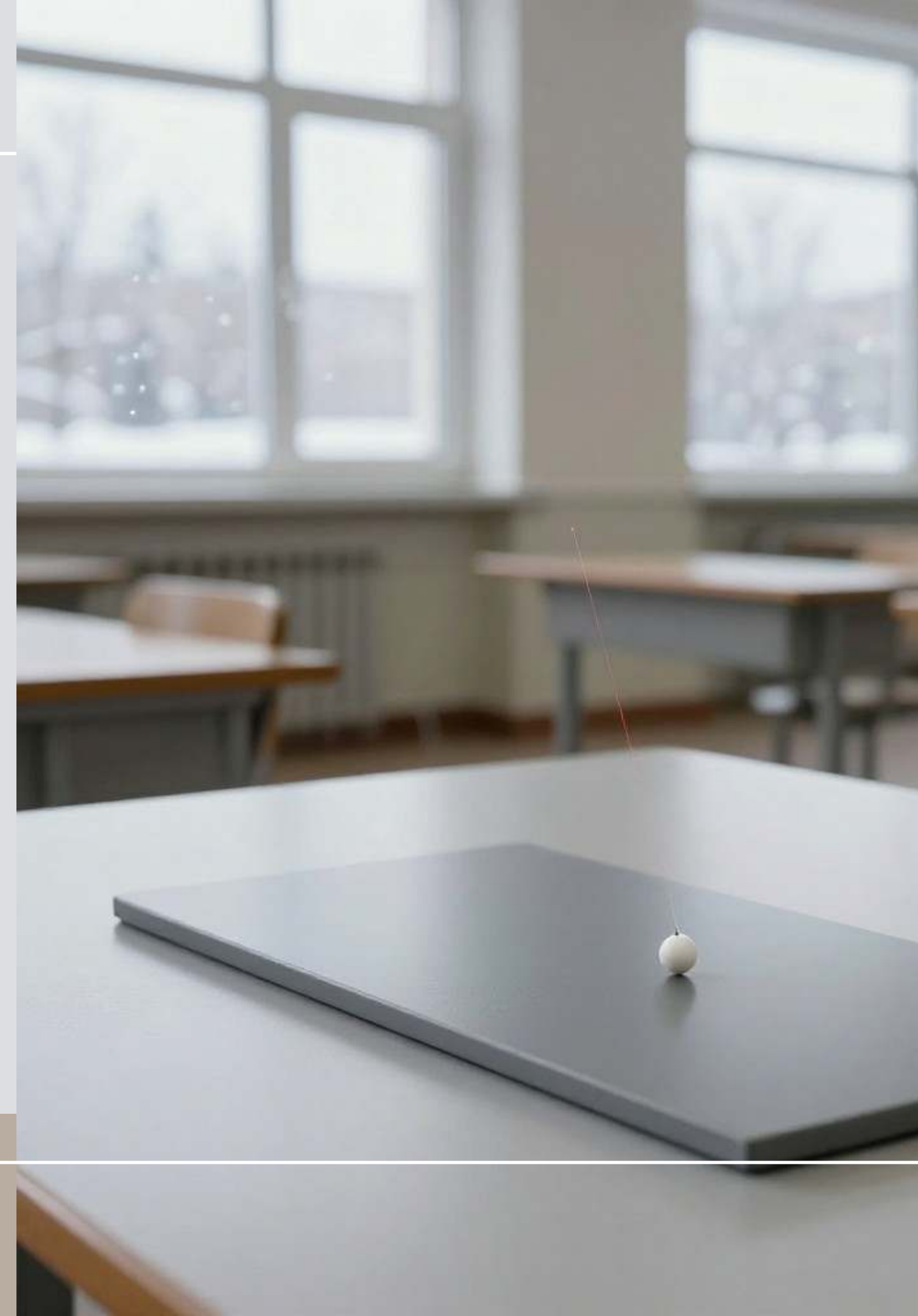


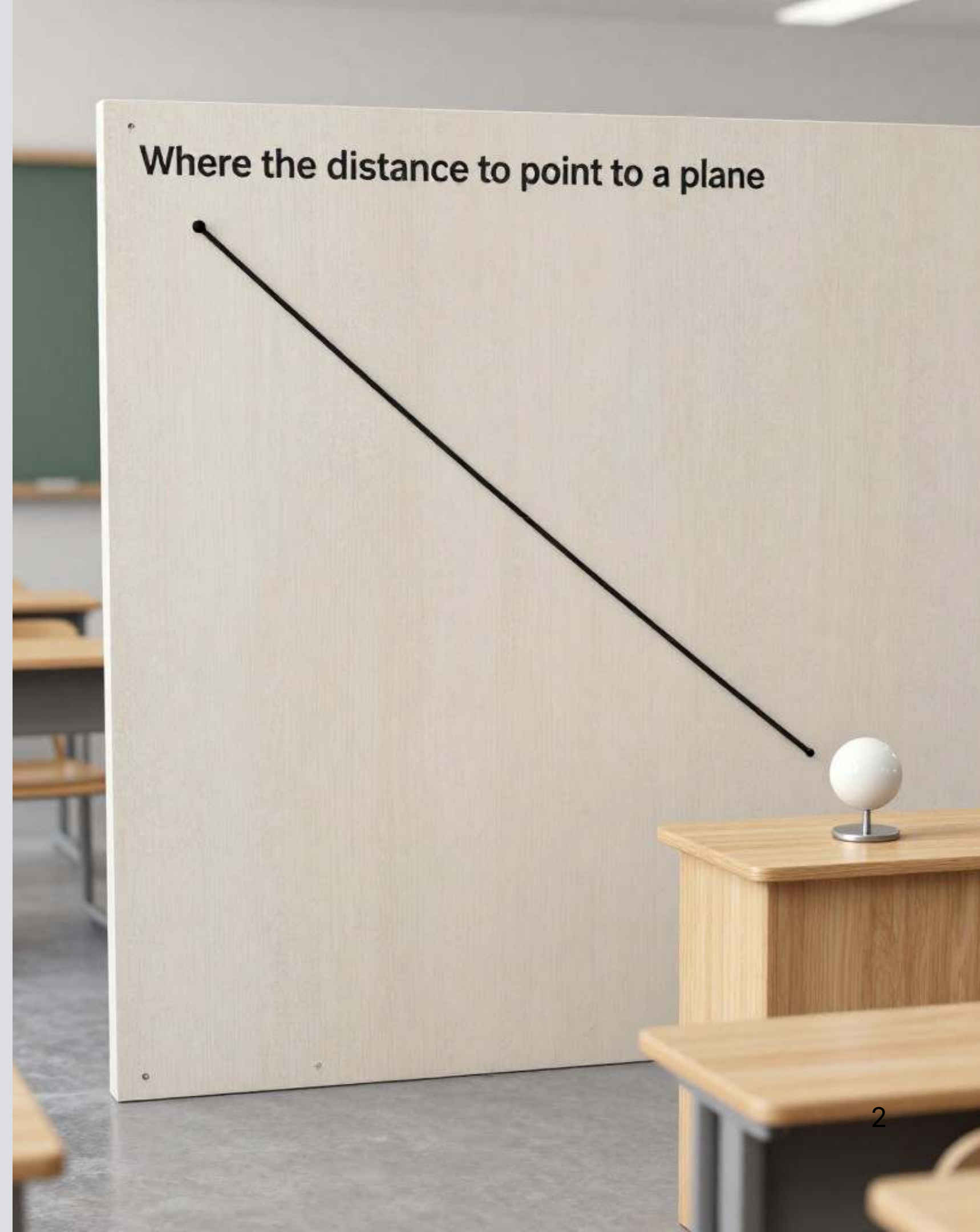
Расстояние от точки до плоскости

Кратчайший путь в пространстве: перпендикуляр от точки к плоскости и способы его вычисления.



Где встречается расстояние до плоскости

Понятие появляется в стереометрии, когда изучают перпендикулярность и проекции, а затем применяют их к многогранникам, пирамидам, призмам и координатной геометрии. В ЕГЭ оно помогает находить высоты, диагонали и расстояния между элементами фигур.



Определение расстояния от точки до плоскости

1

Расстояние от точки до плоскости равно длине отрезка перпендикуляра, опущенного из точки на эту плоскость. Такой отрезок заканчивается в точке основания перпендикуляра.

2

Если заданная точка лежит на плоскости, перпендикуляр имеет нулевую длину, поэтому расстояние равно 0. Это согласуется с интуицией: кратчайший путь начинается прямо на плоскости.

3

Если точка не принадлежит плоскости, то среди всех отрезков, соединяющих её с плоскостью, минимальную длину даёт именно перпендикуляр. Наклонные отрезки всегда оказываются длиннее.

Почему именно перпендикуляр даёт минимальную длину

1

Любой наклонный отрезок от точки к плоскости длиннее перпендикуляра. Иными словами, прямой угол «сжимает» путь: как только угол у основания не прямой, длина увеличивается.

2

Основание перпендикуляра называют ортогональной проекцией точки на плоскость. Эта проекция фиксирует «самый близкий» пункт на плоскости относительно данной точки.

3

Рассматривают прямоугольный треугольник, образованный перпендикуляром и проекцией, и убеждаются: гипотенуза (наклонная) больше катетов. Значит, катет-перпендикуляр и есть искомое расстояние.

4

Именно этот принцип используется в решениях: как только мы сводим задачу к прямоугольному треугольнику, расстояние оказывается измеряемым по перпендикуляру, а не по произвольному наклонному отрезку.

sin

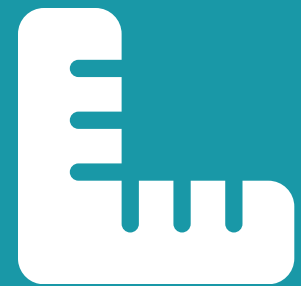
Через синус угла вертикальная составляющая выражается длиной наклонной и тем самым даёт расстояние до плоскости.

При наличии наклонной треугольник становится прямоугольным, и расстояние извлекают из связи между наклонной, проекцией и высотой, используя синус.

Общий алгоритм нахождения расстояния

Дано: точка и плоскость; выбираем способ, строим перпендикуляр или используем формулу.

Геометрический способ решения задач



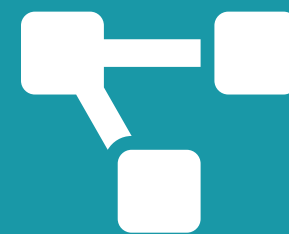
Перпендикуляр и прямоугольный треугольник

Сначала находим основание перпендикуляра на плоскость и строим прямоугольный треугольник в пространстве. Дальше расстояние совпадает с одним из катетов, остальное помогает связать длины.



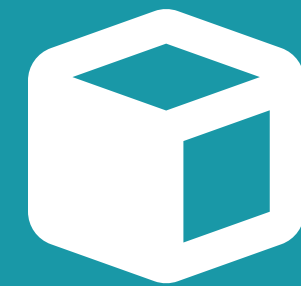
Теорема Пифагора в нужном треугольнике

Когда в чертеже появляются перпендикуляр и проекция, удобно применять Пифагора. Он связывает гипотенузу с катетами и позволяет выразить длину перпендикуляра как расстояние.



Проекции и подобие

Если треугольники получаются подобными, можно перенести отношение длин. Тогда расстояние от точки до плоскости находится через известные элементы чертежа без лишних вычислений.



Удобно для куба, призмы и пирамиды

В многогранниках высота часто «выдерживает» структуру проекций. Поэтому геометрический метод особенно нагляден: по чертежу быстро выбираются перпендикуляры и нужные углы.

Основные способы нахождения расстояния

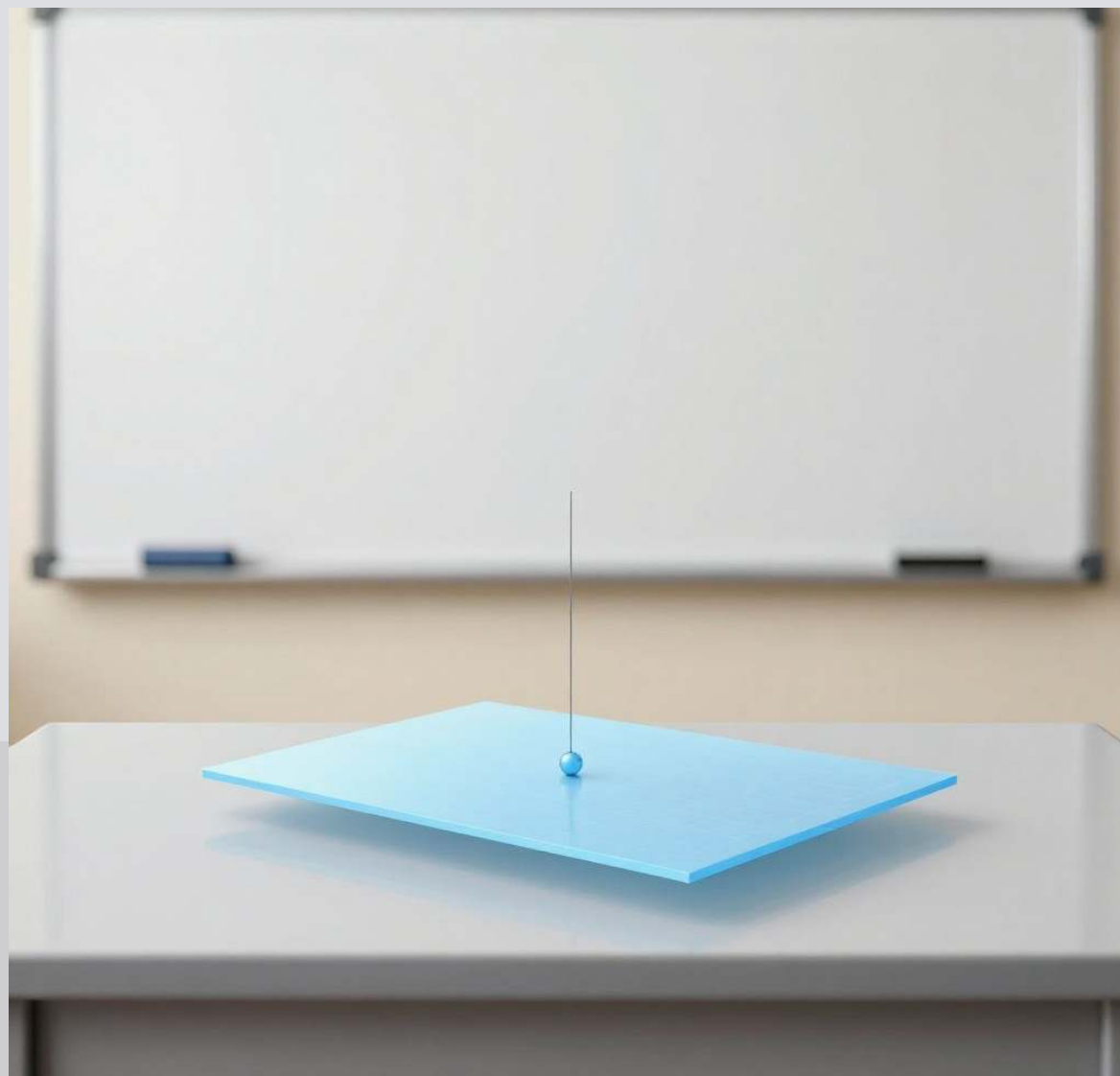
Способ	Формула/идея	Типичные условия
Геометрический	перпендикуляр → прямоугольный треугольник	есть чертёж и проекции
Через объём	$h = 3V/S_{\text{осн}}$	известны V и $S_{\text{осн}}$
Координатный	по уравнению плоскости	даны A, B, C, D и M
Для правильных многогранников	симметрия, равенство рёбер	есть структура правильности

Три универсальных подхода и один важный набор частных случаев: выбирайте метод под данные задачи.

Выбор способа определяется тем, что уже известно в условии: чертёж, площади/объём или уравнение плоскости.

Содержание учебного курса 11 класса по стереометрии и аналитической геометрии.

Перпендикуляр, плоскость и проекция на чертеже



Что именно показано на рисунке

На схеме одновременно изображают точку, плоскость и перпендикуляр, проведённый из точки к плоскости. Основание этого перпендикуляра отмечают отдельно, а также показывают наклонную, чтобы сравнить длины.

Как не перепутать элементы

Важно различать три сущности: саму плоскость, отрезок перпендикуляра и проекцию точки. Проекция — это не плоскость и не перпендикуляр, а точка основания, с которой начинается прямоугольный треугольник для вычислений.

Координатная формула расстояния

1

Если плоскость задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, а точка M имеет координаты (x_0, y_0, z_0) , расстояние до плоскости вычисляют по формуле: $|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D| / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

2

Числитель получают подстановкой координат точки в уравнение плоскости: он показывает «величину отклонения» точки от плоскости по направлению нормали. Знаменатель соответствует длине нормального вектора (A, B, C) .

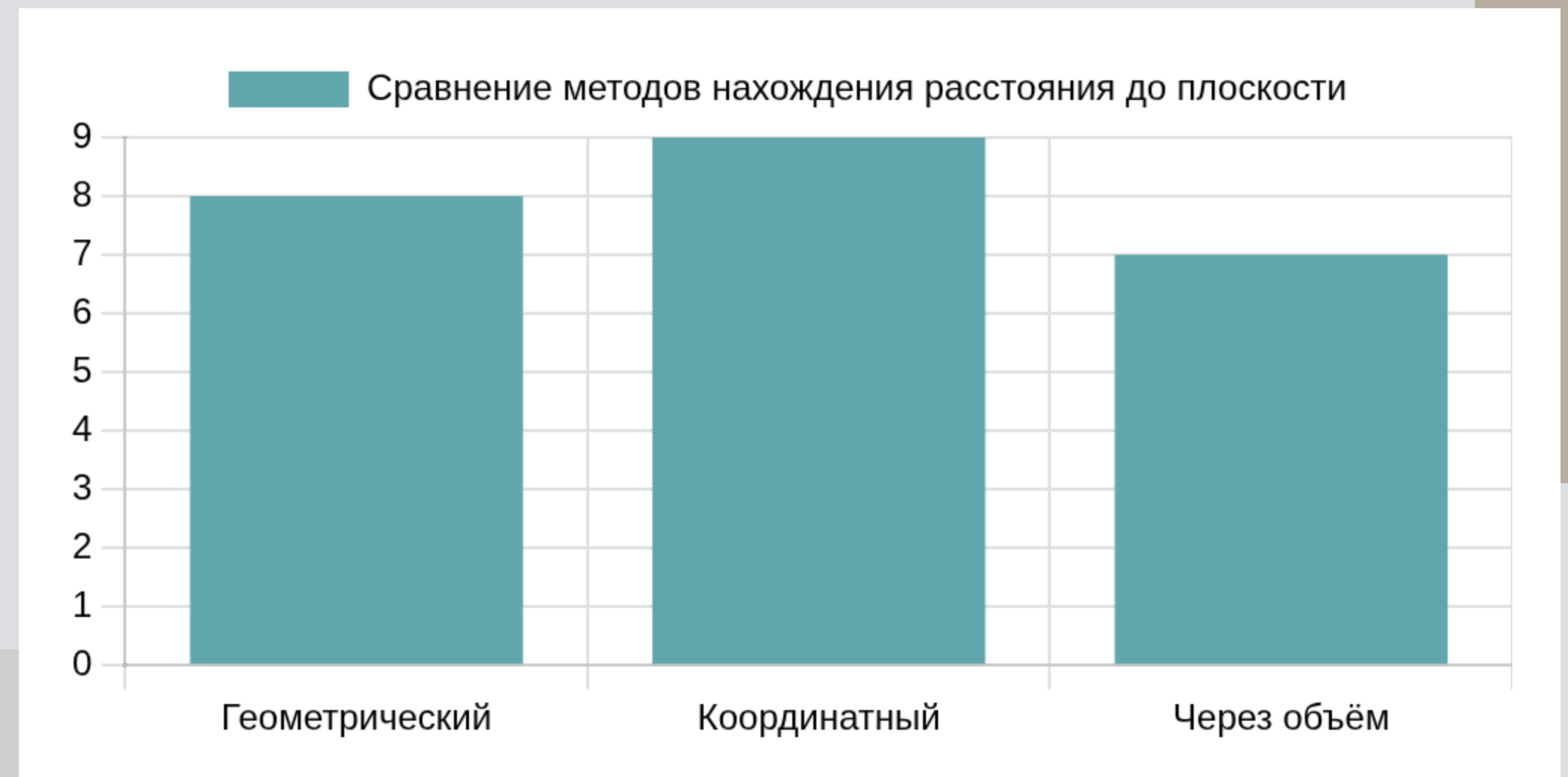
3

Модуль обязателен, потому что расстояние не бывает отрицательным. В результате вы всегда получаете корректную геометрическую величину, согласованную с масштабом задачи.

Сравнение методов решения

В задаче выбирают подход по данным: чертёж помогает видеть высоту и проекции, координаты дают формулу напрямую, а объём — быстрый путь, когда известны V и $S_{\text{осн}}$.

Координатный метод наиболее универсален для аналитической геометрии, геометрический чаще выигрывает наглядностью, а объёмный — когда заранее есть площадь основания и объём.



Сводная оценка по критериям «универсальность, наглядность, вычислительная простота»; качественное сравнение, без внешних числовых источников.

Метод через объём пирамиды

2. Записать связь объёма и высоты

Используем формулу $V = (1/3) \cdot S_{\text{осн}} \cdot h$. Она связывает объём пирамиды, площадь основания и высоту через один параметр h .

1. Уточнить геометрию

Проверяем: точка — вершина пирамиды, а плоскость — это основание. Тогда перпендикуляр от вершины к основанию совпадает с высотой пирамиды.

3. Вычислить высоту и расстояние

Выражаем $h = 3V/S_{\text{осн}}$ и получаем расстояние от точки до плоскости. Если V или $S_{\text{осн}}$ даны в разных единицах, приводим их к одной системе.

Типичные ошибки при решении задач

1

Часто путают расстояние от точки до плоскости с расстоянием до прямой, которая лежит в этой плоскости: в первом случае нужен перпендикуляр к плоскости, во втором — другой геометрический объект.

2

В координатной формуле забывают модуль в числителе: из-за знаков выражение вверху может быть отрицательным, но длина расстояния не может быть отрицательной по смыслу.

3

На чертеже неверно выбирают основание перпендикуляра или теряют связь между наклонной и её проекцией. Ещё одна проблема — подстановка чисел без оценки результата и без контроля единиц измерения.

Частные случаи в многогранниках



Куб и прямоугольный параллелепипед

В этих телах перпендикуляр часто совпадает с высотой грани, ребром или фрагментом диагонали. Поэтому расстояние легко находят из прямоугольных треугольников, опираясь на уже известные длины.



Призма: проекции и высота

Для призмы расстояние от точки до плоскости обычно сводится к работе с параллельными сечениями. Проекция на плоскость превращает пространственную задачу в планиметрическую, где удобно применять теорему Пифагора.



Правильные многогранники: симметрия

В правильных многогранниках равные рёбра и углы позволяют резко сократить вычисления. Часто сначала находят проекцию точки, а затем используют симметричные треугольники с одинаковыми параметрами.



Пирамида: вершина и основание

Для пирамиды при расстоянии от вершины до плоскости основания ответ равен высоте. В задачах с боковыми гранями нередко требуется сначала построить проекцию точки на нужную грань.

Примеры вычислений в числах

Ситуация	Дано	Расстояние
Над плоскостью	$z=0, h=5$	5
По координатам	$M(1,2,3),$ $x+2y+2z-9=0$	$ 1+4+6-9 /$ $\sqrt{1+4+4}$
Пирамида	$V=48, S_{\text{осн}}=24$	$h=3 \cdot 48/24=6$

Три коротких примера показывают: при разной постановке задачи решение всё равно сводится к перпендикуляру к плоскости.

Разные методы приводят к одной и той же идее: расстояние — это длина перпендикуляра к плоскости, а значит итог должен быть одинаково осмыслен по геометрии.

Примеры из условия темы (учебная демонстрация формул).

Как проверить правильность ответа

1

Ответ на расстояние всегда неотрицателен: если точка лежит в плоскости, перпендикуляр имеет нулевую длину. Поэтому отрицательное значение в вычислениях — явный сигнал ошибки.

2

В координатной формуле сокращать можно общий множитель, если он есть и в числителе, и в знаменателе. Но модуль нельзя «терять»: без него расстояние может получиться со знаком.

3

Полезно сверить масштаб: расстояние не должно превосходить очевидных длин, вытекающих из фигуры. Например, при ребре куба 4 расстояние не станет больше его диагонали, если нет геометрического основания.

4

Если решение основано на построении проекций и теореме Пифагора, сравните полученный перпендикуляр с соответствующей «вертикальной» частью на чертеже. Совпадение с ожидаемой конфигурацией снижает риск неверного основания перпендикуляра.

Как выбрать способ решения в зависимости от условия

Подсказка: ориентируйтесь на то, что дано в задаче — формула плоскости, координаты точки, параметры объёма или чертёж.

Применение в реальных задачах и моделировании



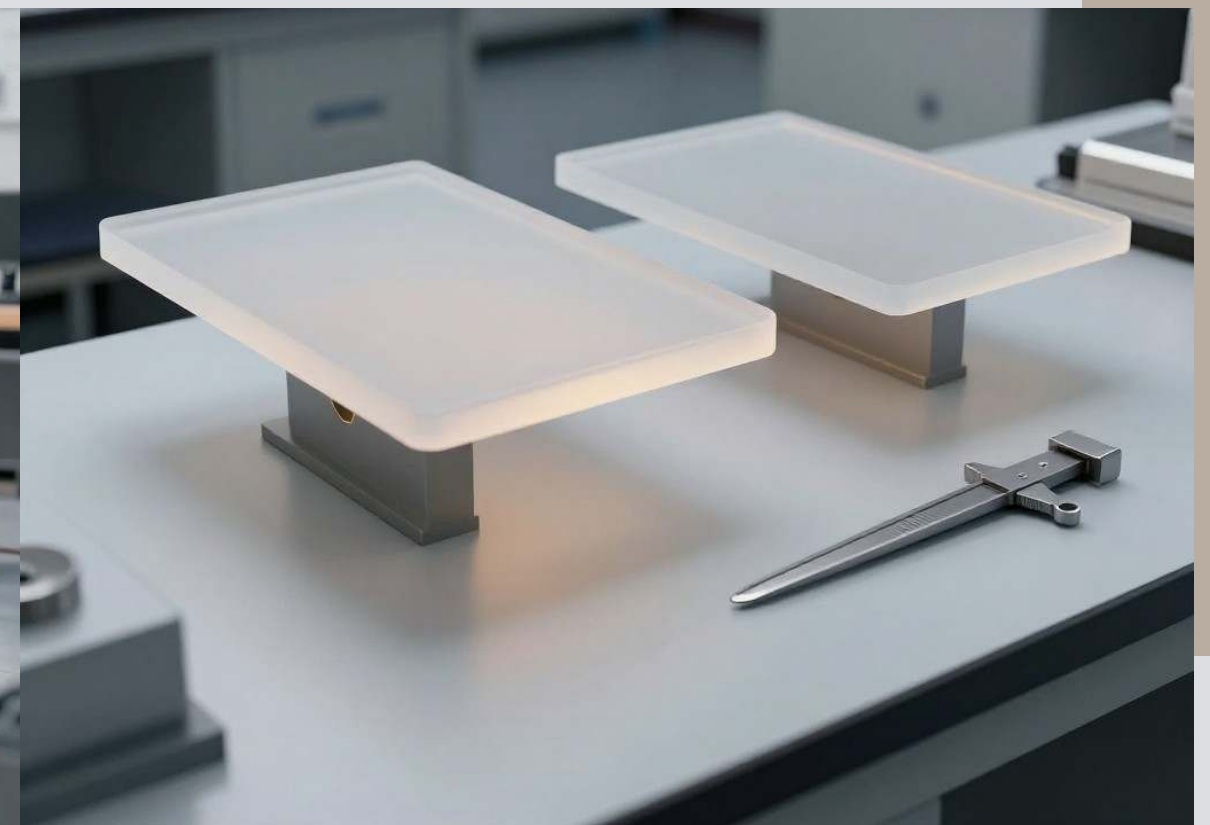
Архитектурная разметка фасада

На строительной площадке нужно оценивать кратчайшее отклонение объекта от заданной поверхности. Геометрическая модель использует перпендикуляр от точки к плоскости, поэтому измерение расстояния превращается в вычисление «высоты» к проектной грани.



Навигация и работа датчиков в 3D

В навигации и робототехнике важно понимать, как далеко точка положения находится от контрольной плоскости. Перпендикуляр помогает корректно интерпретировать показания датчиков и строить безопасные траектории.



Инженерная графика и компьютерные модели

В 3D-моделировании расстояние до поверхности часто требуется для расчёта зазоров и проверки точности. Поэтому математическая формулировка опирается на ту же идею: кратчайшее расстояние задаётся перпендикуляром к плоскости, а не произвольной линией.

Главные выводы по теме

1

Расстояние от точки до плоскости — это длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость. Именно этот объект одновременно минимален среди всех отрезков и однозначно задаёт ответ.

2

Координатная формула даёт быстрый и универсальный способ вычисления, когда плоскость задана уравнением, а точка имеет координаты. Она особенно удобна для аналитической геометрии.

3

Геометрический и объёмный методы наиболее эффективны в задачах на многогранники и пирамиды. Успех решения опирается на умение построить проекцию и выбрать самый подходящий путь вычислений.

Расстояние как связующее звено между геометрией и анализом

Тема объединяет стереометрию, координатный метод и свойства перпендикуляра в пространстве. Она даёт основу для дальнейшего изучения расстояний между прямыми и плоскостями, углов в пространстве и вычисления элементов многогранников.