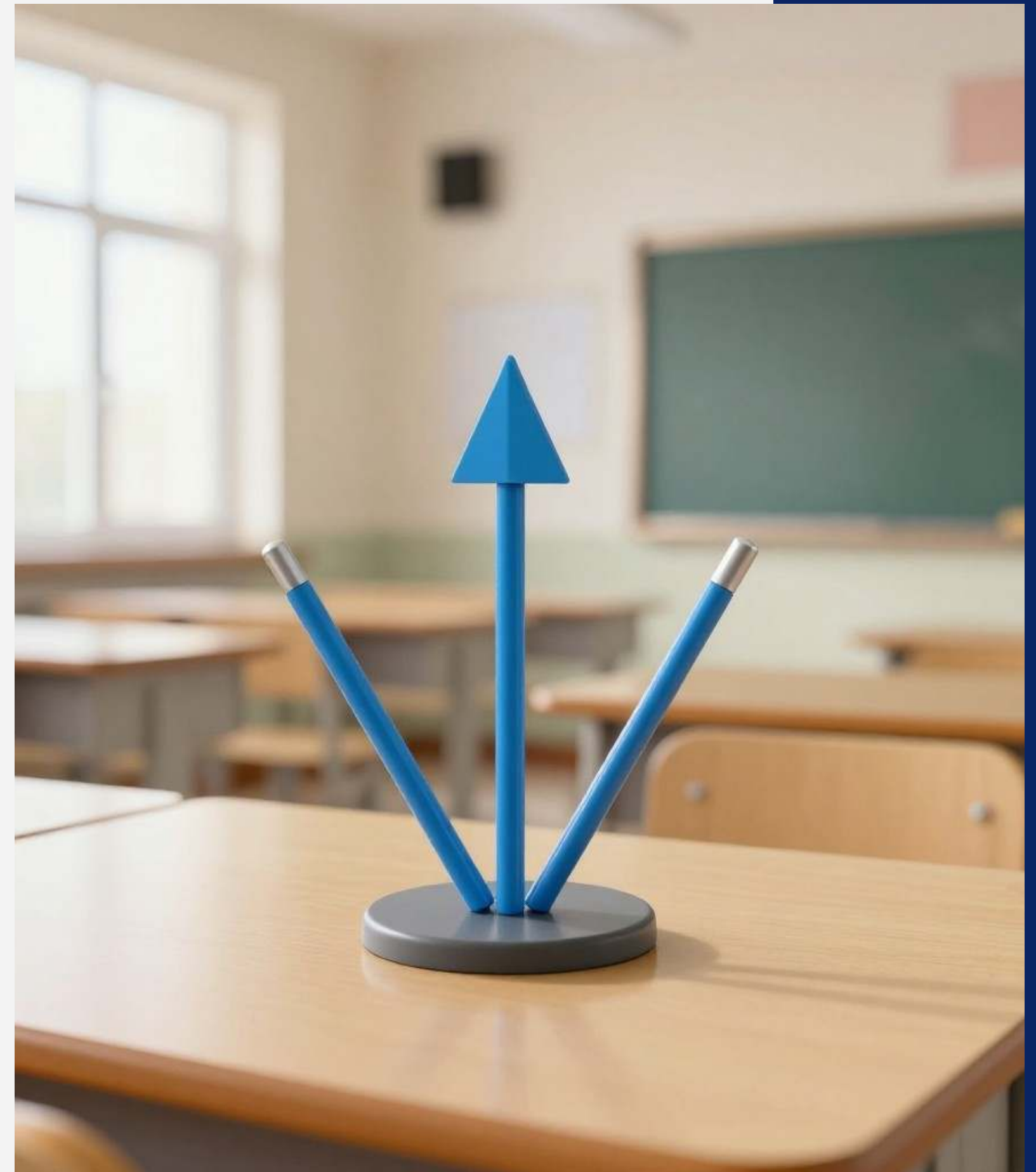


Сложение и вычитание векторов

Векторы: длина, направление и точные
правила действий.



Зачем нужны операции с векторами



Вектор помогает описывать перемещение, скорость и силу. Когда складывают или вычитают векторы, находят общий результат нескольких направленных действий и учатся работать и с рисунком, и с координатами в геометрии, и в физических задачах.

Как выглядит вектор на чертеже



Стрелка с смыслом

На рисунке вектор изображают стрелкой: начало показывает старт, а наконечник — направление. Длина стрелки соответствует модулю вектора, поэтому по чертежу можно сравнивать величины и замечать, как меняется результат при повороте.



Одинаковая длина — не всегда одинаковый вектор

Два вектора могут быть равны по длине, но смотреть в разные стороны. Для школьных задач важно различать сонаправленные, противоположно направленные и равные векторы, чтобы не перепутать их при построении и вычислениях.

Правила действий с векторами

Способ	Запись	Смысл	Пример
Треугольник	$a+b$	последовательно	путь
Параллелограмм	$a+b$	из одной точки	две силы
Противоположный	$a+(-b)$	вычитание	разность

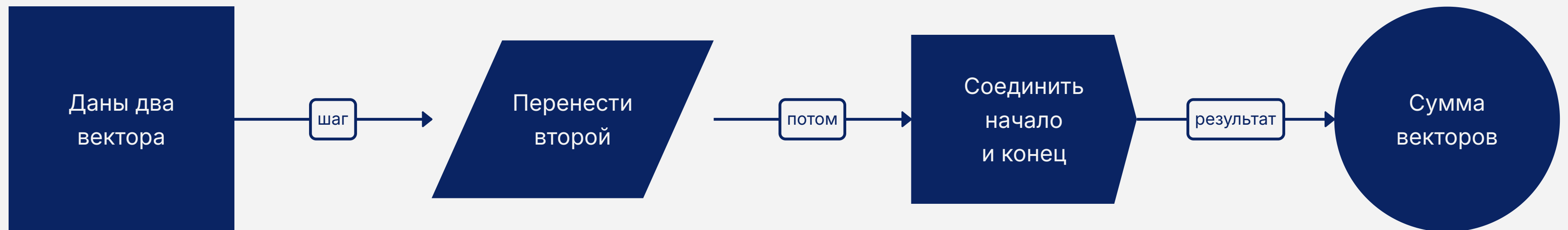
Сводка основных способов сложения и вычитания векторов в 8 классе.

Во всех случаях результат строится через направление, а при вычитании используется противоположный вектор.

Школьный курс геометрии 8 класса

Как складывают векторы по рисунку

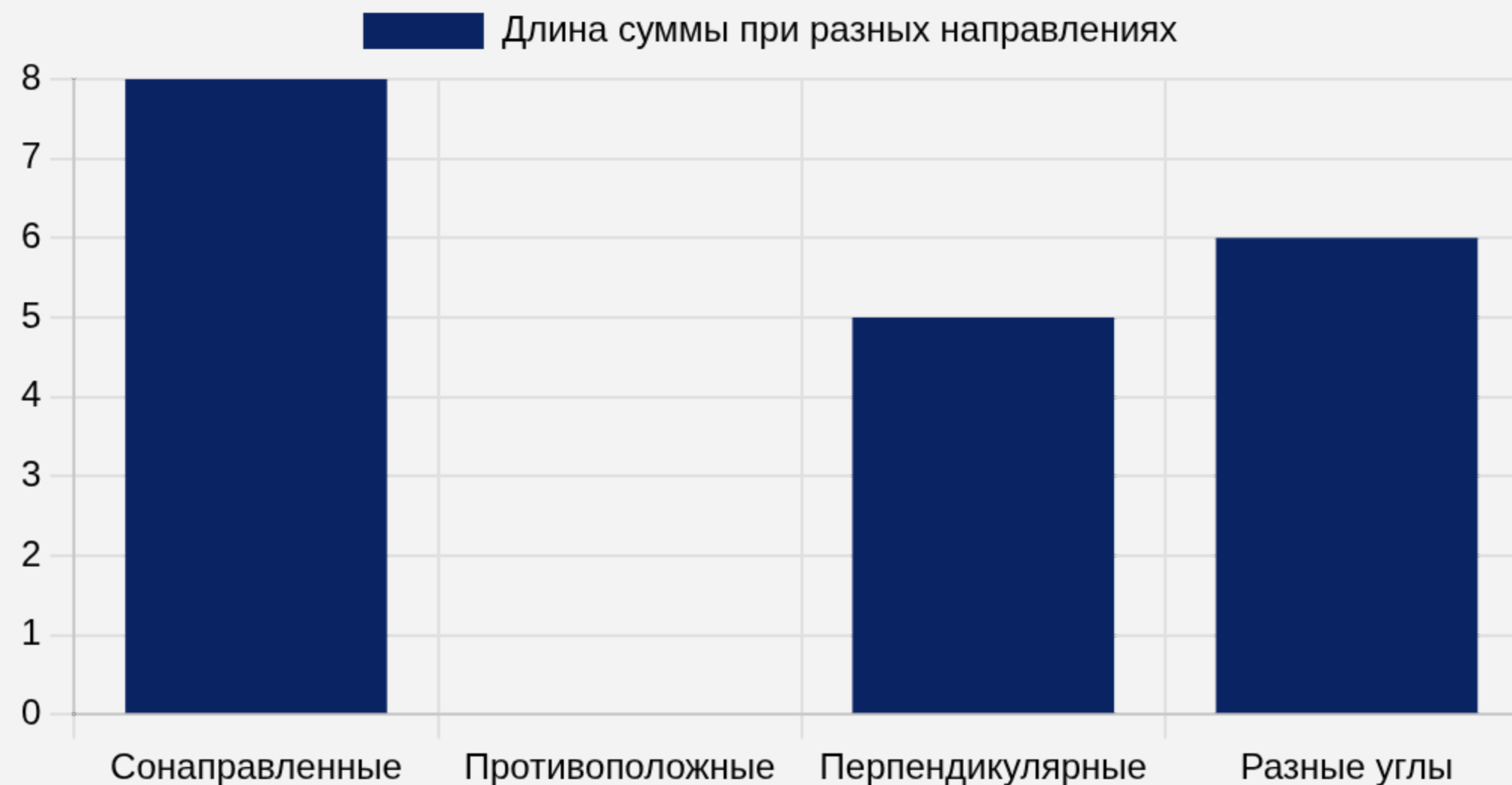
Построение суммы двумя последовательными шагами



Как направление влияет на результат сложения

Чем ближе направления векторов, тем сильнее их общий эффект на плоскости.

Совпадающие направления усиливают сумму, противоположные могут её обнулить, а перпендикулярные дают диагональный результат.



Школьная геометрия 8 класса

Правило треугольника



01. Первый вектор

Сначала изображают первый вектор как отрезок со стрелкой. Его начало и конец должны быть отмечены точно, потому что именно от них зависит правильное построение всей суммы.

02. Второй вектор

Затем второй вектор переносят параллельно самому себе так, чтобы его начало оказалось в конце первого. Длина и направление при переносе не меняются, поэтому сохраняется исходный смысл вектора.

03. Ответ на чертеже

Сумму показывают вектором, который соединяет начало первого вектора с концом перенесённого второго. Этот способ особенно удобен, когда действия идут одно за другим, например при последовательных перемещениях.

Правило параллелограмма



Общее начало

Оба вектора откладывают из одной точки как соседние стороны будущего параллелограмма. Так легко увидеть, как направления влияют друг на друга и какой будет общий результат.

Диагональ суммы

Диагональ, выходящая из общего начала, и есть сумма векторов. Она показывает итоговое направление и величину, когда два действия происходят одновременно, а не одно за другим.

Где это полезно

Правило особенно понятно в задачах на силы, движение и другие одновременные воздействия. Оно помогает представить не только ответ, но и причину, по которой он получается именно таким.

Сложение векторов по координатам

Отдельно по осям

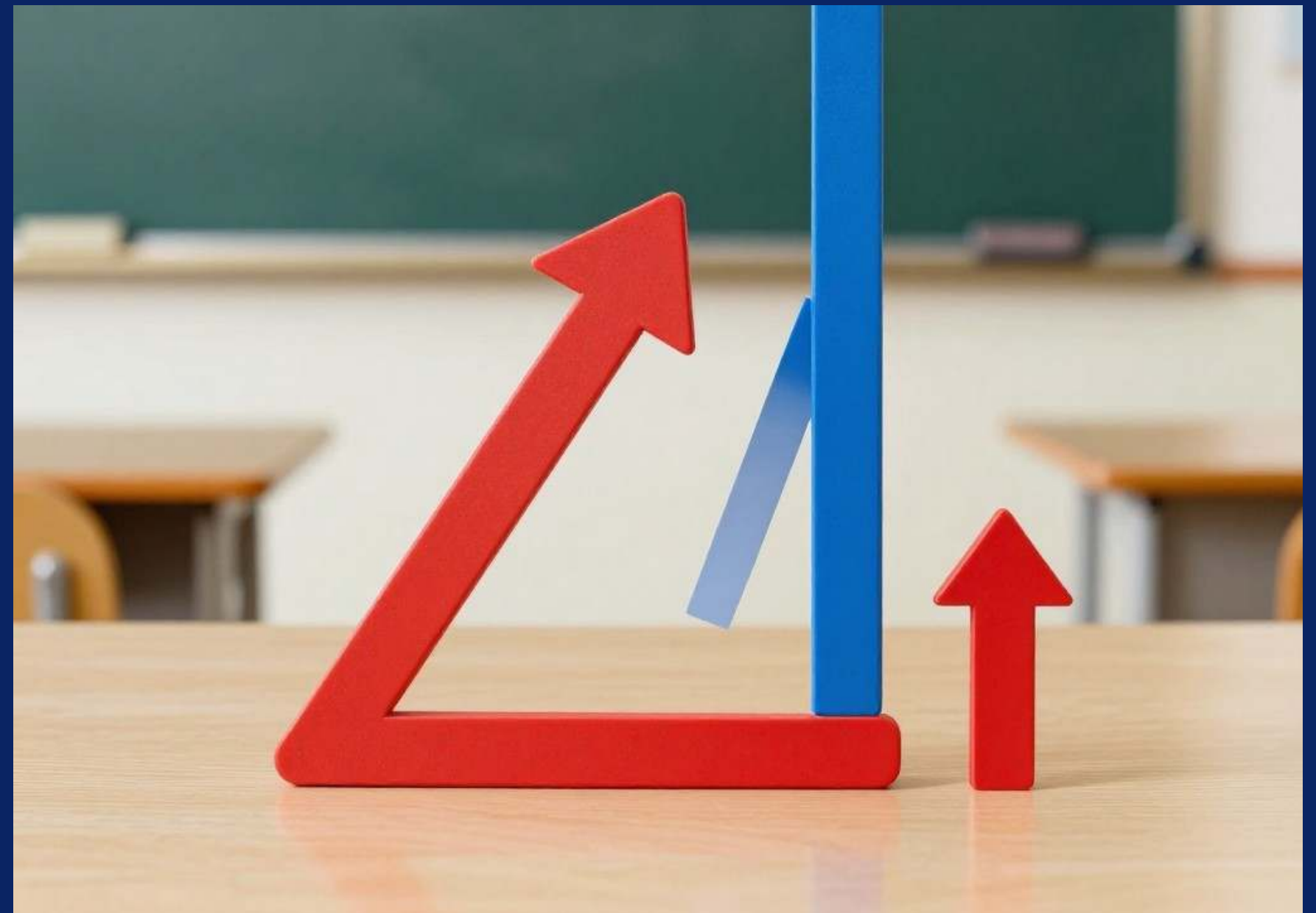
Если вектор задан координатами, складывают отдельно значения по оси x и по оси y . Каждая координата меняется независимо, поэтому вычисления получаются короткими и точными.

Формула сложения

Для векторов (a, b) и (c, d) сумма равна $(a + c, b + d)$. Это значит, что горизонтальное и вертикальное перемещения объединяются по одинаковому правилу.

Проверка результата

Координатный способ удобен для проверки построения без чертежа. Если ответ верный, его направление и длина согласуются с движением на координатной плоскости и с исходными данными.



Вычитание векторов как сложение противоположного

■ Сменить направление

Разность $a - b$ заменяют суммой $a + (-b)$. У противоположного вектора та же длина, но направление строго обратное, поэтому он помогает превратить вычитание в знакомое сложение.

■ Вычислить по координатам

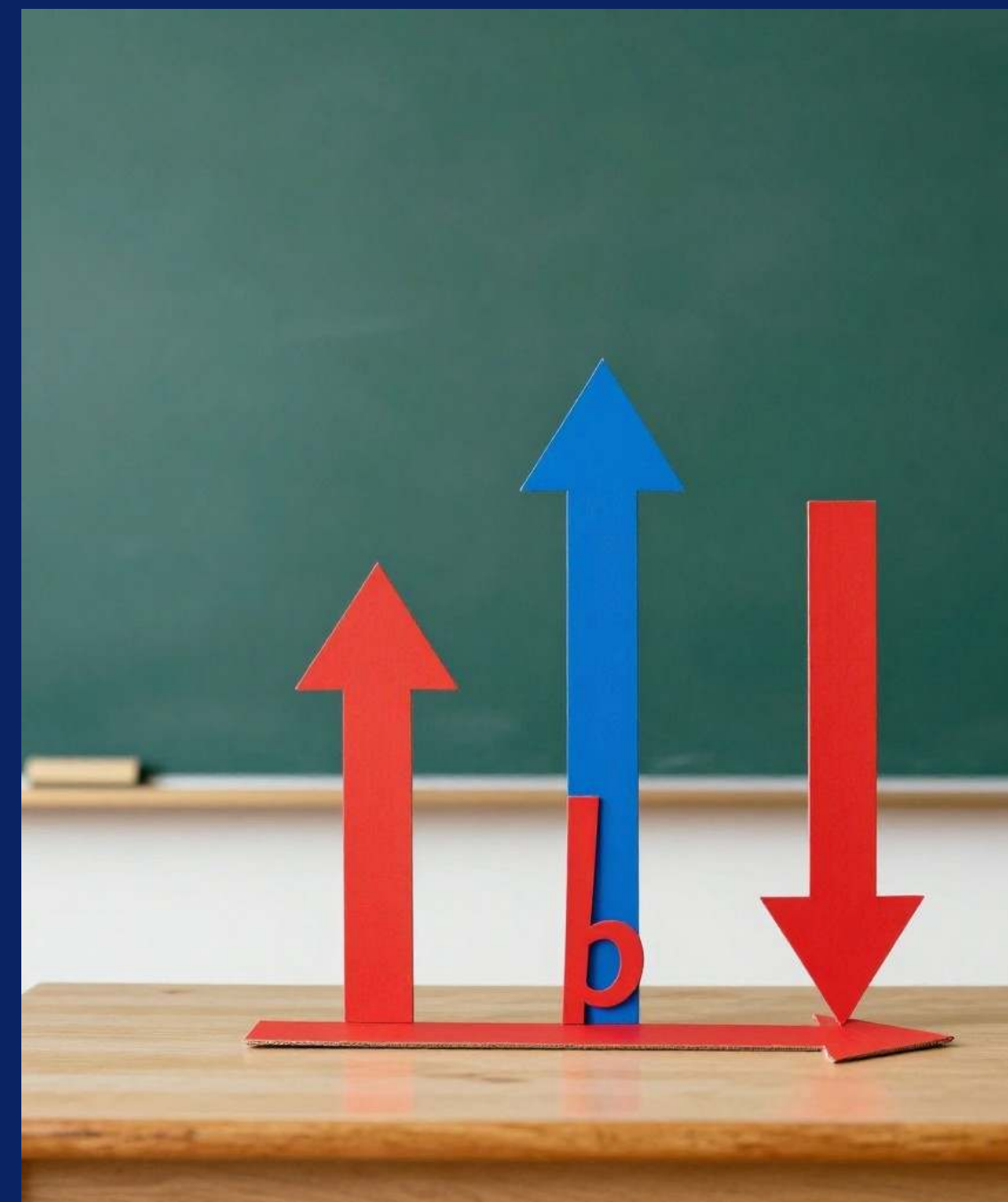
При координатном способе из каждой координаты первого вектора вычитают соответствующую координату второго: отдельно по x и отдельно по y . Порядок координат менять нельзя.

■ Построить сумму

После замены действуют теми же способами, что и при сложении: по правилу треугольника, по правилу параллелограмма или по координатам. Это упрощает решение геометрических задач.

■ Помнить смысл разности

Вычитание показывает, какой вектор нужно добавить, чтобы получить нужный результат. Поэтому знак минус в записи означает не исчезновение вектора, а изменение его направления.



Примеры операций с координатами векторов

Координаты складывают и вычитают по отдельности, поэтому результат удобно проверять по каждой оси.

Во всех примерах каждая координата меняется отдельно; это позволяет быстро вычислять и сверять ответ на плоскости.



Школьный курс геометрии 8 класса; примеры вычислений по координатам.

Типичные ошибки при работе с векторами

Таблица показывает, какие неточности чаще всего мешают получить верный результат при сложении и вычитании векторов.

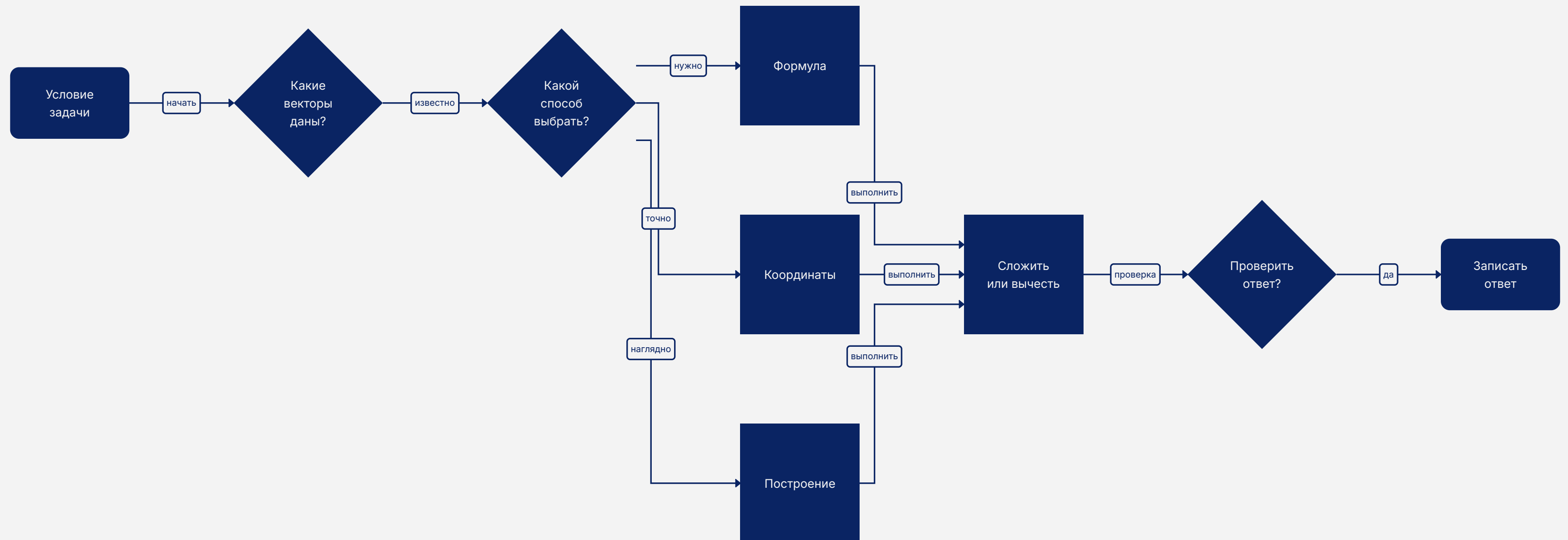
Главные источники ошибок связаны с направлением, порядком координат и переносом вектора; длину и знак нужно проверять каждый раз.

Ошибка	Причина	Верно
Складывают длины	Не учтено направление	Складывают векторы
Путают стрелку	Неверный конец	Сохраниают направление
Забывают координату	Пропущена ось	Берут обе координаты
Не берут $-b$	Путают вычитание	Прибавляют противоположный
Неверно переносят	Сдвиг без параллельности	Переносят точно

Школьные задачи по геометрии.

Порядок решения задачи с векторами

Школьный курс геометрии 8 класса: алгоритм для задач на сложение и вычитание векторов.



Где векторы встречаются в жизни и в задачах



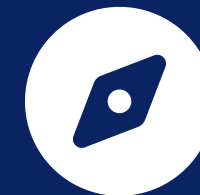
Перемещение

Векторы описывают путь и направление движения человека, автомобиля или корабля. В задачах важно не только расстояние, но и то, куда направлено движение.



Течение реки

Если лодка идёт по реке, её собственная скорость и скорость течения складываются как векторы. Так находят итоговое направление и скорость движения относительно берега.



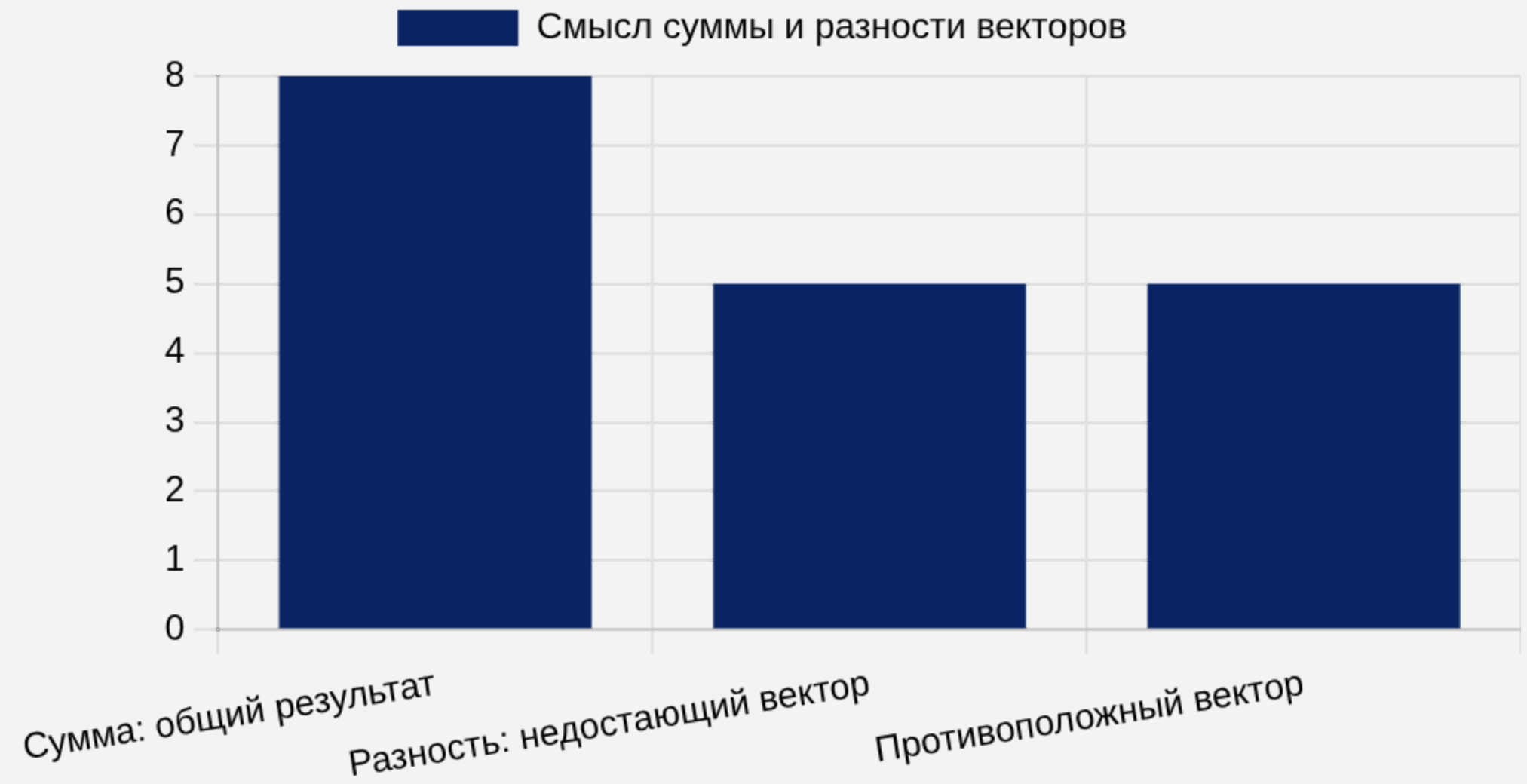
Навигация

В спорте и навигации направление часто не менее важно, чем величина. Поэтому векторные действия помогают точно рассчитывать маршрут, поворот и итоговое положение объекта.

Геометрический смысл суммы и разности

На рисунке видно, как меняется итог при смене направления одного из векторов.

Сумма показывает общий эффект, а разность помогает найти вектор-дополнение; оба действия тесно связаны между собой.



Школьный курс геометрии 8 класса; схематическое представление векторов.

Как проверяют правильность построения



01. Проверьте начало

Для суммы первый вектор и перенесённый второй должны быть соединены последовательно. Если начало и конец расположены иначе, построение выполнено неверно.

02. Сверьте направление

При вычитании используется противоположный вектор, поэтому стрелка меняет направление. После этого разность можно построить теми же правилами, что и сумму.

03. Сравните данные

Полезно проверить длины, координаты и углы между векторами. Такая сверка помогает заметить ошибку ещё до записи ответа и делает решение надёжным.

Сравнение способов решения задач с векторами

Способ	Когда применять	Сильная сторона	Результат
Построение	Наглядные задачи	Видно геометрию	Чертёж
Координаты	Точные вычисления	Удобно считать	Пара чисел
Противоположный вектор	Вычитание	Сводит к сложению	Новый вектор

Таблица показывает, чем различаются основные способы решения и когда каждый из них удобнее применять.

Выбор способа зависит от условия, но при верных действиях все методы приводят к одному и тому же ответу.

Школьный курс геометрии 8 класса.

Мини-задачи для закрепления правил

Сонаправленные векторы

Если два вектора направлены одинаково и имеют длины 3 см и 5 см, их сумма равна 8 см. Здесь длины складываются без изменения направления.

Противоположные направления

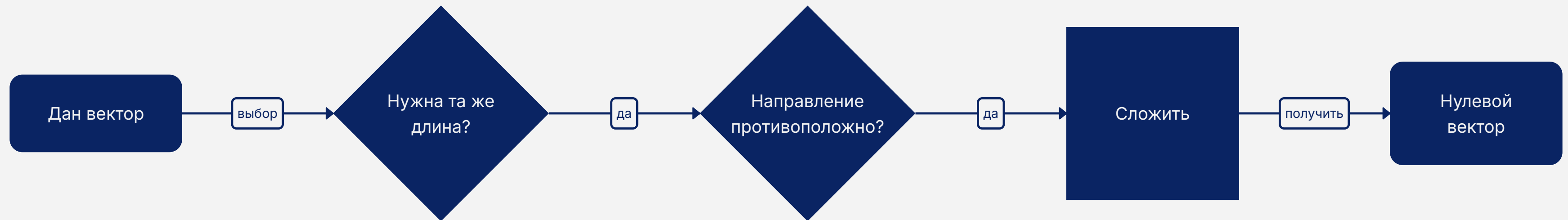
Векторы длиной 4 см и 4 см, направленные в разные стороны, дают нулевой вектор. Они полностью компенсируют друг друга и взаимно уничтожают результат.

Сложение по координатам

Для векторов $(1, 2)$ и $(-3, 1)$ получаем $(-2, 3)$. Каждая координата изменяется отдельно, поэтому ответ легко проверить на координатной плоскости.

Когда сумма векторов равна нулю

Школьный курс геометрии 8 класса: случай взаимной компенсации двух векторов.



Главные выводы о векторах

Сложение и вычитание векторов позволяют точно описывать направление и результат действия. Правило треугольника, параллелограмма и координатный способ помогают решать задачи удобно и без лишних ошибок.