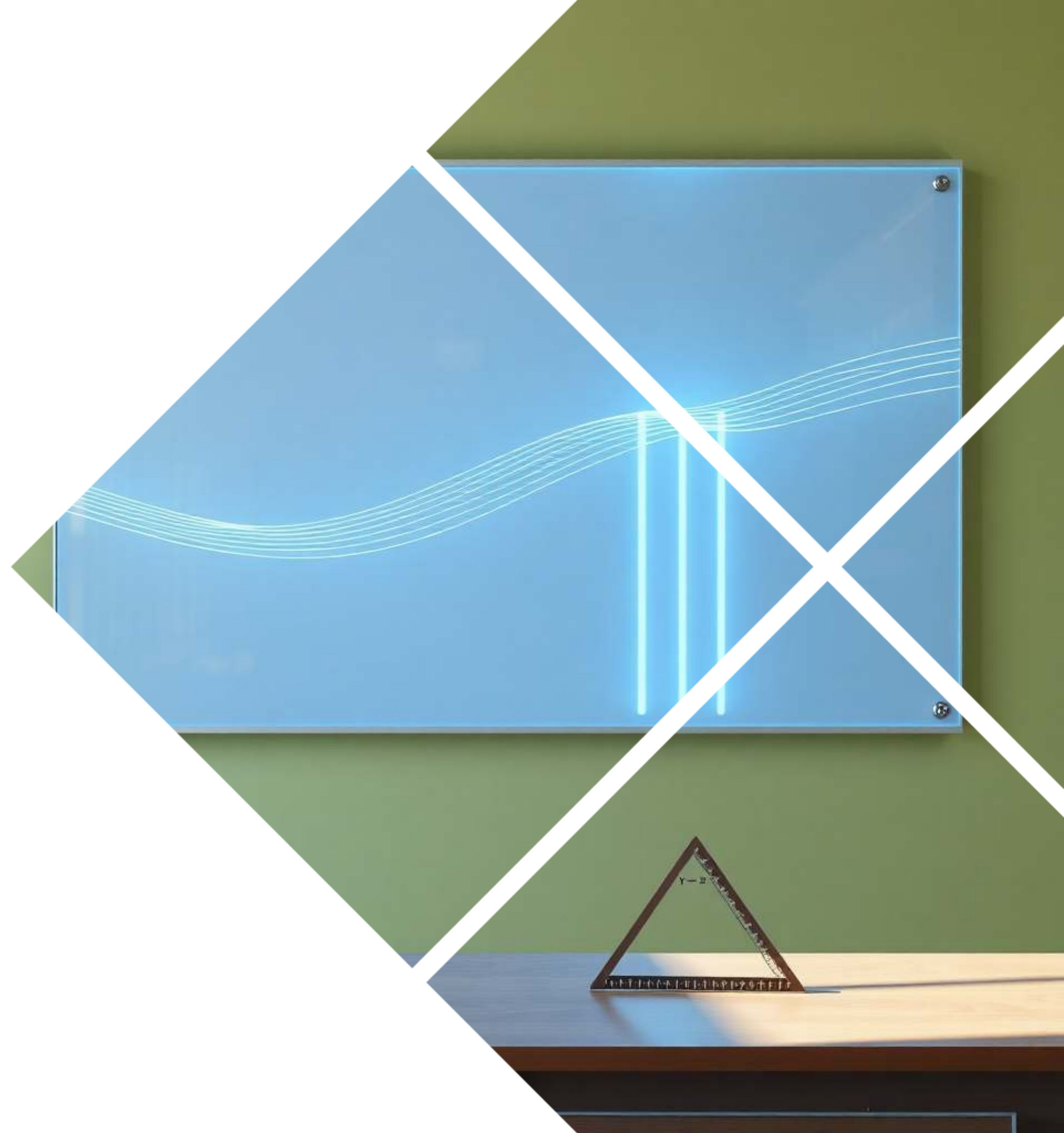


Функция $y = \operatorname{tg} x$ Х: свойства и график

Основные свойства тангенса и его график
в одной теме.



Тангенс: связь формулы и графика

Тангенс связывает тригонометрию, геометрию треугольника и анализ графиков: через него удобно изучать углы, наклоны, периодичность и разрывы функции на координатной плоскости.



Определение функции $y = \operatorname{tg} x$

01

Формула тангенса

Тангенс определяют как отношение синуса к косинусу: $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$. Эта запись показывает, что функция зависит от значений обеих тригонометрических функций.

02

Условие существования

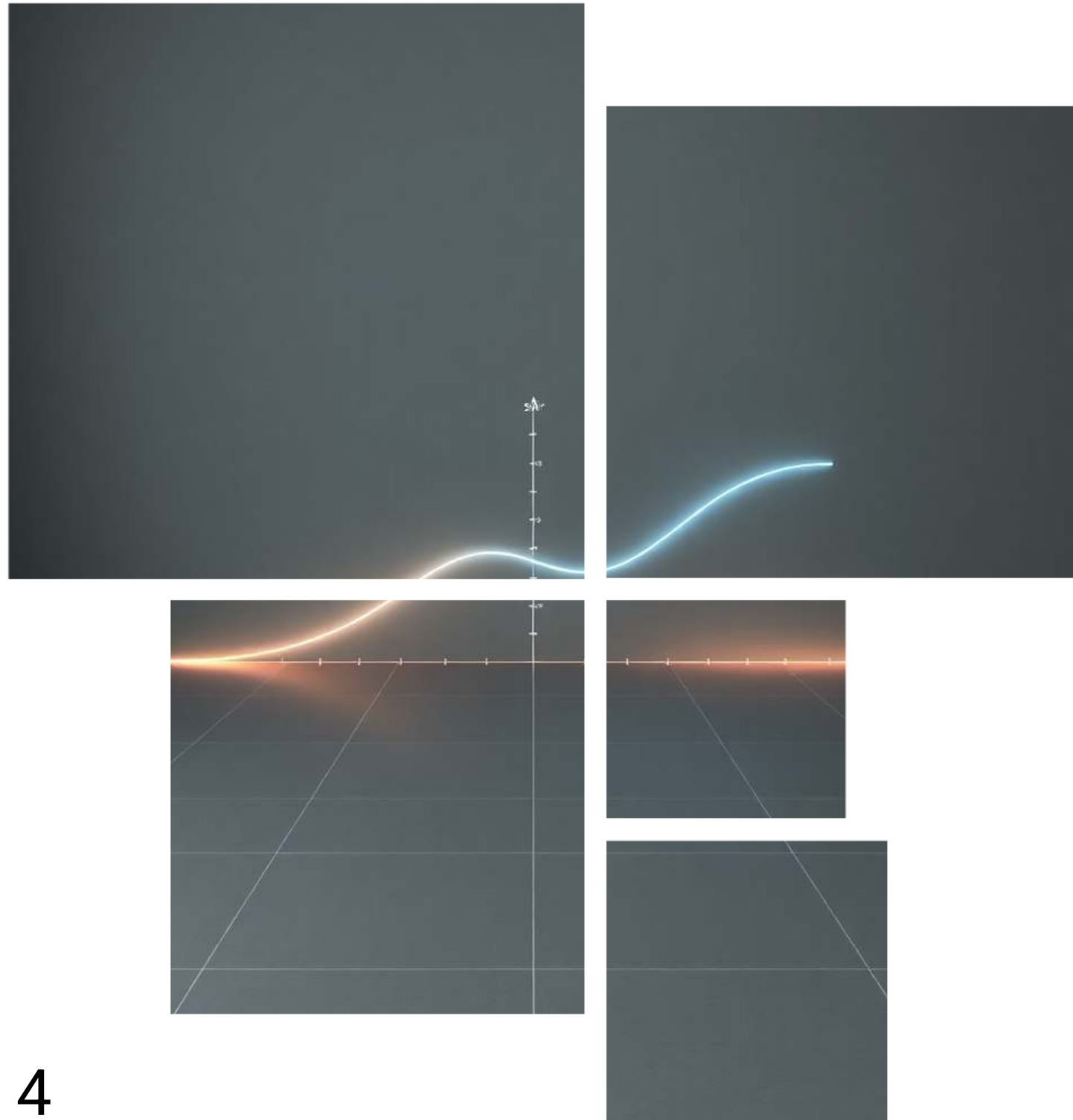
Функция имеет смысл только там, где $\cos x$ не равен нулю. Если знаменатель обращается в нуль, отношение не определено, поэтому появляются запрещённые точки области определения.

03

Нечётность функции

Тангенс является нечётной функцией: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$. Это означает, что график сохраняет центральную симметрию относительно начала координат и удобно достраивается по одной ветви.

Область определения функции



■ Запрещённые значения

Тангенс не определён при $x = \pi/2 + \pi k$, где k — целое число. Именно в этих точках косинус равен нулю, а деление на нуль невозможно.

■ Структура разрывов

В каждой такой точке график не соединяется, а разрывается. Эти разрывы относятся ко второму роду и отделяют соседние ветви функции друг от друга.

■ Вертикальные асимптоты

К запрещённым значениям график бесконечно приближается, но не пересекает их. Поэтому прямые $x = \pi/2 + \pi k$ являются вертикальными асимптотами тангенса.

Область значений и неограниченность

01

Все действительные числа

Каждая ветвь графика проходит через непрерывный набор значений от минус бесконечности до плюс бесконечности. Поэтому область значений функции $y = \operatorname{tg} x$ совпадает со множеством $\mathbb{R}$.

02

Нет верхней границы

При приближении к правой асимптоте значения тангенса возрастают без ограничения. Следовательно, функция не имеет наибольшего значения и не ограничена сверху.

03

Нет нижней границы

У левой асимптоты значения убывают до минус бесконечности, поэтому функция не ограничена снизу. Это резко отличает тангенс от $\sin x$ и $\cos x$.

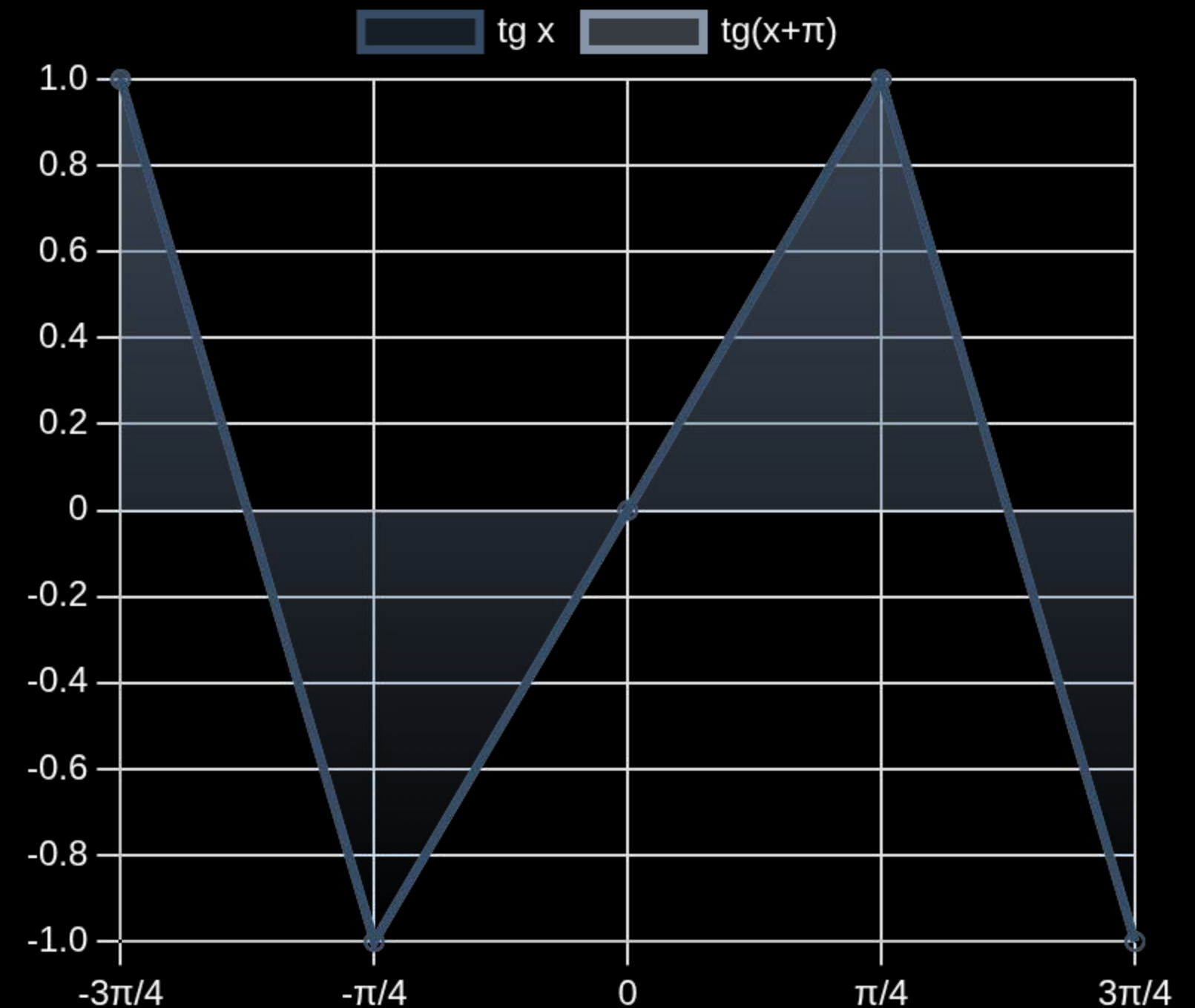


Периодичность функции $\operatorname{tg} x$

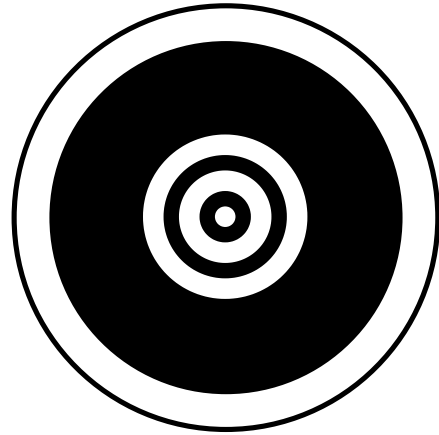
Одинаковые значения на сдвинутых участках показывают, что форма ветвей повторяется через π по оси x .

Совпадение двух рядов подтверждает период π : после сдвига на π график полностью воспроизводит сам себя.

Табличные значения, рассчитанные по тождеству $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$

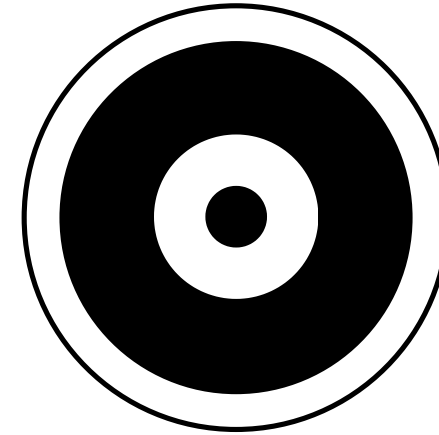


Нули функции



Условие нуля

Нули находятся из уравнения $\operatorname{tg} x = 0$. Это возможно тогда и только тогда, когда синус равен нулю, а косинус не обращается в нуль.



Точки на оси Ox

Все нули имеют вид $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. На графике они лежат на оси Ox и служат удобными опорными точками при построении ветвей.



По одному на ветвь

Каждый промежуток между соседними асимптотами содержит ровно один нуль. Поэтому, зная границы ветви, легко проверить правильность её расположения и формы.

Знак функции на промежутках

01

Положительные участки

На промежутке $(\pi k; \pi/2 + \pi k)$ тангенс положителен. Здесь числитель и знаменатель в формуле $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$ имеют одинаковый знак.

02

Отрицательные участки

На промежутке $(-\pi/2 + \pi k; \pi k)$ функция отрицательна. Знак меняется из-за противоположных знаков синуса и косинуса в соответствующих четвертях окружности.

03

Практический вывод

Знание знака помогает быстро определить положение ветви относительно оси Ox : выше оси располагаются положительные значения, ниже — отрицательные, без дополнительного вычисления.

Чётность и симметрия графика

- **Нечётность**

Для тангенса выполняется $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$. Значит, значение функции при противоположном аргументе меняет знак, а сам график сохраняет центральную симметрию.

- **Парные точки**

Если точка $(a, \operatorname{tg} a)$ лежит на графике, то вместе с ней обязательно существует точка $(-a, -\operatorname{tg} a)$. Это удобно при проверке построения и вычислений.

- **Достройка графика**

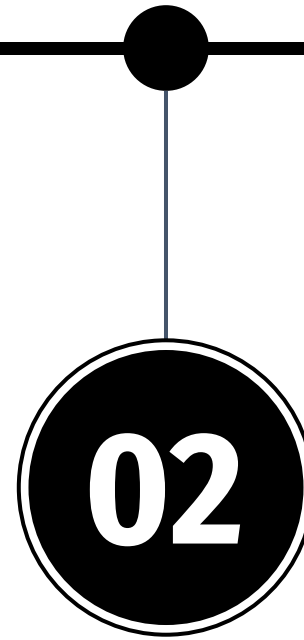
По одной правой или левой ветви можно восстановить остальную часть рисунка. Достаточно отразить уже найденные точки относительно начала координат и сохранить форму ветви.

Монотонность функции



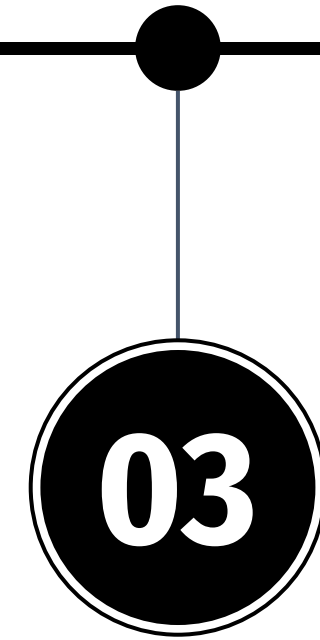
Левая граница ветви

При приближении к точке $x = (-\pi/2 + \pi k) +$ значения тангенса стремятся к минус бесконечности. Это задаёт начало каждой ветви на промежутке определения.



Внутренний рост

На промежутке $(-\pi/2 + \pi k; \pi/2 + \pi k)$ функция строго возрастает. По мере увеличения x значения тангенса непрерывно поднимаются без остановок и поворотов.



Правая граница ветви

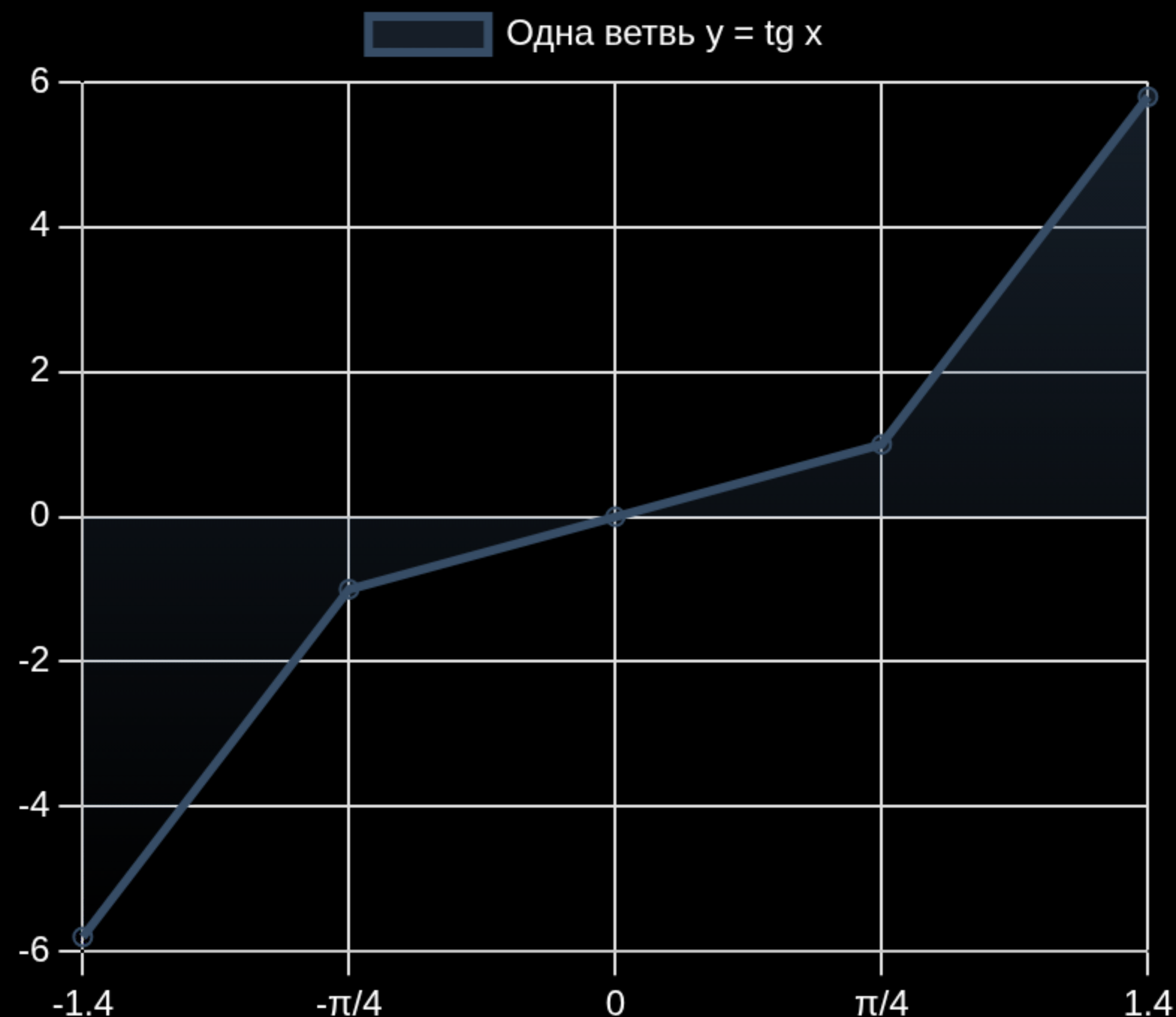
При $x \rightarrow (\pi/2 + \pi k) -$ функция стремится к плюс бесконечности. Поэтому на каждой ветви нет локальных максимумов и минимумов, а рост остаётся непрерывным.

Одна ветвь графика $y = \operatorname{tg} x$

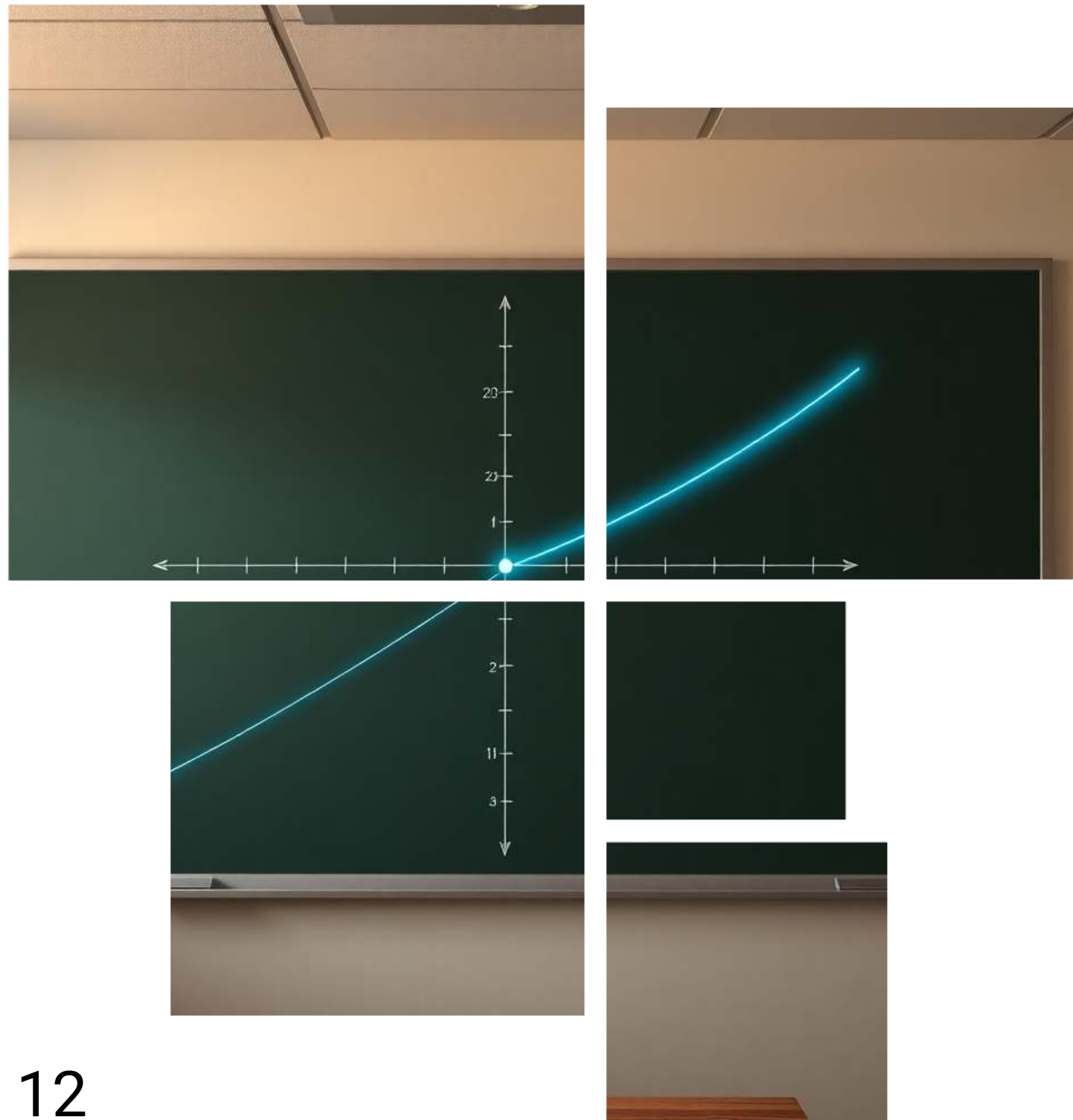
На одной ветви особенно заметны точки-ориентиры, по которым удобно восстанавливать форму всего графика и проверять правильность построения.

Ветвь проходит через начало координат, строго возрастает и стремится к бесконечности у асимптот, что подтверждает её S-образный характер.

Школьный курс алгебры и тригонометрии;
теоретический график функции $y = \operatorname{tg} x$



Основные элементы графика тангенса



■ Оси и опорные точки

Координатные оси помогают быстро считывать значения функции, а точки $(-\pi, 0)$, $(0,0)$ и $(\pi, 0)$ показывают, где тангенс обращается в нуль и повторяет свой рисунок.

■ Вертикальные асимптоты

Прямые $x = \pi/2 + \pi k$ отмечают положения, где функция не определена. График лишь приближается к ним, но не пересекает их, образуя разрывы.

■ Повторяемость ветвей

Каждая ветвь имеет одинаковую форму и возникает через промежуток π . Это делает график легко узнаваемым и позволяет строить его по одной удачно выбранной части.

■ Ориентиры для чтения

Подписи к точкам и асимптотам фиксируют главные ориентиры: где искать нули, как меняется знак функции и в каких местах ветвь быстро уходит вверх или вниз.

Сводная таблица свойств функции $y = \operatorname{tg} x$

Краткая таблица помогает увидеть главные свойства функции в одном месте и быстро связать их с особенностями её графика.

Тангенс сочетает простую периодическую структуру с разрывами в особых точках, поэтому его график легко описать, но важно учитывать исключения из области определения.

Свойство	Характеристика
Область определения	$x \neq \pi/2 + \pi k$
Область значений	$\mathbb{R}$
Период	π
Чётность	нечётная

Теоретические свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ из школьного курса алгебры

Построение графика тангенса

1. Нанести асимптоты

Сначала отмечают прямые $x = \pi/2 + \pi k$. Они задают границы ветвей и сразу показывают, где функция не определена.

2. Отметить нули

Затем находят точки $x = \pi k$, где $\operatorname{tg} x = 0$. Эти пересечения с осью Ox служат основой для точного построения.

3. Добавить опорные точки

После этого отмечают значения $\operatorname{tg}(-\pi/4) = -1$ и $\operatorname{tg}(\pi/4) = 1$. Они задают форму ветви и помогают сохранить правильный наклон.

4. Соединить плавной кривой

В конце проводят строго возрастающую ветвь между асимптотами и повторяют её через период π , сохраняя симметрию и характерный вид графика.

Порядок исследования функции $y = \operatorname{tg} x$

Последовательность анализа функции и её графика в школьном курсе алгебры.

Сравнение с функциями $\sin x$ и $\cos x$

01

Область определения

Синус и косинус определены при всех действительных значениях аргумента, а тангенс исключает точки $x = \pi/2 + \pi k$. Поэтому его график содержит разрывы, которых нет у двух других функций.

02

Ограниченность

Значения $\sin x$ и $\cos x$ всегда лежат в пределах от -1 до 1 , тогда как $\operatorname{tg} x$ не ограничен ни сверху, ни снизу. Это делает его ветви значительно длиннее по вертикали.

03

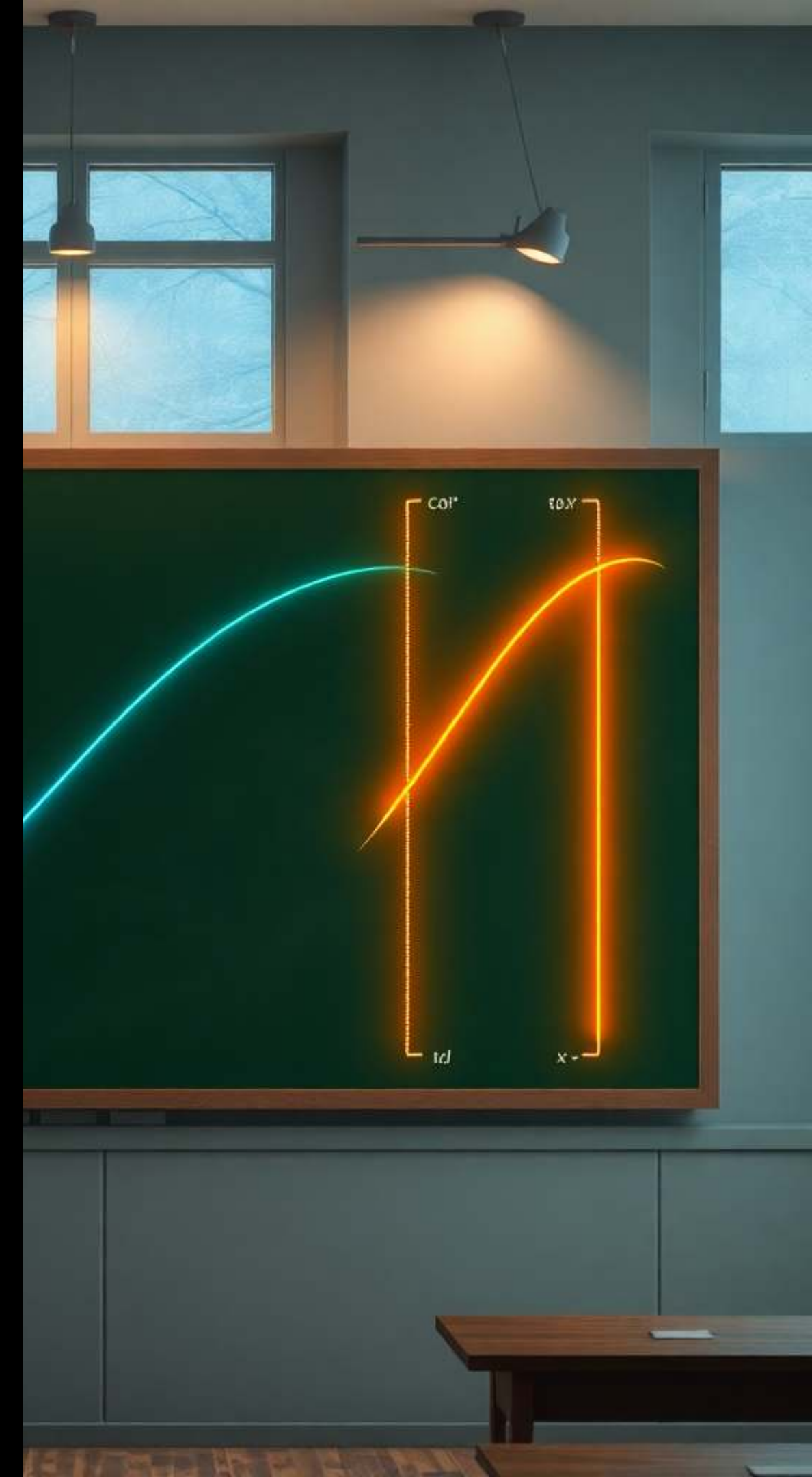
Период

Периоды синуса и косинуса равны 2π , а период тангенса — π . Из-за этого одинаковые фрагменты графика $\operatorname{tg} x$ повторяются чаще и выглядят более компактно.

04

Внешний вид графика

График тангенса разрежен сильнее и состоит из отдельных ветвей, разделённых асимптотами. У $\sin x$ и $\cos x$ линия непрерывна, поэтому они выглядят плавнее и проще.

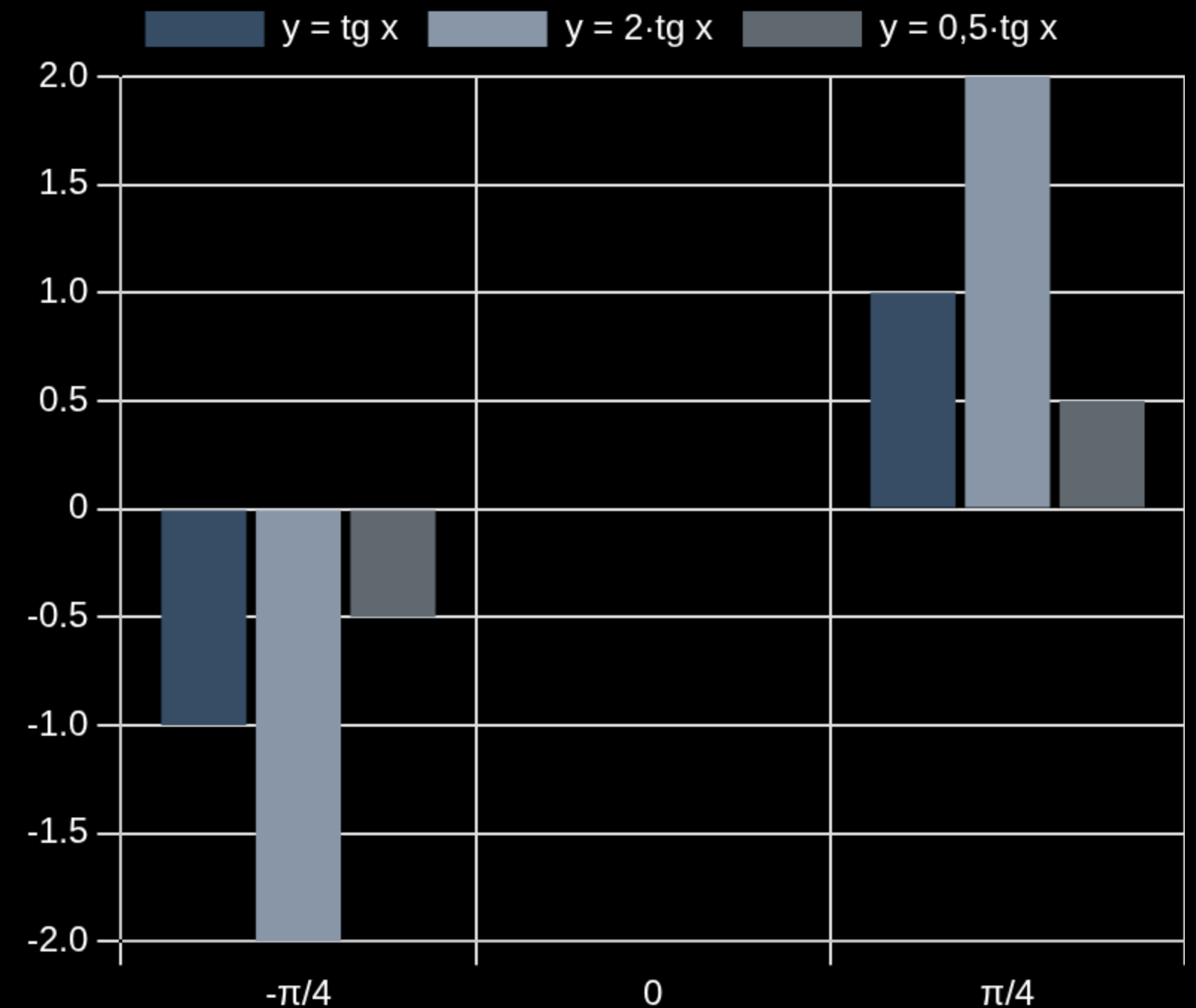


Преобразования графика $y = \operatorname{tg} x$

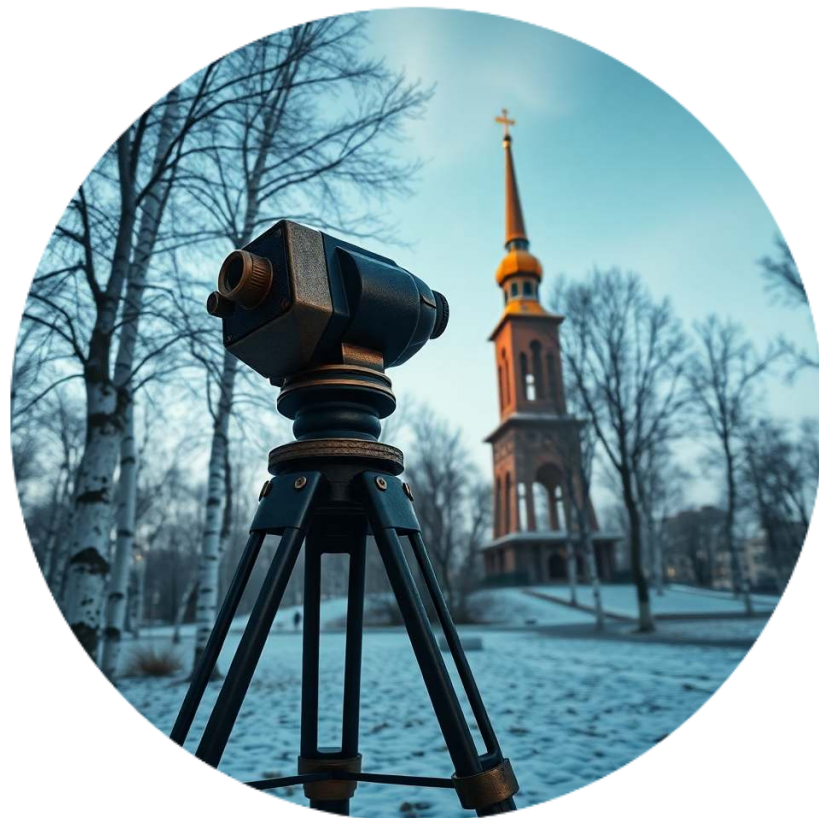
При умножении на коэффициент меняется только вертикальный масштаб: значения растут или уменьшаются, а нули остаются на прежних местах.

Трансформации сохраняют общую структуру тангенса, но меняют крутизну ветвей; чем больше коэффициент, тем быстрее график уходит от оси Ox .

Теоретические преобразования функции $y = k \cdot \operatorname{tg} x$ в школьной алгебре



Применение тангенса в задачах



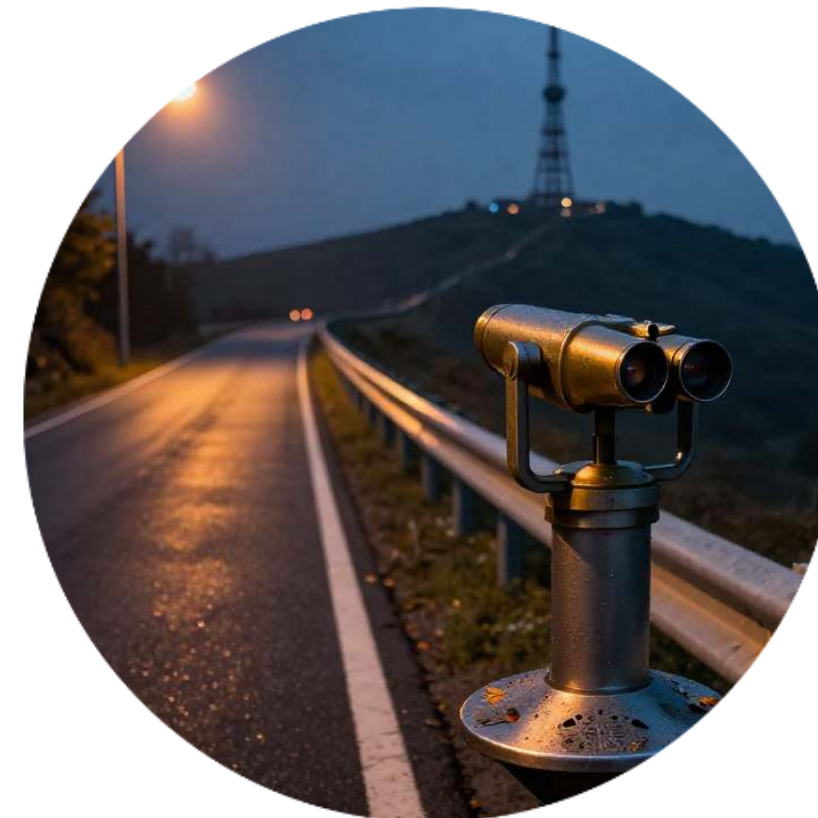
Высота недоступного объекта

Если измерен угол подъёма к вершине дерева, здания или башни, тангенс позволяет связать этот угол с расстоянием до объекта и его высотой. Такой приём часто используют в геометрических задачах и практических измерениях.



Уклон и наклон поверхности

Тангенс удобен при описании наклона дороги, крыши или лестницы, когда нужно сравнить вертикальное и горизонтальное изменение. Формула помогает перевести геометрическую ситуацию в вычисления с числами.



Угол обзора и расстояние

В задачах на наблюдение тангенс используют для определения расстояния до недоступной точки, если известны угол и одна сторона. Это позволяет решать прикладные задачи без непосредственного измерения всей фигуры.

Типичные ошибки при работе с графиком



Тангенс: коротко о главном

Функция $y = \operatorname{tg} x$ нечетна, периодична с периодом π и не определена в точках $x = \pi/2 + \pi k$. Её график состоит из возрастающих ветвей и наглядно показывает связь формулы с геометрией.