

Уравнения окружности и прямой в координатах

Сегодня разберём, как формулы описывают окружности и прямые на координатной плоскости.



Зачем в геометрии использовать координаты

Координатная плоскость превращает фигуры в записи: точка — это (x, y) , а расстояния считаются по формуле, основанной на теореме Пифагора. Так можно проверять принадлежность, находить пересечения и решать задачи без рисунка, особенно в 9 классе.

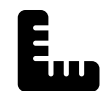


Что важно помнить при работе с координатами



Точка по координатам

Любая точка задаётся парой чисел (x, y) : абсцисса отвечает за положение по горизонтали, ордината — по вертикали. Это основа для всех дальнейших вычислений и проверок на плоскости.



Формула расстояния

Расстояние между $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ равно $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Она пригодится, чтобы сравнивать отрезки, выводить уравнения окружности и проверять длины.



Проверка по длине

Идея такая: если из центра до точки получается радиус, значит, точка лежит на окружности. Формула расстояния помогает сделать это строго через вычисления, а не «на глаз» по чертежу.



Аккуратная подстановка

В задачах нельзя путать порядок вычитания в разностях $(x_2 - x_1)$ и $(y_2 - y_1)$. Ошибка в знаке меняет результат корня и приводит к неправильному выводу о принадлежности точки.



Окружность как множество точек

Окружность — это множество всех точек плоскости, которые находятся на одном и том же расстоянии от фиксированной точки. Эта точка называется центром, а расстояние — радиусом.

Если центр обозначен $O(a, b)$, а радиус r , то для любой точки $M(x, y)$ на окружности выполняется равенство $OM = r$. Именно это равенство и связывает геометрию с формулой.

Используя координаты, расстояние OM можно выразить через x и y . После этого условие $OM = r$ превращается в уравнение окружности в координатах, удобное для задач.

Каноническое уравнение окружности

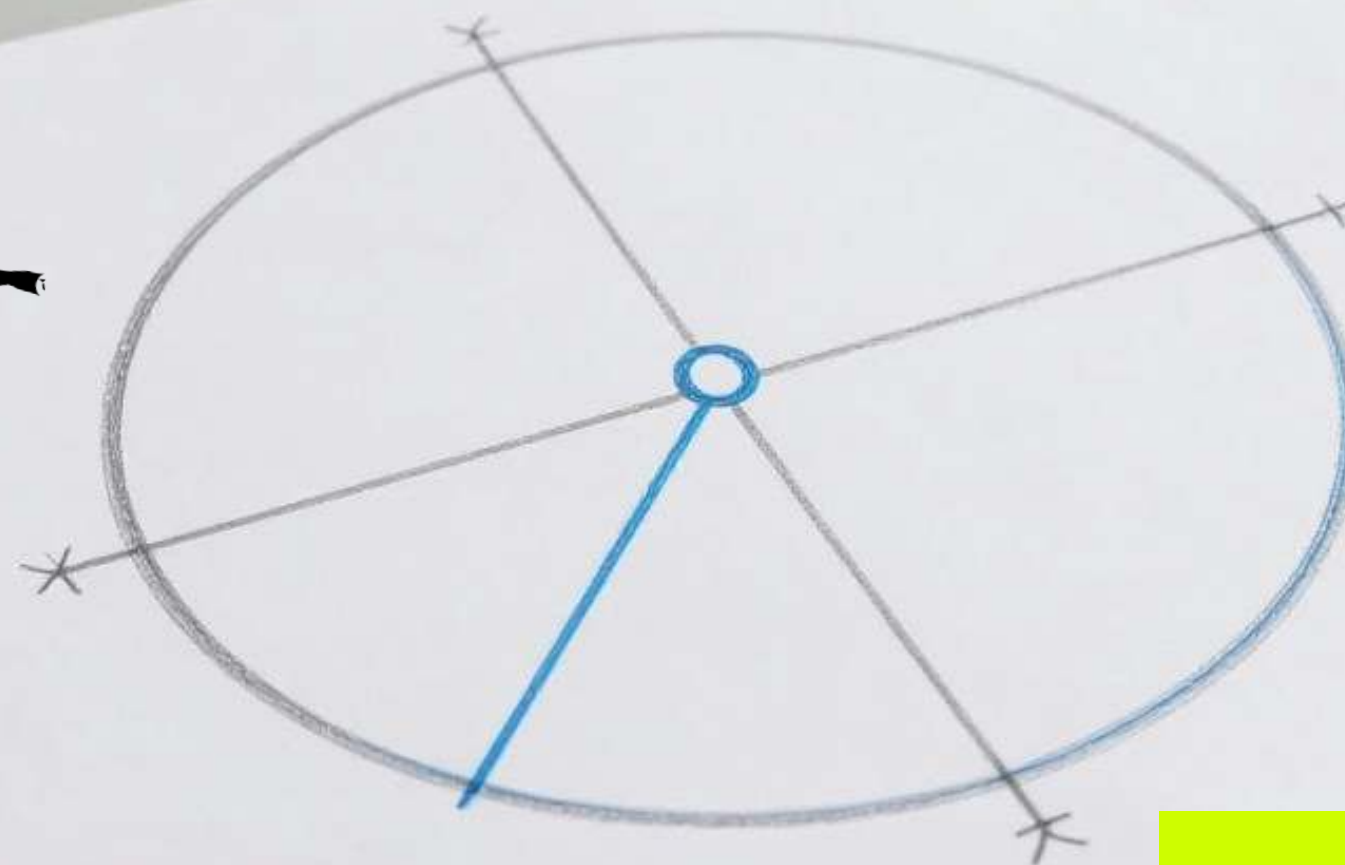


Форма с центром и радиусом

Каноническое уравнение окружности имеет вид $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Здесь (a, b) — координаты центра, а r — радиус. Любая точка (x, y) , подходящая условию, лежит на окружности.

Особый случай: центр в начале координат

Если центр совпадает с началом координат, то $a=0$ и $b=0$, и уравнение записывают как $x^2 + y^2 = r^2$. На рисунке обычно выделяют центр O , радиус и несколько точек окружности, чтобы показать одинаковое расстояние.



Как распознать окружность по уравнению

Вспомогательная информация

Нужно быстро понять, что уравнение описывает окружность, а также увидеть, где расположен её центр и как найти радиус.

Ключевой признак — в уравнении присутствуют квадраты x и y с одинаковыми коэффициентами (обычно 1). Общий вид затем преобразуют к каноническому, чтобы определить центр и радиус.

Вид уравнения	Что означает	Пример
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$	Центр (a, b) , радиус r	$(x-2)^2+(y+1)^2=9$
$x^2+y^2=r^2$	Центр в начале координат	$x^2+y^2=16$
$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$	Общий вид, приводят к каноническому	$x^2+y^2-4x+6y-1=0$

Материал урока: формы записи уравнения окружности

Как найти центр и радиус из общего уравнения

1. Записать общее уравнение

Берём вид $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$. Здесь D , E и F — заданные числа. Дальше цель — привести запись к квадратам по x и y .

3. Найти координаты центра

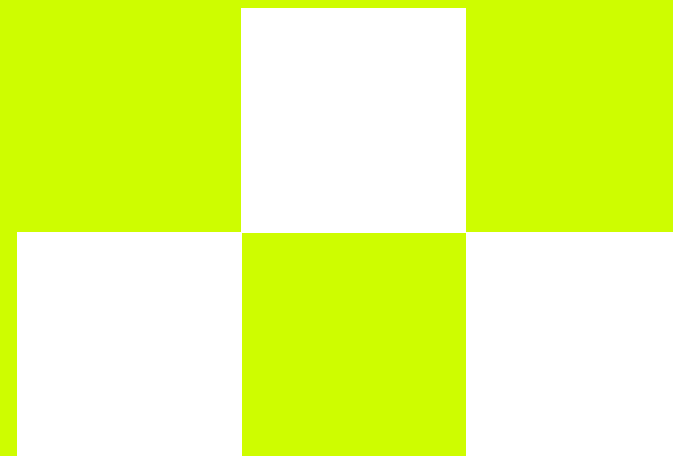
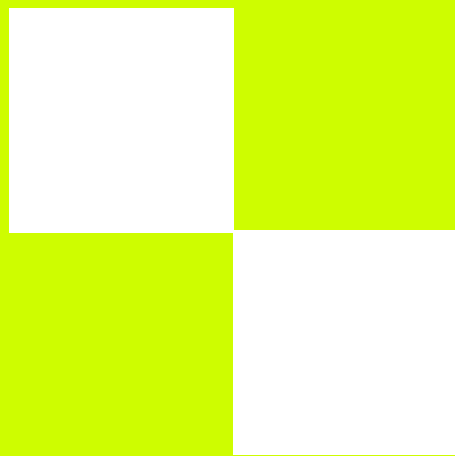
После преобразований центр выражается формулами: $a = -D/2$ и $b = -E/2$. То есть центр равен $(-D/2, -E/2)$.

2. Привести к каноническому виду

Группируем слагаемые с x и слагаемые с y и дополняем до полных квадратов. Так уравнение станет похожим на $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

4. Вычислить радиус и проверить

Радиус находим через $r^2 = (D/2)^2 + (E/2)^2 - F$. Затем важно проверить, что r^2 даёт положительное значение радиуса (радиус не бывает отрицательным).



Проверка принадлежности точки окружности

Алгоритм: сравнить левую и правую части уравнения после подстановки координат точки.

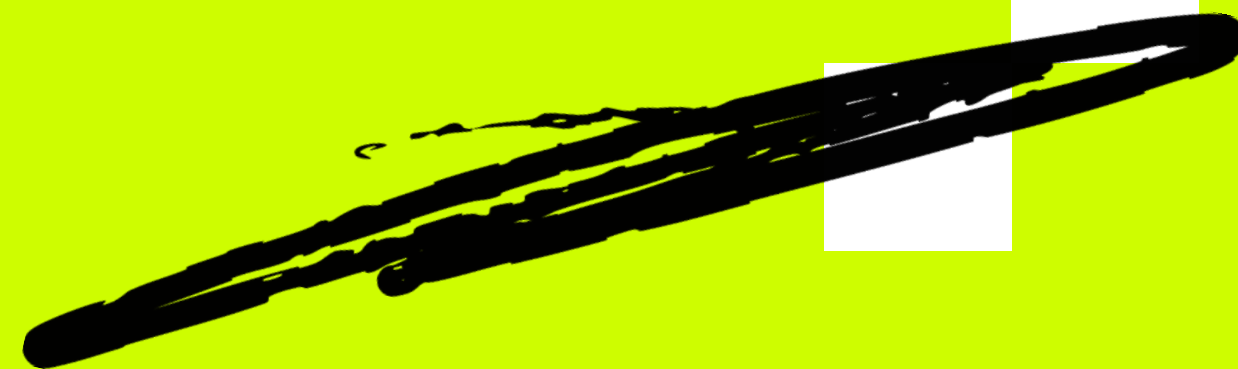


Уравнение прямой вида $y = kx + b$

Если прямая задана формулой $y = kx + b$, число k называют угловым коэффициентом. Он показывает наклон: при $k > 0$ прямая возрастает, при $k < 0$ убывает, при $k = 0$ получается горизонтальная прямая.

Число b — это свободный член. Он равен значению y при $x = 0$, то есть определяет точку пересечения прямой с осью y . Поэтому его удобно находить и проверять по графику.

Такой вид часто выбирают, потому что он напрямую даёт свойства линии: наклон виден по k , а старт на оси y — по b . По сравнению двух прямых можно быстро понять, какая из них круче или в какую сторону идёт.



Общее уравнение прямой



Общее уравнение прямой записывают как $Ax + By + C = 0$, причём A и B не могут быть равны нулю одновременно. Оно подходит для преобразований, потому что легко приводится к разным эквивалентным формам.

Если $B \neq 0$, уравнение можно преобразовать к виду $y = kx + b$. При этом y выражается через x , и наклон k становится связанным с коэффициентами A и B , а b — со слагаемым C .

Вертикальная прямая задаётся уравнением $x = c$. Все её точки имеют одну и ту же абсциссу, поэтому она не описывается формулой $y = kx + b$: там при изменении x меняется и y .

Используя общий вид, удобно находить признаки прямых в задачах: решать уравнения пересечения, сравнивать линии и определять тип взаимного расположения. Главное — следить, какие коэффициенты равны нулю.



Основные виды уравнений прямой



Каждая запись прямой удобна в своей ситуации: одна сразу показывает наклон, другая легко преобразуется, третья и четвертая фиксируют ориентацию прямой относительно осей.

По форме уравнения можно быстро понять, как строить график и как сравнивать две прямые без лишних вычислений.

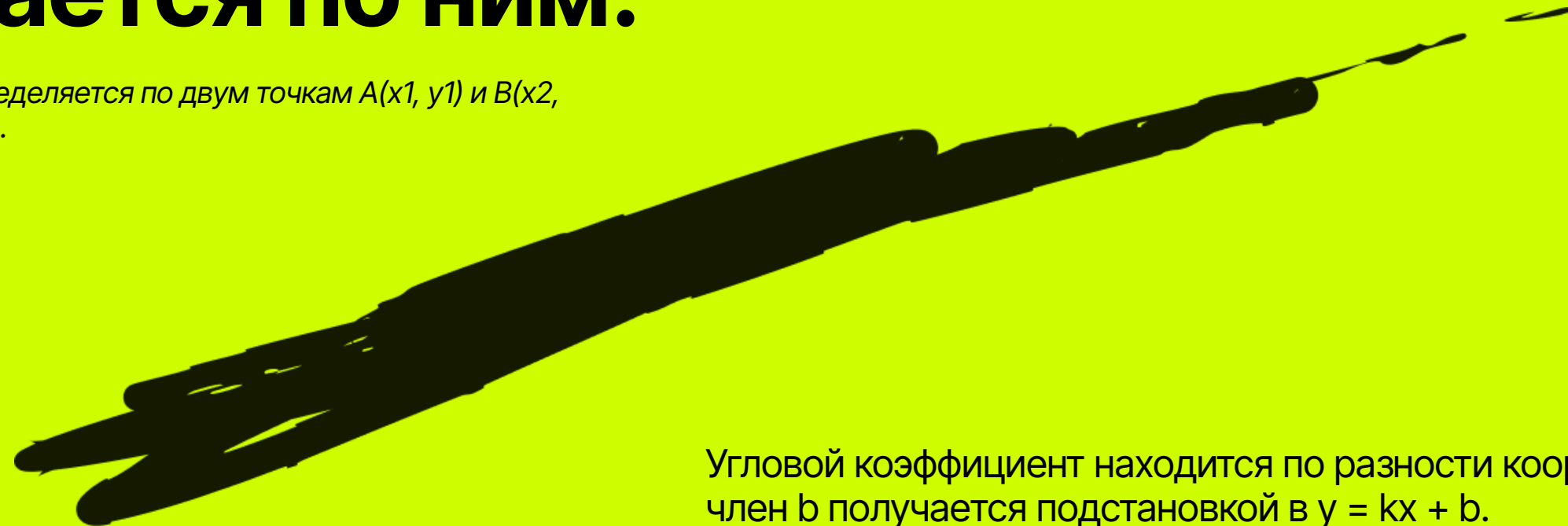


Учебный материал по теме «Уравнения прямой» (геометрия 9 класса).

2

**Если заданы две точки, то
прямая однозначно
восстанавливается по ним.**

Методика решения по условию: прямая определяется по двум точкам $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$.



Угловой коэффициент находится по разности координат, а свободный член b получается подстановкой в $y = kx + b$.



Проверка взаимного расположения прямых



Параллельность

Если прямые заданы формулой $y = kx + b$, сравнение сводится к угловым коэффициентам: k_1 и k_2 должны быть равны. Тогда прямые имеют одинаковый наклон и не пересекаются.



Перпендикулярность

Для прямых с уравнением $y = kx + b$ перпендикулярность означает условие $k_1 \cdot k_2 = -1$. Этот признак проверяет взаимный угол наклона без построений на плоскости.



Как найти нужное уравнение

Зная нужное соотношение наклонов, можно составить искомое уравнение прямой по условию задачи. Часто требуется сначала определить k из пары точек или из заданного вида.

Окружность и прямая: сравнение уравнений и графиков



Объект	Уравнение	График	Ключевой признак
Окружность	$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$	Замкнутая линия	Одинаковое расстояние до центра
Прямая	$Ax+By+C=0$	Незамкнутая линия	Постоянный наклон и направление

Обобщение по формулам из курса аналитической геометрии (9 класс).

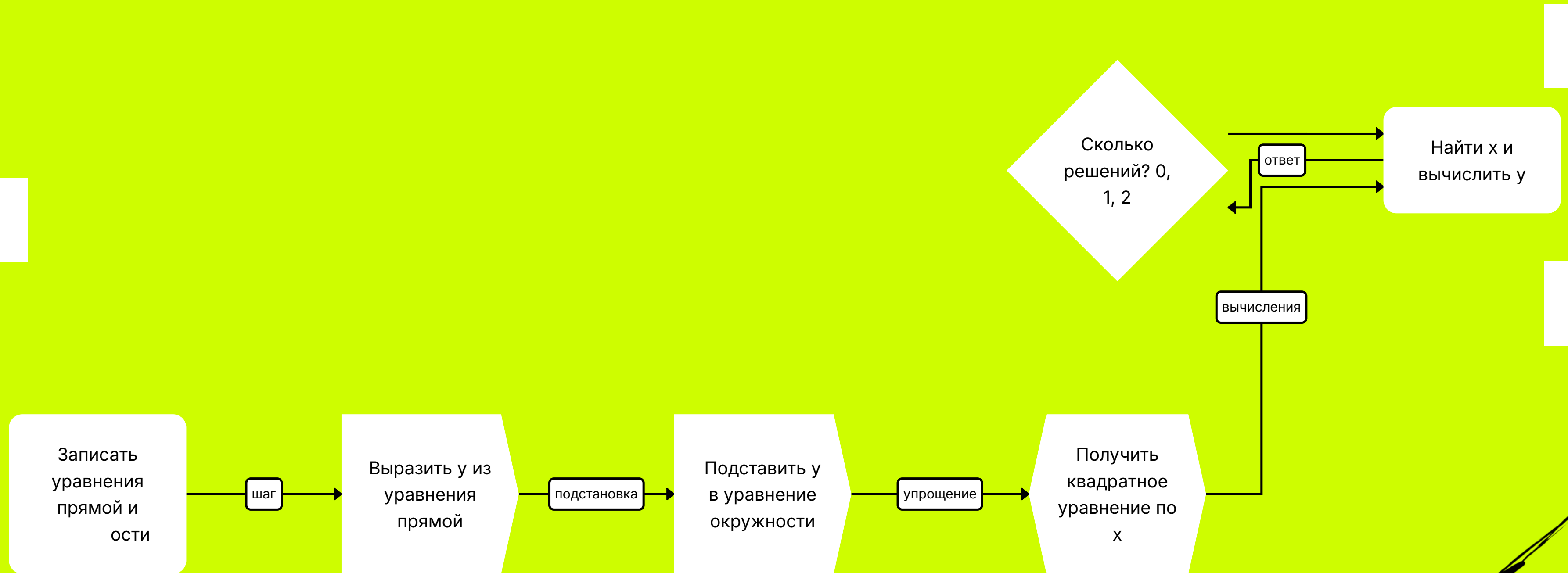


Ключевые различия удобно видеть по тому, как устроены выражения в уравнении и как выглядит график.

Квадраты координат указывают на окружность, а линейная форма — на прямую; это помогает выбирать подходящий метод решения.

Точки пересечения прямой и окружности

Алгоритм получения пересечений через подстановку и решение квадратного уравнения.



Сколько общих точек могут иметь прямая и окружность



Если после подстановки получается квадратное уравнение без действительных корней, общих точек нет; один корень соответствует касанию.

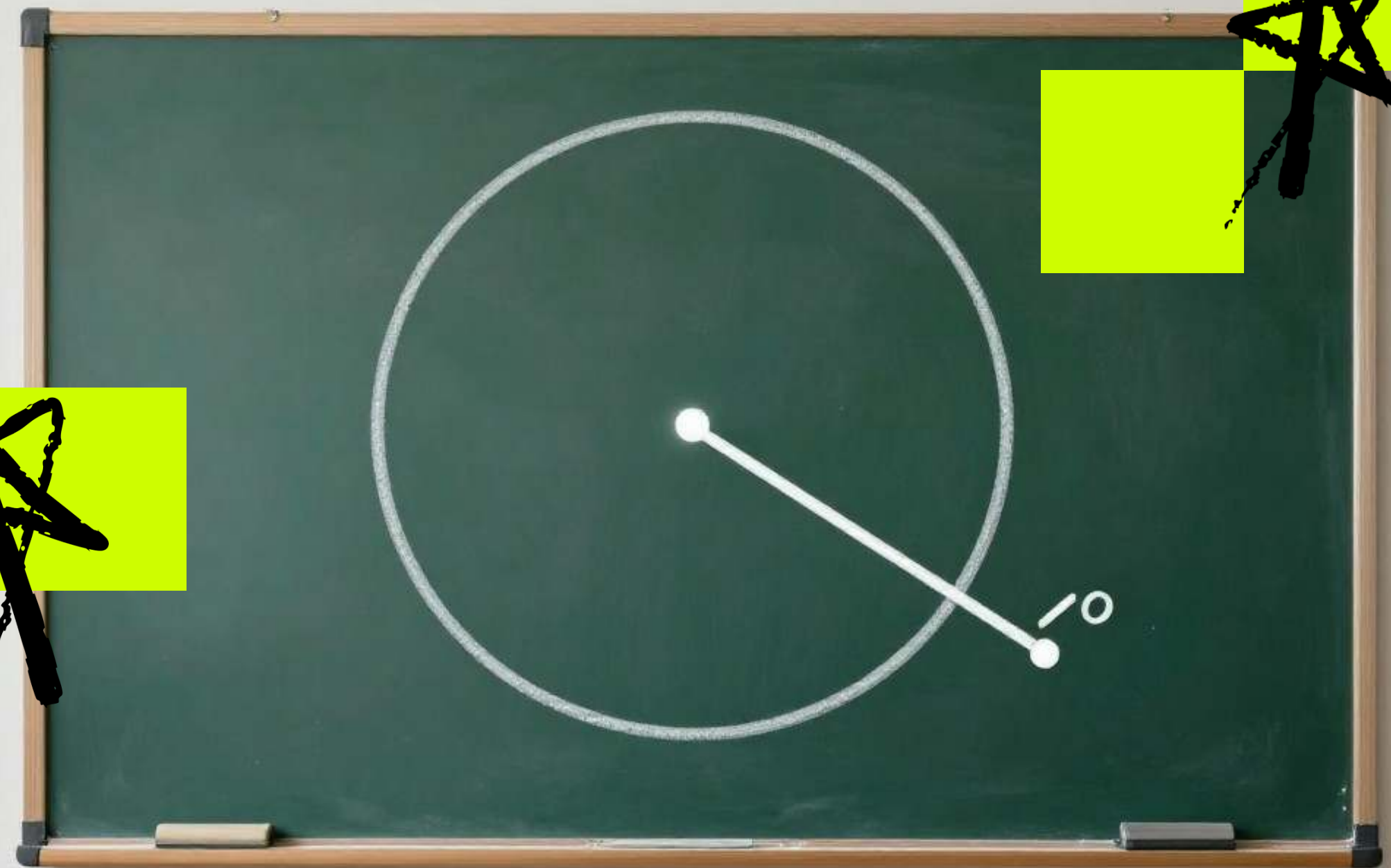
Количество решений квадратного уравнения напрямую показывает, пересекаются ли линии и как именно.



Решение через подстановку в уравнение окружности и свойства квадратного уравнения (не требует числовых данных).

Касательная к окружности

- Касательная к окружности имеет ровно одну общую точку с окружностью. В точке касания радиус, проведённый в эту точку, образует прямой угол с касательной.
- Это свойство помогает двум типам задач: найти уравнение касательной и проверить, является ли данная прямая касательной. На рисунке обычно выделяют центр, точку касания и угол 90° .



Типичные ошибки при решении задач

При раскрытии скобок в выражениях вида $(x-a)^2$ и $(y-b)^2$ иногда теряют знаки перед слагаемыми. Важно аккуратно раскрывать квадрат суммы/разности и не пропускать коэффициенты $2a$ и $2b$.

Частая путаница — смешать координаты центра (a, b) с координатами произвольной точки на окружности (x, y) . Из-за этого подстановка в формулу расстояния даёт неверный результат и уравнение не сходится.

При переходе от общего уравнения к каноническому можно потерять знак при переносе слагаемых или при выделении полного квадрата. Тогда формулы для центра и радиуса оказываются применены некорректно.

В задачах на угол наклона неправильно вычисляют k или путают порядок разностей $(y_2 - y_1)$ и $(x_2 - x_1)$. При проверке точки на окружности подставляют лишь одну координату, хотя нужно обе.



Алгоритм работы с уравнениями окружности и прямой





Уравнения превращают геометрию в ВЫЧИСЛЕНИЯ

Уравнение окружности описывает все точки на одинаковом расстоянии от центра, а уравнение прямой — линейную зависимость, дающую наклон и взаимное положение. Вместе они позволяют проверять точки и находить пересечения в курсе 9 класса.

