

Дифференцирование линейной комбинации функций

Производная суммы, разности
и постоянного множителя
без лишних преобразований.



> Зачем нужен этот приём в 10 классе

Линейность производной позволяет быстро разбирать выражения из нескольких слагаемых, экономит время на контрольных и помогает проверять ответ. Особенно часто она нужна для многочленов, тригонометрических, показательных и логарифмических функций.



> Линейная комбинация функций: запись и смысл

Общая запись

Линейная комбинация функций записывается как $a_1f_1(x) + a_2f_2(x) + \dots + a_nf_n(x)$.
Здесь каждая функция входит в выражение отдельно, без обязательного объединения в одну формулу.

Постоянные коэффициенты

Коэффициенты $a_1, a_2, \dots, a_n$ не зависят от переменной x . Поэтому они остаются обычными числами и не дифференцируются как часть функции.

Что это меняет

Если коэффициент постоянный, его можно вынести за знак производной. Это делает вычисление короче и позволяет работать со сложными выражениями поэлементно.

Где встречается

Такие выражения часто появляются в алгебре, физике и экономике, когда одну величину описывают как сумму нескольких вкладов, каждый со своим коэффициентом.

01

Сумма производных

Если функция задана суммой, производная суммы равна сумме производных. Каждый член рассматривается отдельно, без раскрытия скобок и лишних преобразований.

Правило работает широко

Линейность производной действует для любого числа слагаемых. Поэтому длинные выражения можно дифференцировать

02

Разность сохраняет знак

Для разности действует тот же принцип: производная первого слагаемого минус производная второго. Знак перед слагаемым переносится в ответ без изменений.

03

Постоянный множитель остаётся

Если перед функцией стоит постоянное число, оно не исчезает после дифференцирования. Меняется только сама функция, а коэффициент сохраняется как множитель.

Основное правило
дифференцирования линейной

> Свойства линейности производной

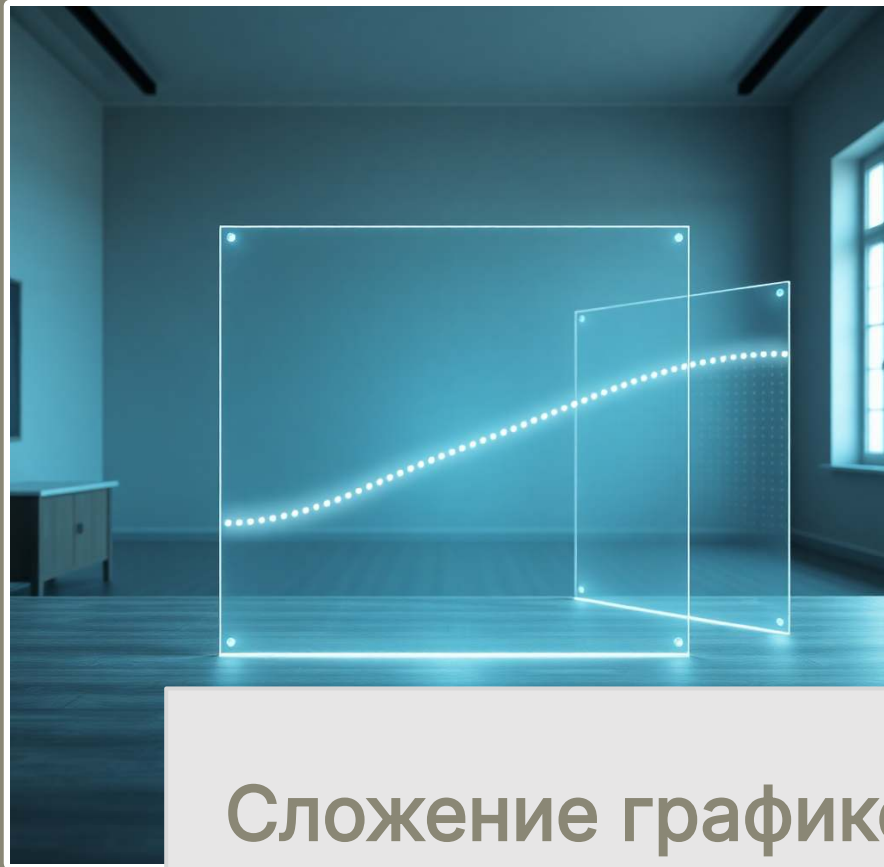
Вид выражения	Правило	Пример
$(f+g)$	$f'+g'$	$(x^2+\sin x)'=2x+\cos x$
$(f-g)$	$f'-g'$	$(x^3-\cos x)'=3x^2+\sin x$
$(a\cdot f)$	$a\cdot f'$	$(5x^4)'=20x^3$
c	0	$(-7)'=0$

Таблица показывает основные случаи линейности и их применение на стандартных примерах.

Линейность позволяет переходить от сложного выражения к отдельным слагаемым и сразу упрощает вычисления.

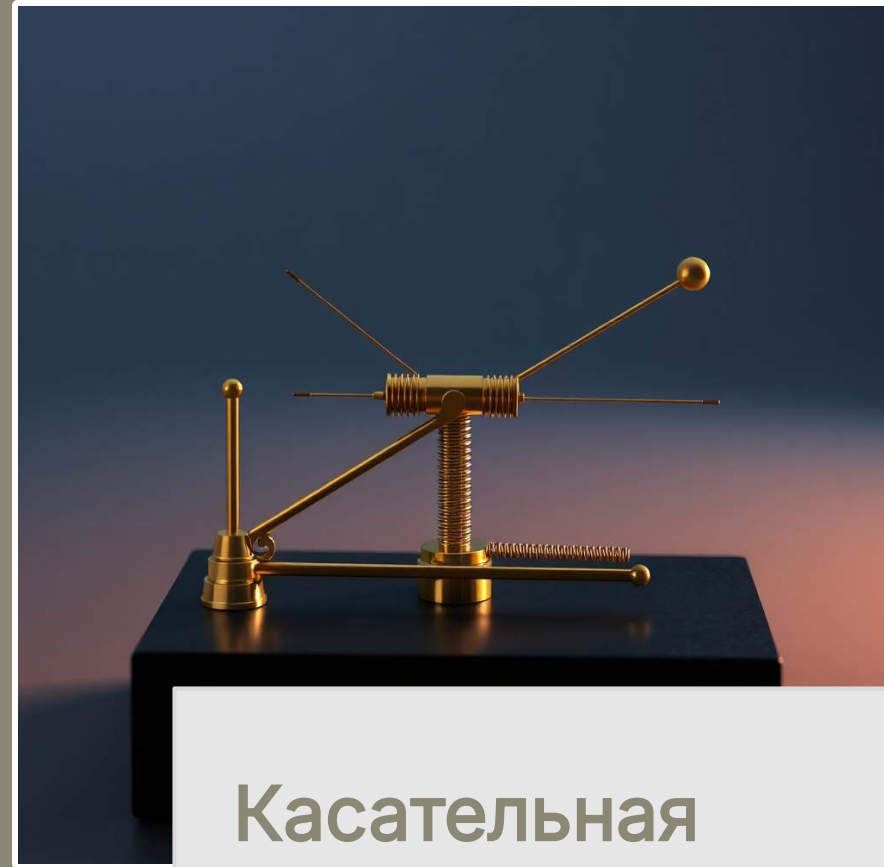
Стандартные правила дифференцирования

> Геометрический смысл линейности



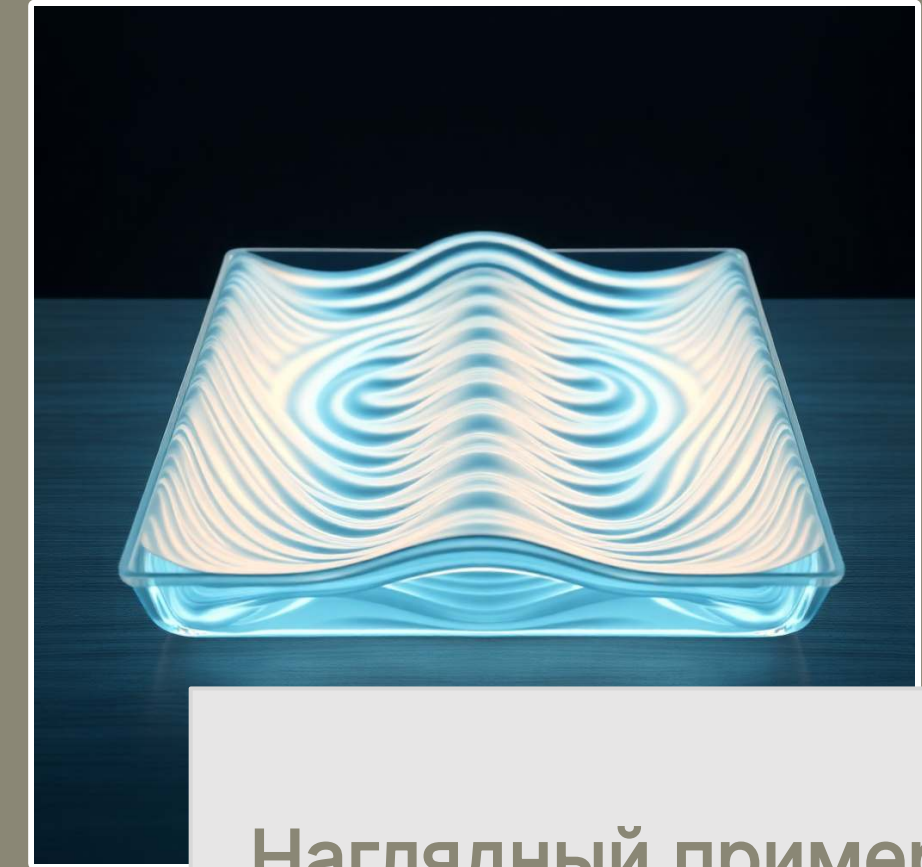
Сложение графиков по точкам

Если в каждой точке к значениям двух функций прибавить друг друга, получится новый график суммы. Его форма отражает вклад каждого слагаемого, а не только итоговое выражение. На одном поле удобно показать два исходных графика и их сумму.



Касательная как сумма вкладов

Производная описывает наклон касательной к графику в данной точке. Для суммы функций этот наклон складывается из наклонов отдельных частей, поэтому линейность видно не только в вычислениях, но и в геометрии.



Наглядный пример

Для $f(x)=x^2$ и $g(x)=\sin x$ сумма даёт график $f+g$, а производная равна $2x+\cos x$. Такой рисунок помогает связать алгебраическую формулу с изменением графика и увидеть, как каждый член влияет на итог.

> Постоянный множитель в производной

01 Смысл правила

Для постоянного числа a выполняется формула $(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$. Коэффициент не зависит от переменной, поэтому после

02 Примеры вычислений

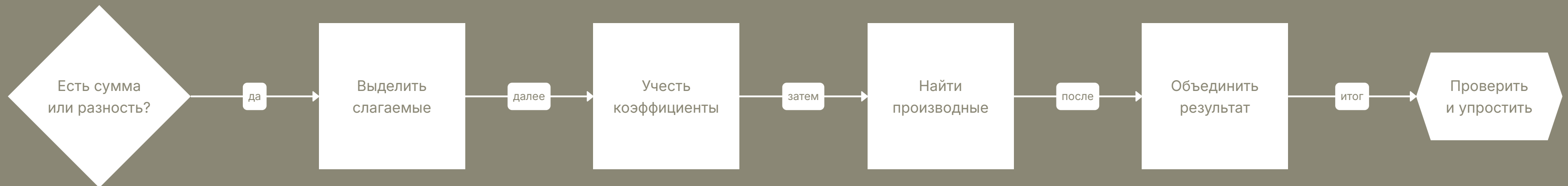
Так, $(7x^3)' = 21x^2$, $(-\frac{1}{2} \cdot \sin x)' = -\frac{1}{2} \cdot \cos x$, $(3e^x)' = 3e^x$.
Во всех случаях меняется только функция, а числовой множитель сохраняется.

03 На что обращать внимание

Особенно важно не потерять знак и дробь. Ошибка в коэффициенте меняет весь ответ, даже если сама производная найдена верно.

> Порядок вычисления производной линейной комбинации

Последовательность действий при работе с суммой, разностью и постоянными множителями



> Стандартные производные, которые чаще всего используются

Схема помогает быстро вспомнить базовые формулы, на которые опирается дифференцирование линейных комбинаций.

При вычислениях чаще всего используются производные многочленов, тригонометрических и показательных функций, а также логарифма.

> Линейная комбинация из трёх и более функций



Любое число слагаемых

Формула линейности не ограничивается двумя функциями. Она одинаково работает для трёх, четырёх и большего числа слагаемых, если их коэффициенты постоянны.



Один алгоритм для разных выражений

Многочлены любой степени, суммы тригонометрических функций и показательных выражений можно дифференцировать по одному и тому же принципу, не меняя общий порядок действий.



Не нужно объединять заранее

Перед нахождением производной не требуется приводить всё выражение к общему виду. Достаточно последовательно обработать каждый член и затем собрать ответ.



Удобство для проверки

Разделение выражения на части облегчает контроль знаков, коэффициентов и степеней. Это снижает риск ошибки в длинных примерах и делает решение прозрачным.

> Пример: производная многочлена

Разложение по членам

Функция $3x^4 - 5x^2 + 2x - 8$ состоит из отдельных слагаемых, поэтому производную находят по каждому члену независимо. Такой подход не требует раскрытия скобок или дополнительных преобразований.

Исчезновение константы

Свободный член -8 после дифференцирования исчезает, потому что производная постоянного числа равна нулю. В итоге получаем $F'(x) = 12x^3 - 10x + 2$ и сразу видим структуру ответа.

Поэлементное дифференцирование

Для степенных членов применяем стандартное правило: $(3x^4)' = 12x^3$, $(-5x^2)' = -10x$, $(2x)' = 2$. Каждый коэффициент сохраняется, а степень уменьшается на единицу.



> Производная константы равна нулю

Правило дифференцирования

При вычислении производной любой константы получаем $c' = 0$, независимо от того, положительное это число, отрицательное или число π .

○ Постоянная величина

Число c не зависит от переменной, поэтому его значение не меняется при изменении x .



○ Практический эффект

Именно поэтому свободный член многочлена исчезает, а ответ после дифференцирования становится короче и удобнее для проверки.

> Типичные ошибки при дифференцировании суммы

Ошибки особенно заметны в выражениях с дробями и отрицательными коэффициентами, где легко потерять знак или перепутать правило.

Чаще всего сбои связаны со знаками и множителями; реже — с неверным выбором правила. Проверка структуры выражения снижает риск ошибки.

> Мини-набор формул для 10 класса

Функция	Производная	Пример
x	1	$(4x^5)'=20x^4$
x^n	$n \cdot x^{(n-1)}$	
$\sin x$	$\cos x$	$(2\sin x-3\cos x)'=2\cos x+3\sin x$
e^x	e^x	$(5e^x+\ln x)'=5e^x+1/x$

Таблица объединяет самые нужные формулы производных и показывает, как они работают в линейных комбинациях.

Линейная комбинация распадается на отдельные слагаемые, поэтому достаточно применять таблицу стандартных производных поэлементно.

> Как сочетается линейность с другими правилами



Сумма и разность

Линейность работает сразу, если выражение состоит из суммы или разности. Тогда производную находят по каждому слагаемому отдельно, не меняя общую структуру записи.



Произведение внутри слагаемого

Когда в одном из слагаемых есть произведение функций, сначала применяют правило произведения. Линейность затем помогает сложить уже найденные производные отдельных частей.

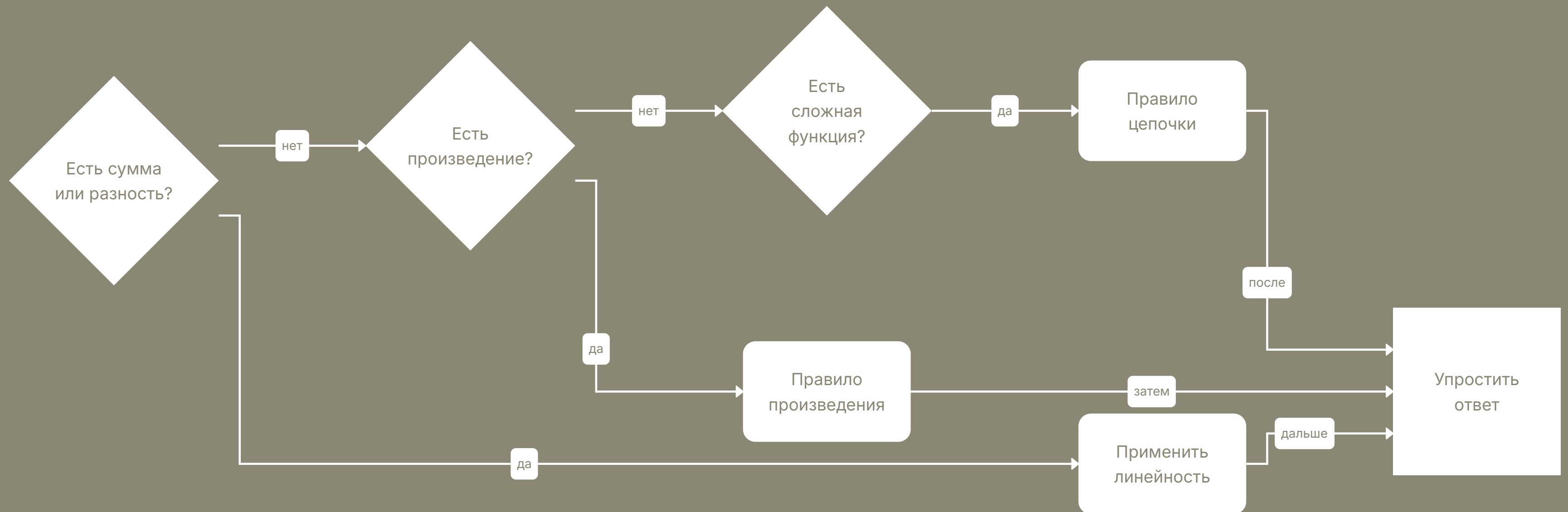


Сложная функция

Если слагаемое имеет вид $f(g(x))$, сначала используют правило цепочки. Линейность лишь распределяет дифференцирование по уровню суммы, не заменяя остальные правила.

> Когда линейность применяется сразу

Схема выбора правила дифференцирования для типовых выражений 10 класса



> Пример из физики: движение тела



Координата как функция времени

Если координата тела задана формулой $x(t)=2t^3-4t+1$, то каждое слагаемое описывает свой вклад в движение. Кубический член отвечает за изменение скорости, линейный — за равномерную составляющую, а константа задаёт начальное смещение.



Скорость по производной

После дифференцирования получаем $v(t)=6t^2-4$. Это означает, что скорость в каждый момент времени определяется не всей формулой сразу, а суммой вкладов от отдельных частей, что удобно анализировать на графике.

> Как коэффициент влияет на производную

На одном ряду видно, что коэффициент входит в производную без изменений, а знак сохраняется вместе с ним.

Умножение функции на число приводит к такому же умножению производной. Это и есть практический смысл правила постоянного множителя.

01

Определить структуру

Сначала нужно понять, состоит ли выражение из суммы, разности и постоянных множителей. Это помогает выбрать нужное правило и не усложнять вычисления раньше времени.

Упростить результат

Полученное выражение приводят к удобному виду: собирают подобные члены, проверяют знаки и убирают производные констант, которые равны нулю.

02

Разделить на слагаемые

Затем каждый член записывают отдельно и находят, какие стандартные функции входят в выражение. Так легче не потерять знак, коэффициент и степень.

Проверить ответ

В конце полезно сопоставить результат с исходной формой функции и убедиться, что ни одно слагаемое не потеряно и ни одно

03

Применить базовые правила

После этого используют производные суммы, разности и постоянного множителя. Если встречаются знакомые функции, подставляют их производные из таблицы.

Итоговый алгоритм решения задач

> Линейность — основа быстрых вычислений

Линейность производной позволяет дифференцировать сумму по частям, сохранять постоянные множители и сразу убирать константы. Это делает вычисления понятными, быстрыми и надёжными в школьных задачах.