знака мнимой части; сопряжённые числа всегда имеют одинаковую длину вектора на комплексной плоскости.

Школьный курс алгебры; вычисления по формулам $\bar{z}=a-bi$,
 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Примеры арифметических операций над комплексными числами



Числа	Сумма	Разность	Произведение
$2+3i$ и $1-5i$	$3-2i$	$1+8i$	$17-7i$
$4-i$ и $2+i$	6	$2-2i$	$9+2i$

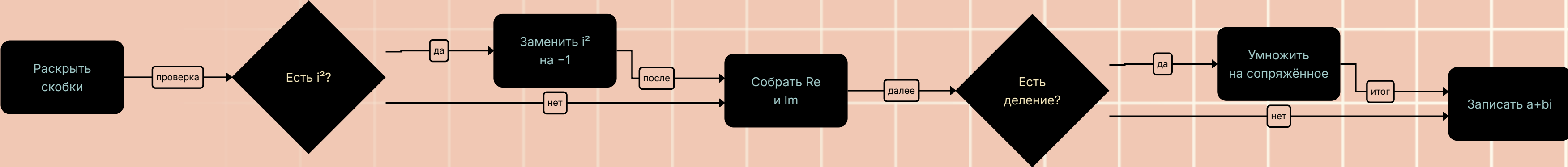
- В таблице приведены пары комплексных чисел и результаты
- сложения, вычитания или умножения в стандартной записи.

- Все результаты получены по алгебраическим правилам
- и после приведения к виду $a+bi$; арифметика комплексных чисел остаётся строго формальной.

Порядок вычисления выражений с комплексными числами



Алгоритм выполнения действий в школьных задачах по комплексным числам



Степени комплексных чисел и формула Муавра

01

Запись в тригонометрической форме

Для возведения в степень удобно использовать вид $z=r(\cos \varphi+i \sin \varphi)$. В нём модуль и аргумент разделены, поэтому действие со степенями становится закономерным и наглядным.

02

Формула Муавра

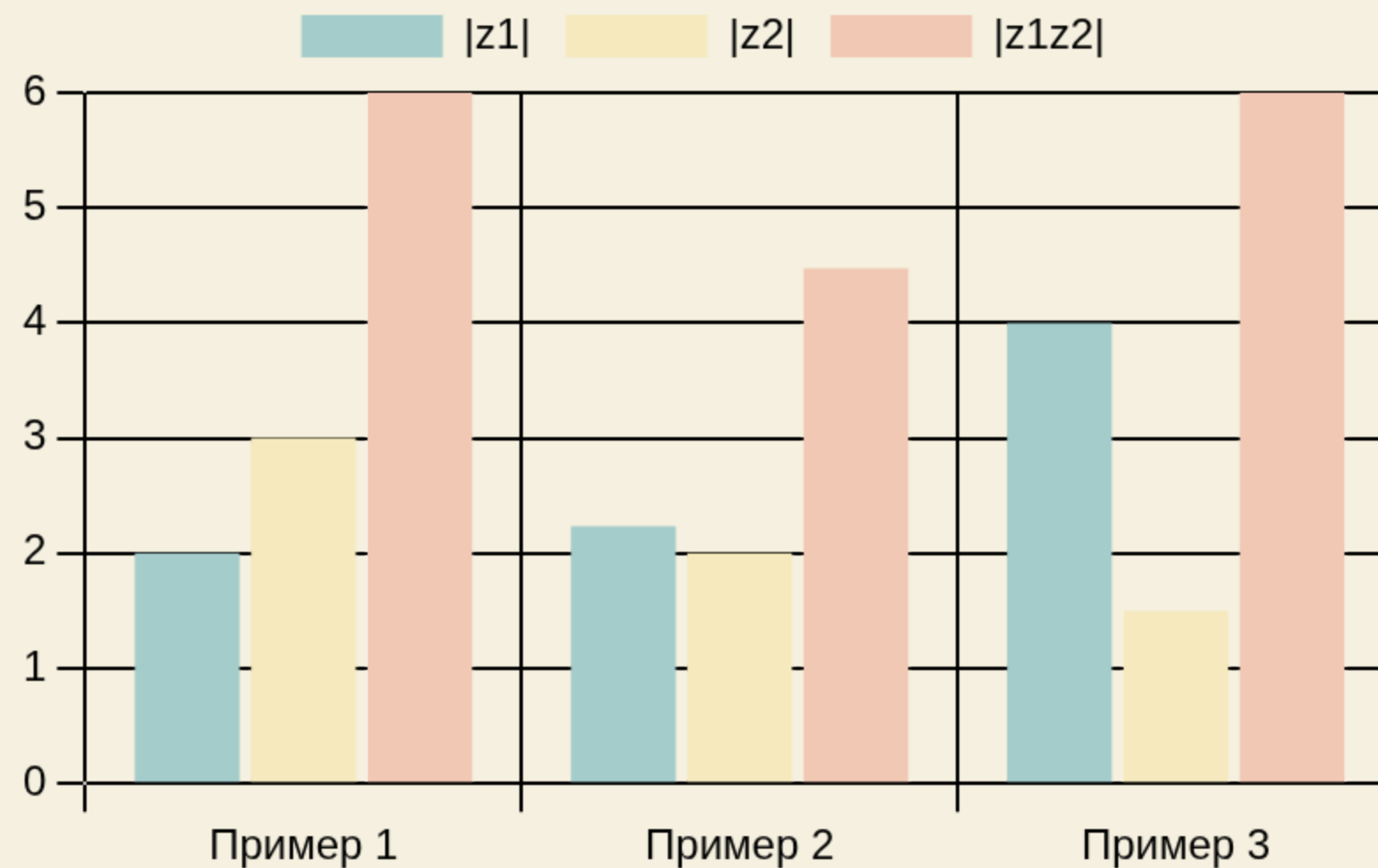
Если число записано в тригонометрической форме, то $z^n=r^n(\cos n\varphi+i \sin n\varphi)$. Степень влияет одновременно на модуль и на угол, что существенно упрощает вычисления.

03

Практический смысл

Формула Муавра показывает, что комплексные числа пригодны не только для сложения и умножения, но и для более сложных преобразований, связанных с периодичностью и повторяющимися поворотами.

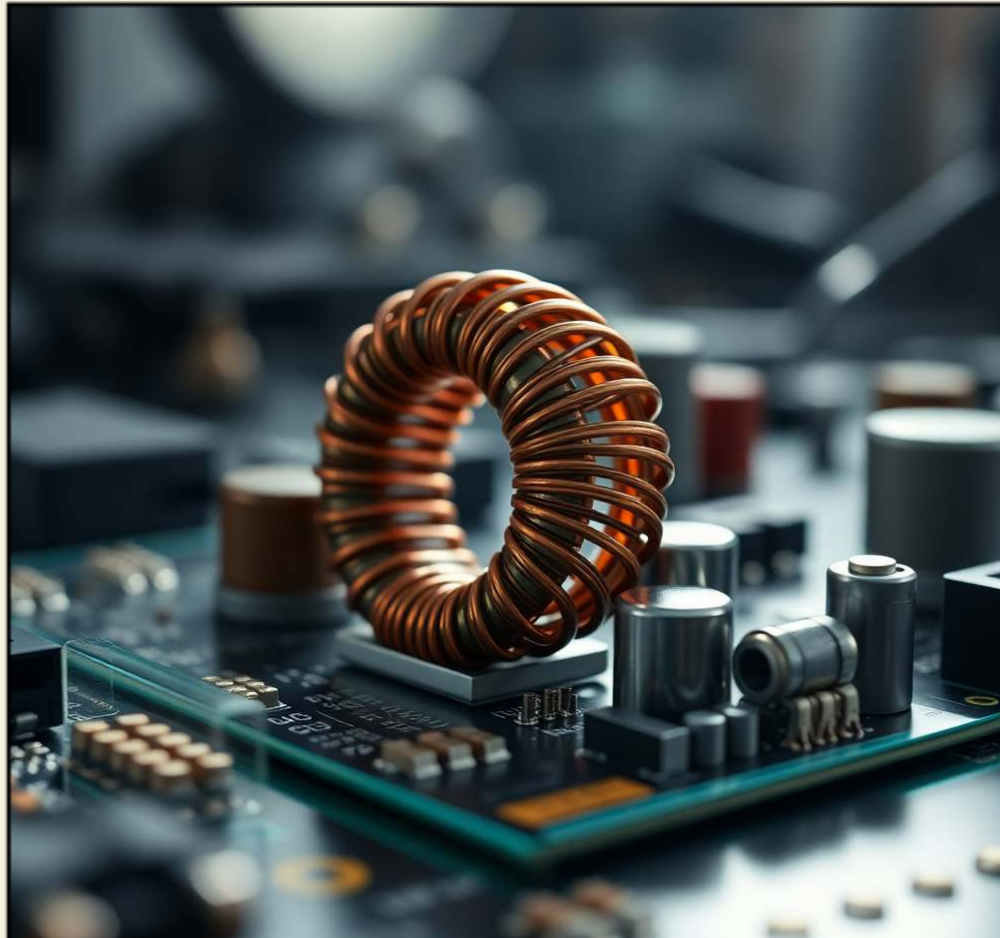
Как меняется модуль при умножении



- Сравнение трёх примеров показывает, что модуль произведения всегда равен произведению модулей множителей. Это правило удобно проверять даже без построения точек на плоскости.
- Во всех случаях выполняется $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$; значит, модуль ведёт себя как обычный множитель, независимо от аргумента.

Школьный курс алгебры; расчёт по правилу $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Комплексные числа в науке и технике



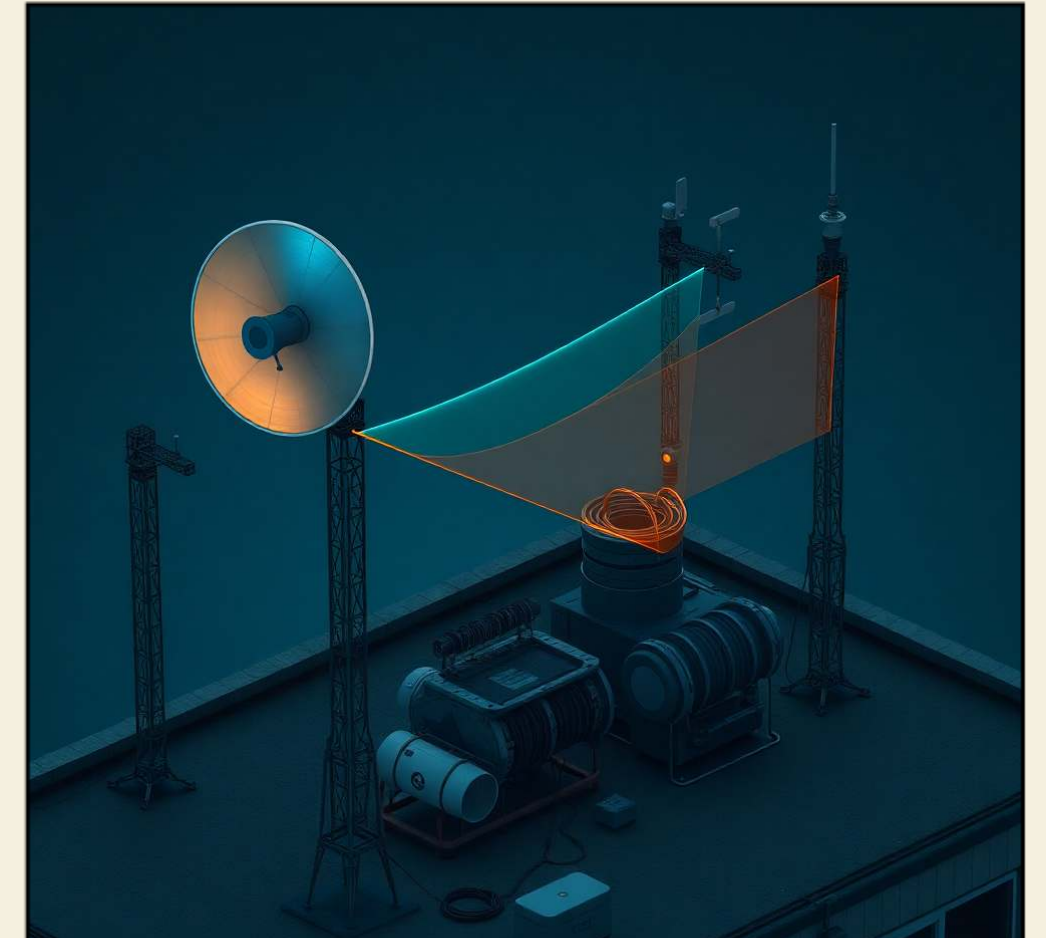
Электрические цепи переменного тока

В расчётах переменного тока комплексные числа помогают описывать сопротивление и сдвиг фаз в одной записи. Благодаря этому инженер видит не только величину, но и направление изменения сигнала, что упрощает анализ цепей и выбор параметров.



Обработка сигналов и колебания

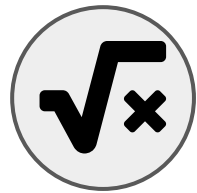
При изучении звука, радиосигналов и волн комплексная форма позволяет компактно описывать амплитуду и фазу. Это особенно важно там, где процесс повторяется во времени, а точность вычислений влияет на качество результата.



Физика и радиотехника

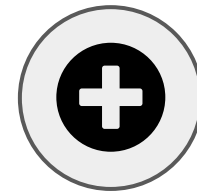
В физике и радиотехнике комплексные числа используют для моделирования колебательных процессов, антенн и передачи энергии. Они соединяют алгебру и геометрию, превращая сложное поведение реальных систем в удобную для расчёта модель.

Типичные ошибки при работе с комплексными числами



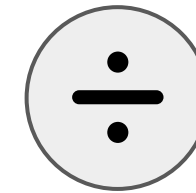
Неверное обращение с i^2

При раскрытии скобок часто забывают, что $i^2 = -1$, и оставляют i^2 без замены. Из-за этого ответ получает лишнюю мнимую часть и перестаёт быть стандартным.



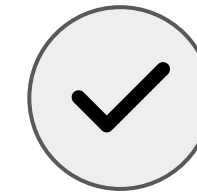
Смешение частей

Ещё одна ошибка — объединять действительные и мнимые слагаемые в одну сумму без приведения к виду $a+bi$. Такое решение трудно проверить и легко перепутать при дальнейшем вычислении.



Ошибки при делении

При делении нередко забывают умножить числитель и знаменатель на сопряжённое число знаменателя. Тогда в ответе остаётся мнимая часть внизу, хотя она должна исчезнуть.



Проверка по Re и Im

Полезно отдельно выписывать $\text{Re}(z)$ и $\text{Im}(z)$ после каждого шага. Такой контроль помогает быстро заметить потерю знака, пропуск i^2 или неверное приведение результата.

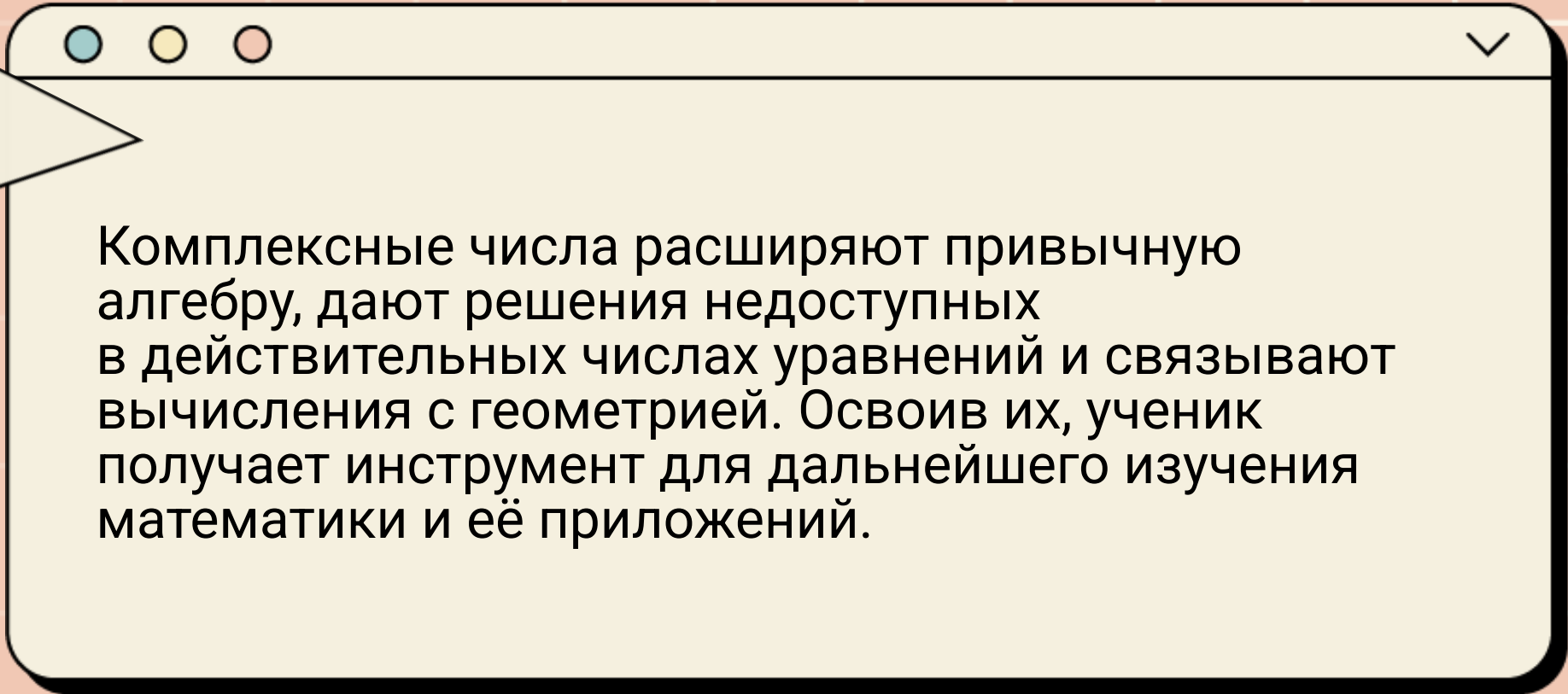
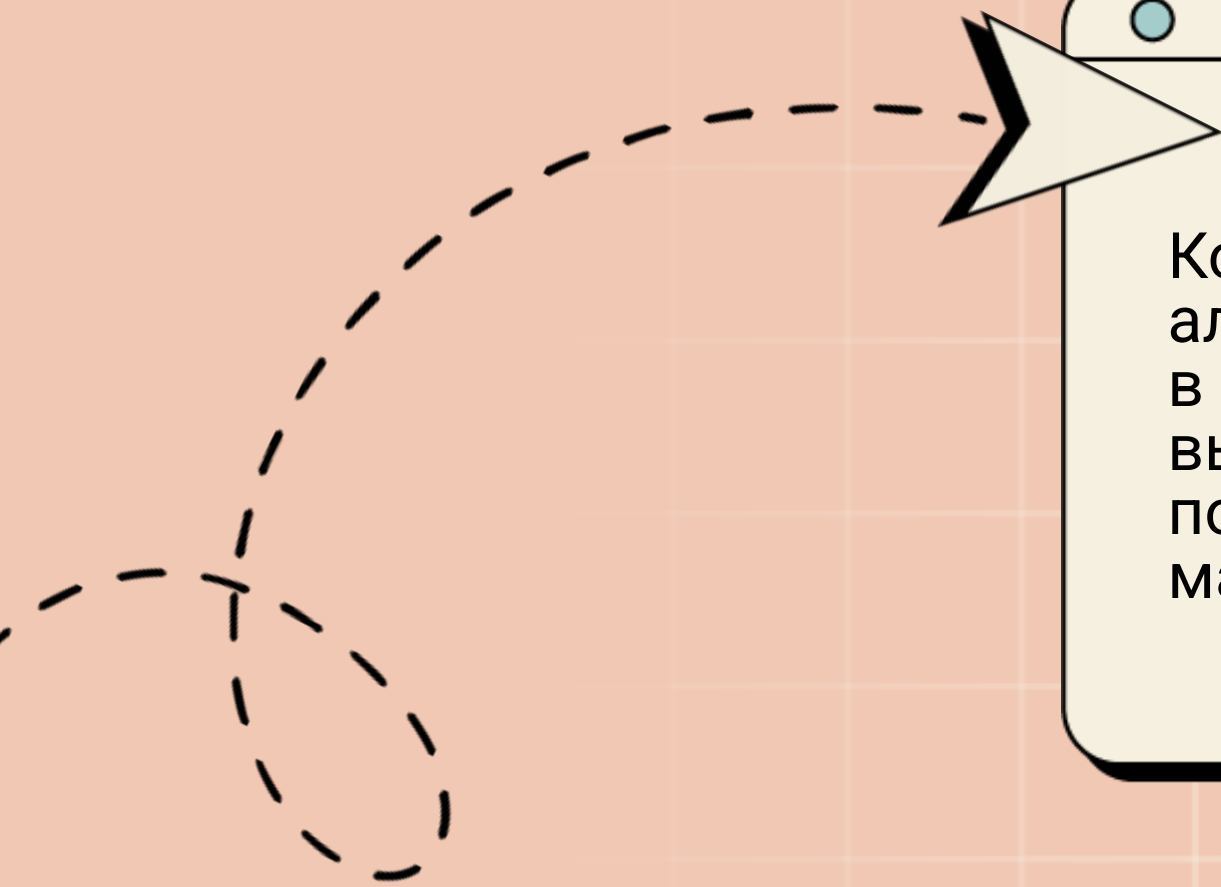
Три формы записи комплексных чисел

- Таблица сопоставляет формы записи комплексного числа и показывает, для каких задач каждая из них особенно удобна.
- Все три формы описывают одно и то же число, но по-разному подчеркивают его свойства: вычислительные, геометрические или угловые.

Форма	Запись	Назначение	Удобство
Алгебраическая	$a+bi$	Вычисления	Стандартный вид
Геометрическая	(a, b)	Плоскость	Наглядность
Тригонометрическая	$r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$	Степени	Работа с углом



Комплексные числа: от правил к применению



Комплексные числа расширяют привычную алгебру, дают решения недоступных в действительных числах уравнений и связывают вычисления с геометрией. Освоив их, ученик получает инструмент для дальнейшего изучения математики и её приложений.

