



Вычитание векторов: основное правило, смысл и применение

Как получить новый вектор из двух данных?

Векторы и их разность в 8 классе

На уроках геометрии вычитание векторов изучают вместе с равными, противоположными векторами, их модулем и координатами. Этот материал помогает решать задачи на перемещение, направление и изменение величин.



Что такое вектор

Направленный отрезок

Вектор изображают стрелкой и записывают как $\overrightarrow{AB}$, а или b . Он показывает не только расстояние, но и направление движения или изменения.

Модуль вектора

Длина вектора называется модулем. Именно модуль показывает величину вектора, поэтому два вектора могут иметь одинаковую длину, но быть направлены по-разному.

Направление

Направление определяет, куда ориентирован вектор. Если два вектора смотрят в одну сторону, их направление одинаково, даже если они расположены в разных местах чертежа.

Равные векторы

Равные векторы имеют одинаковую длину и одинаковое направление. Их можно перенести в любое место, и от этого их свойства не изменятся.

Нулевой вектор

Нулевой вектор имеет длину 0 и не имеет определённого направления. Его удобно использовать как результат, когда два противоположных вектора взаимно компенсируют друг друга.



Противоположный вектор и его свойства



Та же длина

Противоположный вектор всегда равен по длине данному вектору. Меняется только направление, поэтому такой вектор удобно обозначать как $-a$.

Противоположное направление

Если вектор a направлен вправо, то $-a$ будет направлен влево. На чертеже это хорошо видно: стрелки одинаковой длины смотрят в разные стороны.

Сумма даёт ноль

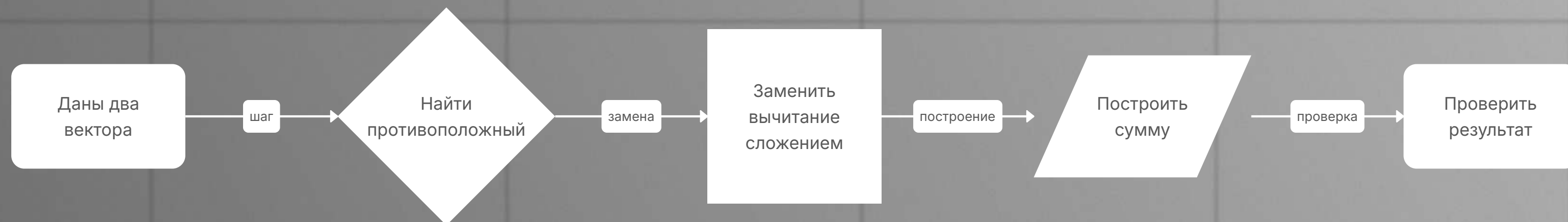
При сложении a и $-a$ получается нулевой вектор. Это означает, что два равных по длине, но противоположно направленных вектора полностью взаимно уничтожают друг друга.

Полезная модель

Понятие противоположного вектора лежит в основе вычитания. Вместо прямого вычитания мы заменяем один вектор противоположным и затем складываем их.

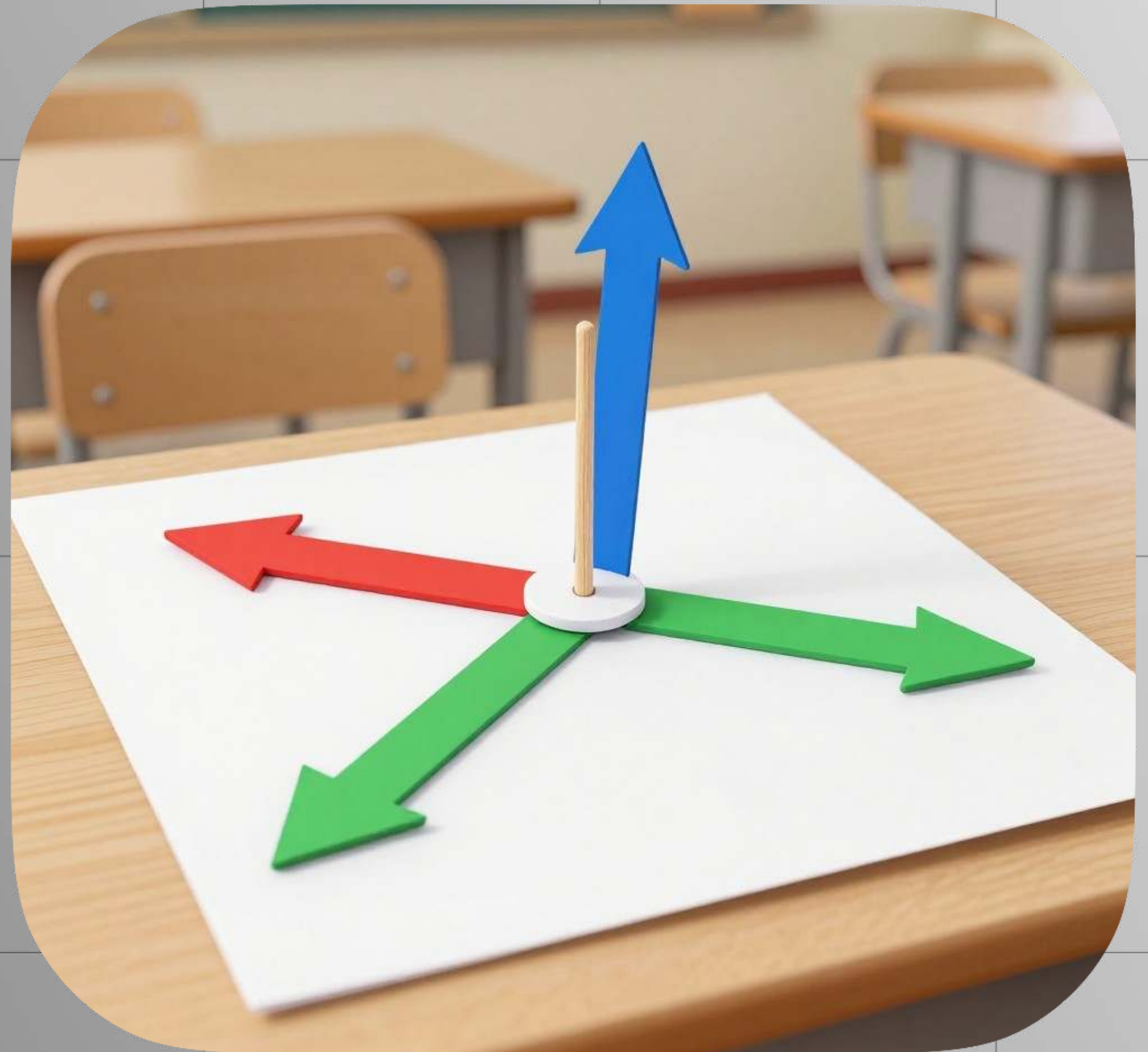
Как найти разность векторов

Последовательность действий при вычитании векторов в геометрии и координатах

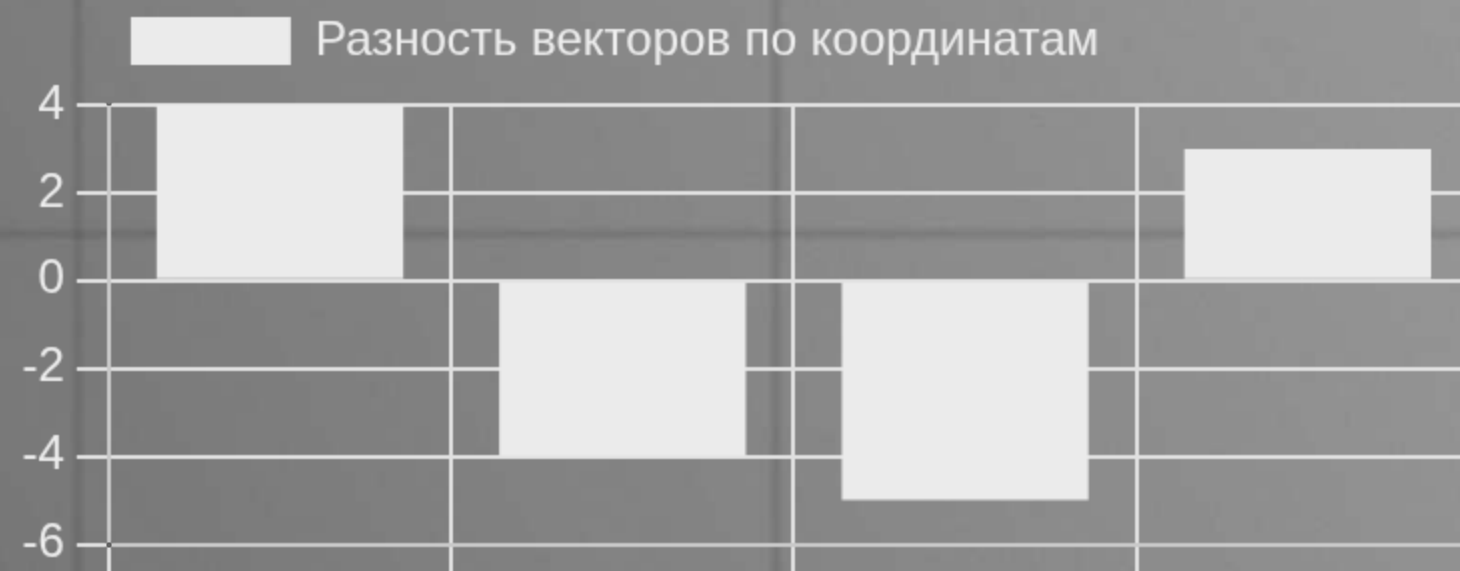


Геометрический смысл разности векторов

- 1 Что показывает разность**
Разность $a - b$ отвечает на вопрос, какой вектор нужно прибавить к b , чтобы получить a . Это делает разность не просто вычислением, а описанием перехода.
- 2 Связь с одним началом**
Если векторы a и b отложены из одной точки, разность $a - b$ удобно рассматривать как вектор, идущий от конца b к концу a .
- 3 Влияние направления**
Длина разности зависит от того, как расположены исходные векторы. При одинаковом направлении она обычно меньше, а при противоположном — заметно больше.
- 4 Практический смысл**
Такой взгляд помогает понимать чертежи и проверять ответы. По направлению разности сразу видно, в какую сторону нужно переместиться от одного вектора к другому.



Вычитание векторов в координатах



$a-b$ при $a=(5,2), b=(1,6)$

$a-b$ при $a=(5,2), b=(1,6), y$

$c-d$ при $c=(-3,4), d=(2,1)$

$c-d$ при $c=(-3,4), d=(2,1), y$

Учебные примеры по теме «Векторы»; дата не требуется

На координатной плоскости удобно сравнивать соответствующие координаты векторов и видеть, как меняется каждая из них отдельно.

Вычитание выполняется по координатам: первая координата и вторая координата обрабатываются независимо, поэтому расчёт остаётся простым и быстрым.

Примеры вычисления разности по координатам

Задано	Вычисление	Ответ
$a=(7, -1), b=(3,4)$	$7-3; -1-4$	$(4, -5)$
$a=(0,5), b=(-2,1)$	$0-(-2); 5-1$	$(2,4)$
$a=(6,0), b=(6,0)$	$6-6; 0-0$	$(0,0)$

В таблице показано, как работают координаты при вычитании векторов и когда получается нулевой вектор.

Координаты вычитаются по отдельности, а при одинаковых векторах получается нулевой вектор.

Школьное правило вычитания координат векторов

Правило вычитания векторов по координатам

1 Основная формула

Если $a=(x_1, y_1)$, $b=(x_2, y_2)$, то $a-b=(x_1-x_2, y_1-y_2)$. В трёхмерном случае правило такое же: вычитаются соответствующие координаты.

2 Как считать без ошибок

Важно вычитать координаты в том же порядке, в каком записаны векторы. Если перепутать порядок, получится другой результат и изменится направление итогового вектора.

3 Внимание к знакам

Особенно аккуратно нужно работать с отрицательными числами. Например, выражение $2-(-3)$ даёт 5, потому что вычитание отрицательного числа превращается в прибавление.



Как изображается разность векторов на чертеже

Общий старт

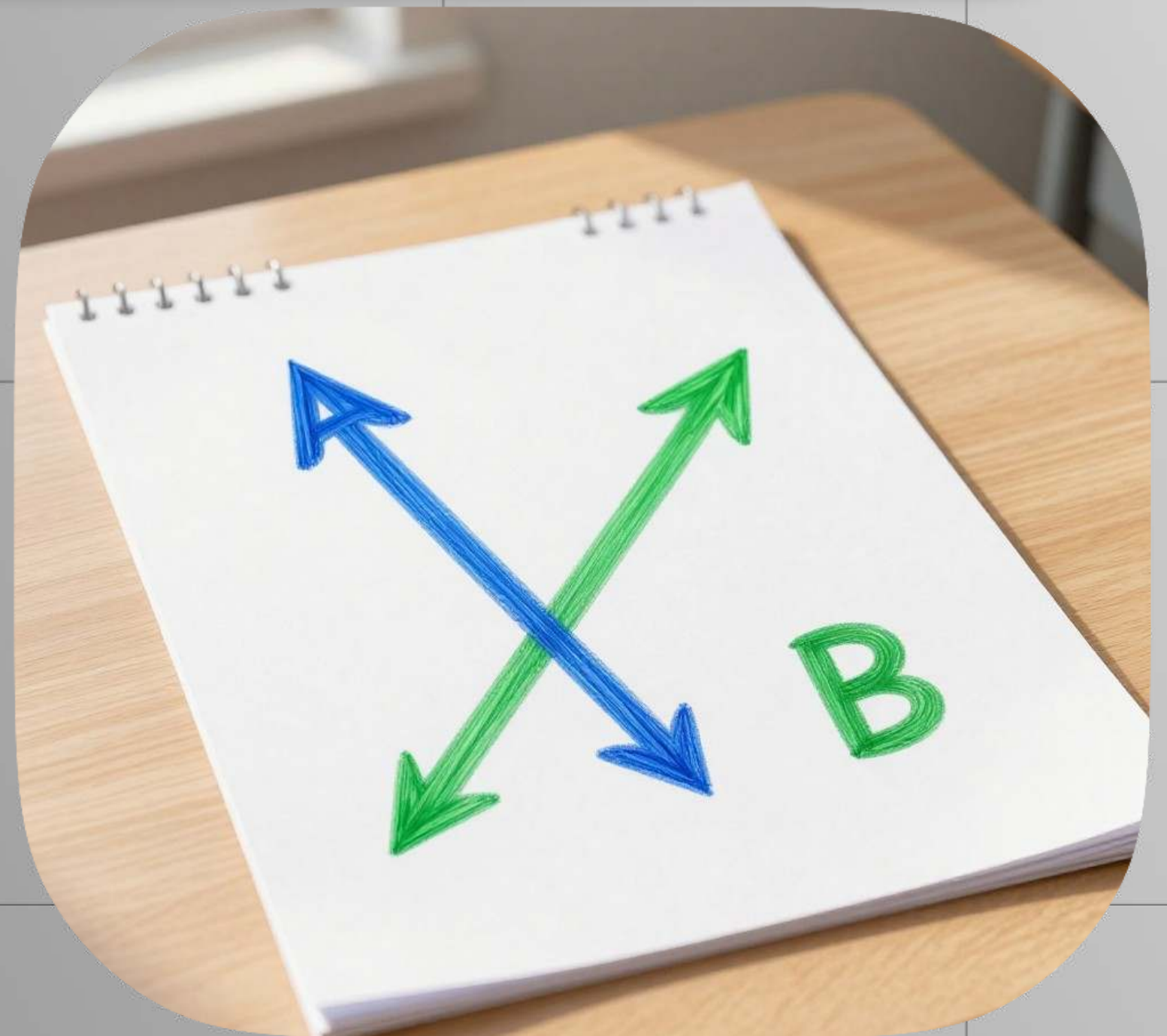
Обычно оба вектора переносят в одну точку. Так проще сравнить их длины и увидеть, куда направлена разность на рисунке.

Связь концов

Разность изображают как вектор, соединяющий конец вычитаемого вектора с концом уменьшаемого. Поэтому на схеме особенно важны обе конечные точки.

Разные направления

В зависимости от расположения исходных векторов результат может смотреть вправо или влево. Черчѐж помогает увидеть это без долгих вычислений.



Частые ошибки при вычитании векторов



Путают порядок

При вычитании важно не перепутать, какой вектор уменьшаемый, а какой вычитаемый. Если поменять их местами, получится другой вектор с иным направлением и часто с другой длиной.



Складывают вместо вычитания

Ещё одна ошибка — по привычке складывать координаты. Но в разности каждая координата первого вектора уменьшается на соответствующую координату второго, поэтому знак действия нельзя менять.



Забывают о знаках

При переходе к противоположному вектору меняются знаки у всех координат сразу. Если этого не заметить, легко получить неверный ответ, особенно когда в записи есть отрицательные числа.



Ошибаются в вычислениях

Часто трудность вызывает вычитание отрицательных чисел. Например, выражение $2 - (-3)$ равно 5, а не -1 . Такие примеры нужно проверять особенно внимательно, записывая действия по шагам.

Как меняется разность при разных направлениях векторов



Сравнение для векторов одинакового модуля по школьному правилу вычитания.

Во всех случаях модули исходных векторов одинаковы, поэтому меняется только влияние направления на результат.

Чем сильнее векторы расходятся по направлению, тем больше становится разность; при одинаковом направлении она наименьшая.

Свойства вычитания векторов

1

Вычитание самого себя

Для любого вектора верно: $a - a = 0$. Это означает, что при вычитании одинаковых векторов получается нулевой вектор, у которого нет направления и длина равна нулю.

2

Нулевой вектор не меняет результат

Если из вектора вычесть нулевой вектор, он не изменится: $a - 0 = a$. Нулевой вектор не добавляет ни длины, ни направления, поэтому результат остаётся прежним.

3

Из нуля получается противоположный

Если из нулевого вектора вычесть a , то получится $-a$. Это удобно понимать как движение в обратную сторону: вектор той же длины, но с противоположным направлением.

4

Порядок имеет значение

Вычитание не обладает переместительным свойством: $a - b$ не равно $b - a$. При этом $b - a = -(a - b)$, поэтому ответы можно быстро проверить по знаку и направлению.

Сравнение сложения и вычитания векторов

Операция	Смысл	Формула	Результат
Сложение	Объединяет перемещения	(x_1+x_2, y_1+y_2)	Новый вектор
Вычитание	Находит разность	(x_1-x_2, y_1-y_2)	Вектор-разность

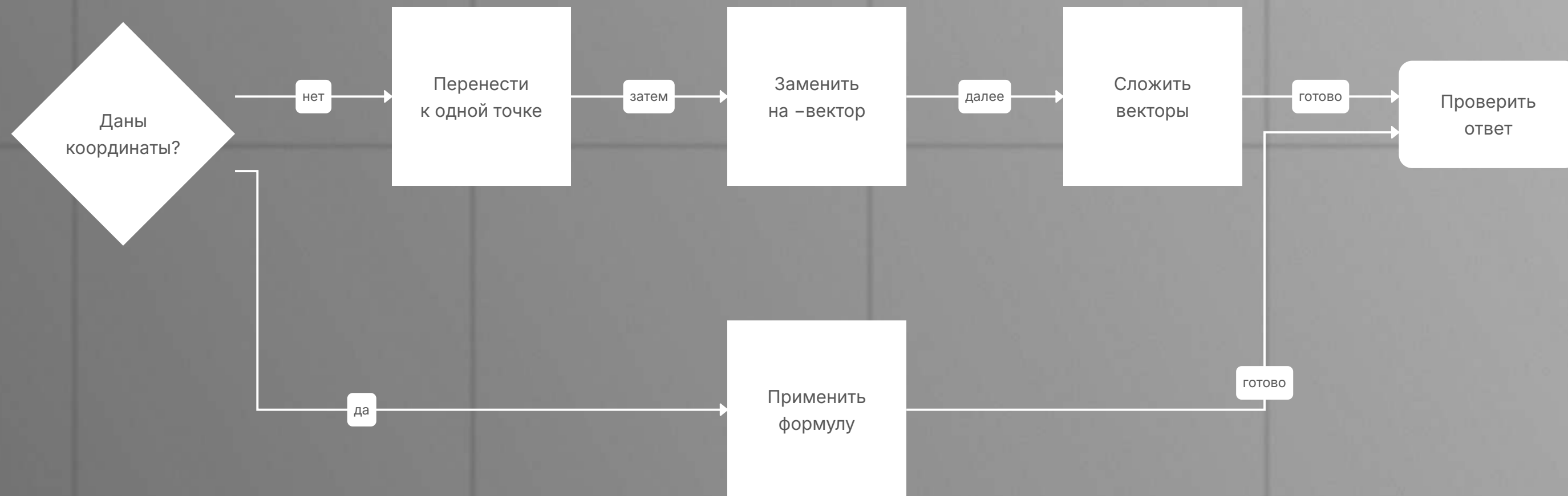
Школьные правила сложения и вычитания векторов

В таблице показано, чем отличаются две операции и как они записываются в координатах.

Обе операции используют координаты, но вычитание строится через противоположный вектор и даёт иной геометрический смысл.

Алгоритм решения задач на вычитание векторов

Последовательность действий для работы с координатами и чертежом



Вычитание векторов на примере движения

Путь в одном направлении

Мальчик прошёл 8 км на восток, а затем сравнивает этот путь с отрезком в 3 км на восток. Разность показывает 5 км на восток, потому что оба перемещения направлены одинаково. На схеме это выглядит как более короткий вектор в ту же сторону.



Когда направления противоположны

Если второй путь направлен на запад, ситуация меняется: теперь нужно учитывать обратное направление. Разность уже не сокращает расстояние, а показывает, как одно перемещение отличается от другого по стороне движения. Такой рисунок помогает понять смысл знаков в задачах на карту.



Вычитание векторов на координатной сетке



Точки $A(1,1)$, $B(4,2)$, $C(3,5)$; школьная формула разности координат.

По координатам легко находить вектор между двумя точками без отдельного построения всех промежуточных шагов.

Разность координат сразу даёт нужный вектор, поэтому метод удобен для проверки рисунка и решения задач на точки.

Зачем нужно вычитание векторов в геометрии и физике



Изменение положения

Вычитание помогает узнать, как изменилось положение объекта между двумя точками. Это удобно в задачах о маршруте, где важно не только расстояние, но и направление перемещения.



Разница скоростей

В физике векторная разность показывает, насколько одна скорость отличается от другой. Такой способ позволяет сравнивать движение тел, идущих в разных направлениях или с разной быстротой.



Действие сил

Если на тело действуют две силы, вычитание помогает найти их различие по направлению и величине. Это важно для понимания равновесия, толчка и изменения движения.



Построение в геометрии

В геометрии разность векторов используют для сравнения направленных отрезков и построения новых. На координатной плоскости это делает решение короче, аккуратнее и понятнее.

Мини-проверка по теме

Задание	Вычисление	Ответ
$a=(2,3), b=(5,1)$	$a-b$	$(-3,2)$
$a=(-4,0), b=(1, -2)$	$a-b$	$(-5,2)$
Сравнить $a-b$ и $b-a$	знаки меняются	Разные

Проверьте, как меняются координаты и почему порядок векторов влияет на результат.

При вычитании важно сохранять порядок и внимательно работать со знаками: именно они определяют итоговый вектор.

Главная идея вычитания векторов

Вычитание векторов показывает, как получить один направленный отрезок из другого. Достаточно заменить вычитаемый вектор противоположным и дальше работать по обычным правилам координат.