

Синус и косинус: основные понятия тригонометрии

Как угол, треугольник и координаты связаны
между собой?



Зачем нужны синус и косинус в 9 классе

Эти функции помогают находить неизвестные стороны и углы там, где одной теоремы Пифагора уже недостаточно. Они связывают геометрию с алгеброй и готовят к более сложной тригонометрии.



Прямоугольный треугольник как основа определения

Синус угла

В прямоугольном треугольнике синус острого угла равен отношению противолежащего катета к гипотенузе. Это отношение показывает, насколько «высоко» расположен выбранный угол относительно основы треугольника.

Косинус угла

Косинус острого угла находят как отношение прилежащего катета к гипотенузе. Он описывает, какая часть гипотенузы приходится на сторону, лежащую рядом с данным углом.

Почему значения совпадают

Если два треугольника подобны, их углы одинаковы, а отношения соответствующих сторон сохраняются. Поэтому для одного и того же угла синус и косинус всегда имеют одно и то же значение в подобных фигурах.



Едини́чная окру́жность и координаты точки



Что такое единичная окружность

Едини́чной называют окружность с радиусом 1. Угол отсчитывают от положительного направления оси Ox , а положение точки на окружности показывает, как повернулся радиус.

Координаты точки

Для точки на единичной окружности абсцисса равна $\cos \alpha$, а ордината — $\sin \alpha$. Поэтому одна и та же точка одновременно задаёт и угол, и значения тригонометрических функций.

Первая четверть

При углах 30° , 45° и 60° точка находится в первой четверти. Здесь обе координаты положительные, поэтому и синус, и косинус имеют положительные значения.

Зачем это нужно

Такой способ позволяет видеть связь между геометрией и координатной плоскостью. Вместо длинных вычислений можно сразу прочесть значения $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ по положению точки.



Значения синуса и косинуса для основных углов

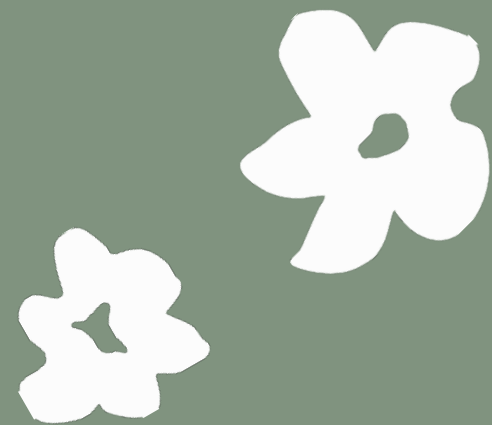
Опорные значения помогают быстро решать задачи без калькулятора и видеть, как меняются функции при росте угла.

Синус возрастает от 0° к 90° , а косинус убывает; при 45° значения совпадают.

Угол	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
0°	0	1
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
90°	1	0

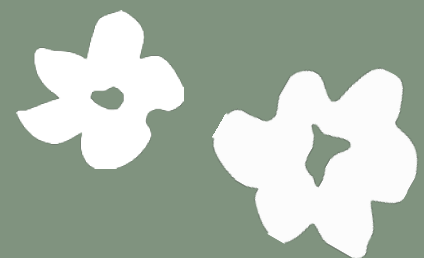
Стандартные значения синуса и косинуса для углов 0° , 30° , 45° , 60° и 90°





На единичной окружности координаты точки не выходят за пределы радиуса, поэтому синус и косинус всегда лежат в интервале от -1 до 1 .

Свойства координат точек на единичной окружности



1

**это верхняя граница
для значений обеих
функций
на единичной
окружности**

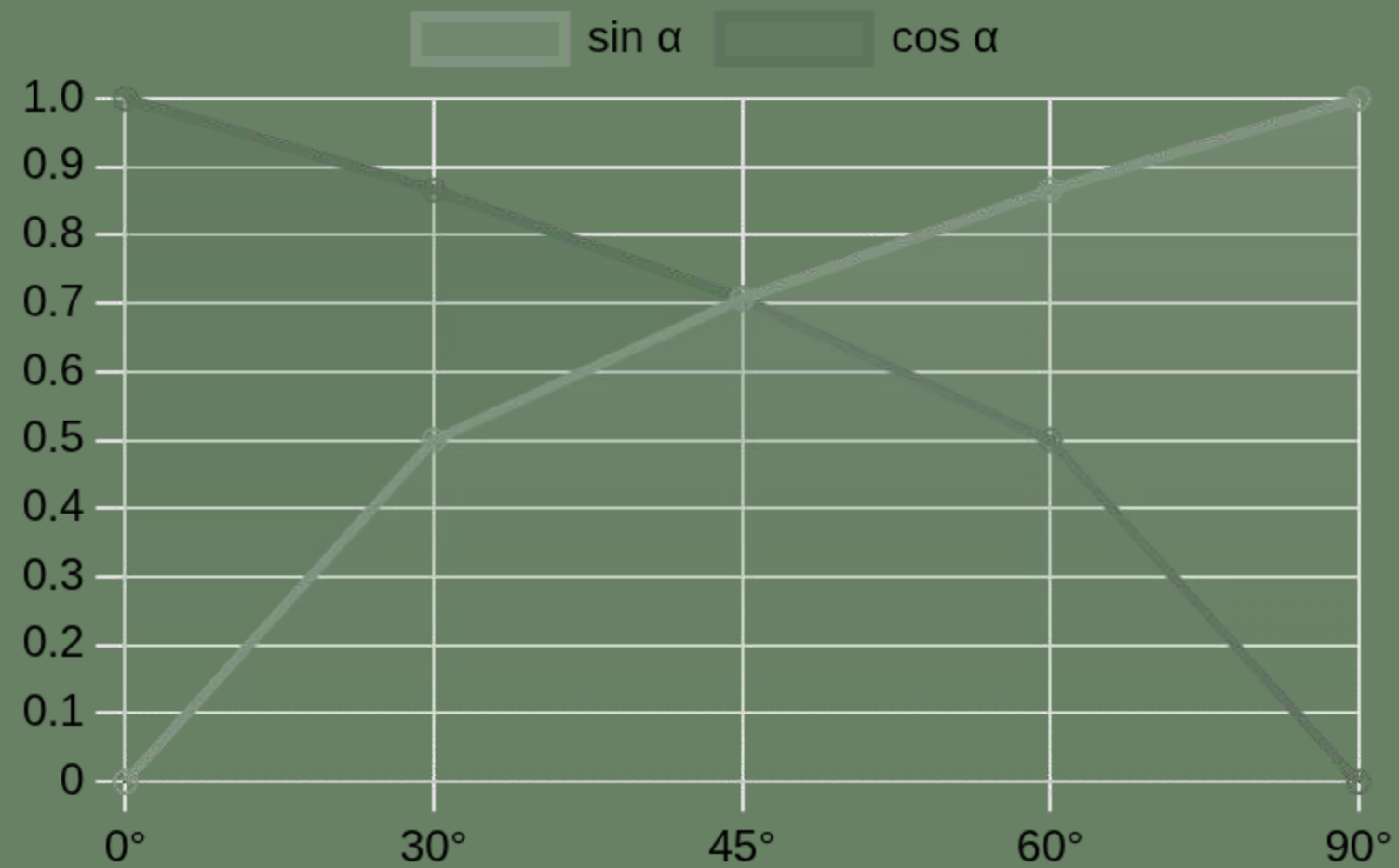


Как найти синус и косинус угла

Алгоритм для прямоугольного треугольника и единичной окружности



Сравнение значений синуса и косинуса на ключевых углах



Стандартные значения $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ для углов 0° , 30° , 45° , 60° , 90°

График наглядно показывает, что обе функции меняются плавно и по-разному ведут себя на одинаковых углах.

Синус растёт, косинус убывает, а в точке 45° их значения совпадают.

Знаки синуса и косинуса в четырёх четвертях



I четверть

Обе координаты положительные, поэтому $\sin \alpha > 0$ и $\cos \alpha > 0$. Это самая простая область для проверки ответа, потому что знаки совпадают с обычным направлением осей.



II четверть

Здесь точка находится слева от оси OY, но выше оси OX. Поэтому синус остаётся положительным, а косинус становится отрицательным.



III четверть

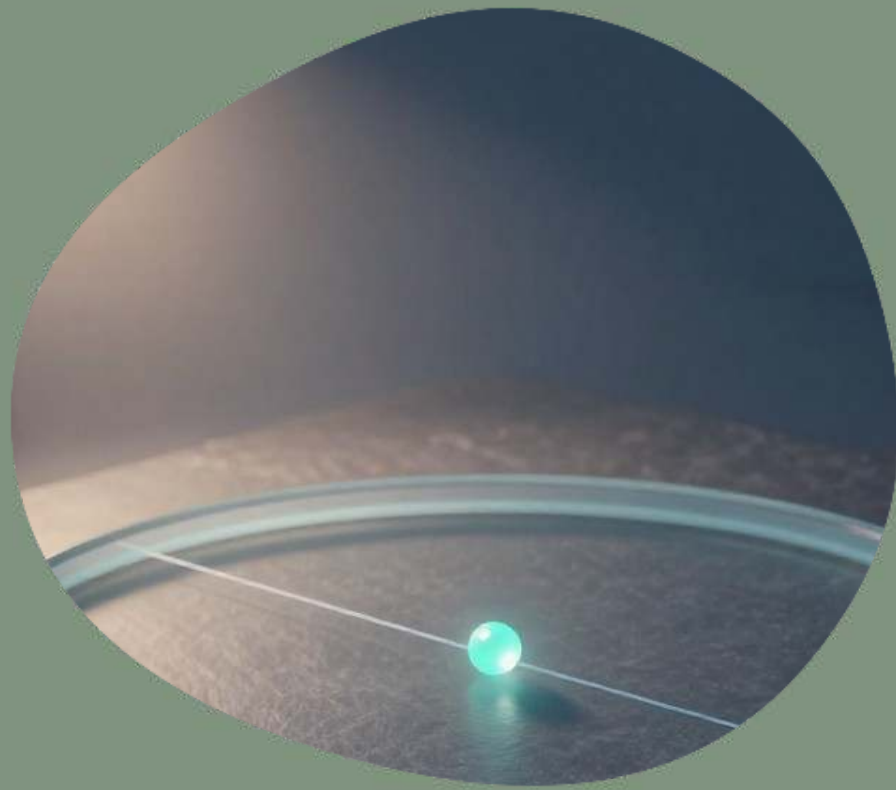
Точка расположена ниже оси OX и левее оси OY. В этой части плоскости обе координаты отрицательные, значит $\sin \alpha < 0$ и $\cos \alpha < 0$.



IV четверть

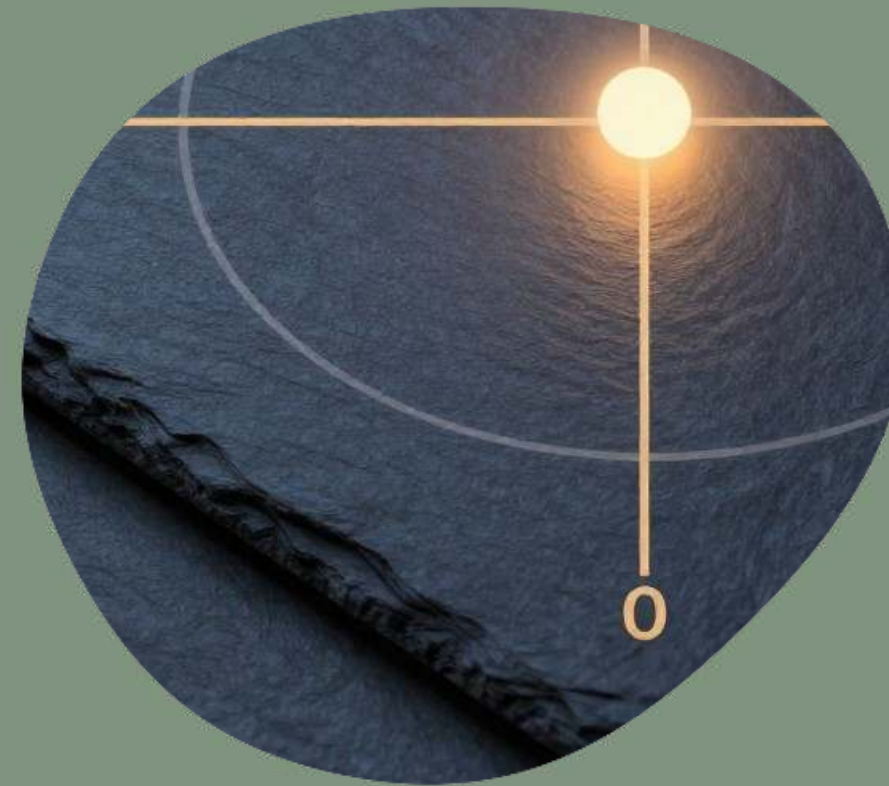
Точка находится ниже оси OX, но справа от оси OY. Поэтому синус отрицательный, а косинус положительный, что помогает быстро определить знак без лишних вычислений.

Связь синуса и косинуса с координатами



Точка на окружности

Когда угол α задаёт положение радиуса на единичной окружности, сама точка получает координаты ($\cos \alpha$, $\sin \alpha$). Горизонтальная проекция показывает косинус, а вертикальная — синус. Так одна фигура сразу даёт два значения.



Как читать проекции

Если опустить из точки перпендикуляры на оси, можно увидеть её координаты на плоскости. По оси OX читается $\cos \alpha$, по оси OY — $\sin \alpha$, поэтому знак каждого значения зависит от четверти, где находится точка.

Где в геометрии применяются синус и косинус

1. Высота по углу

Если известны расстояние до объекта и угол наблюдения, синус и косинус позволяют вычислить высоту без прямого измерения. Так находят высоту дерева, башни или здания в школьных задачах.

2. Наклонные отрезки

При работе с лестницей, крышей или наклонной стороной фигуры тригонометрические отношения помогают связать длину наклона с горизонтальной и вертикальной частями. Это упрощает поиск неизвестного отрезка.

3. Недоступные расстояния

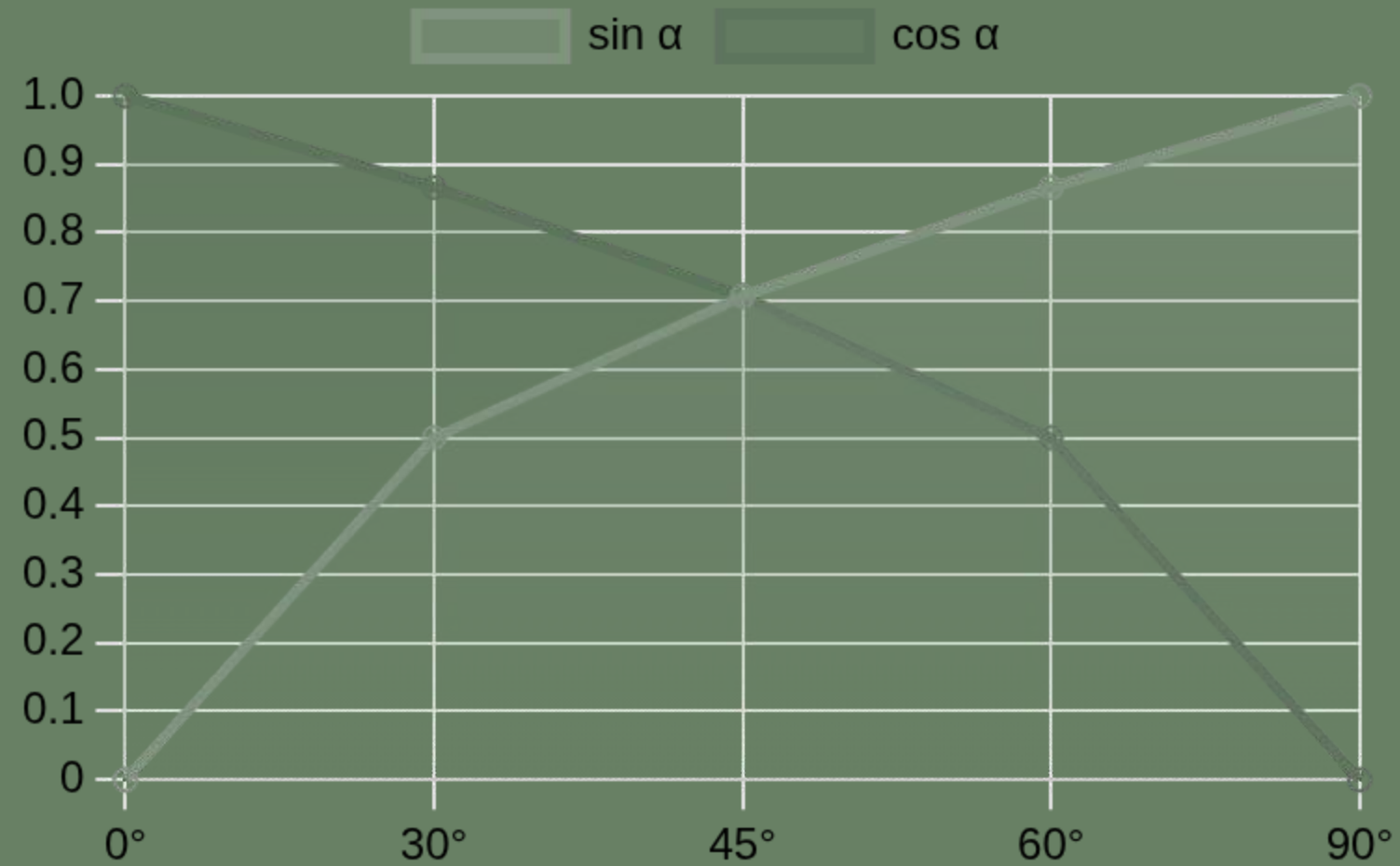
Иногда измерить длину напрямую нельзя: мешает река, забор или само здание. Тогда задачу переводят в треугольник, где синус и косинус дают точный ответ через угол и известную сторону.

4. Чертёж к вычислению

Эти функции помогают перейти от рисунка к числу: по схеме находят нужные элементы, составляют отношение и получают результат. Именно поэтому они так важны в геометрии и прикладных задачах.



Графики синуса и косинуса

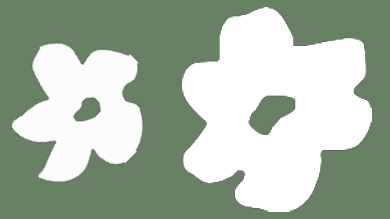


*Стандартные значения синуса и косинуса для основных углов
из школьного курса геометрии*

На графике удобно сравнивать не только значения, но и направление изменения функций: одна возрастает, другая убывает.

Ключевые точки показывают пересечение графиков при 45° и подтверждают их ограниченность от 0 до 1 на отрезке 0° – 90° .

Периодичность синуса и косинуса



Исходный угол

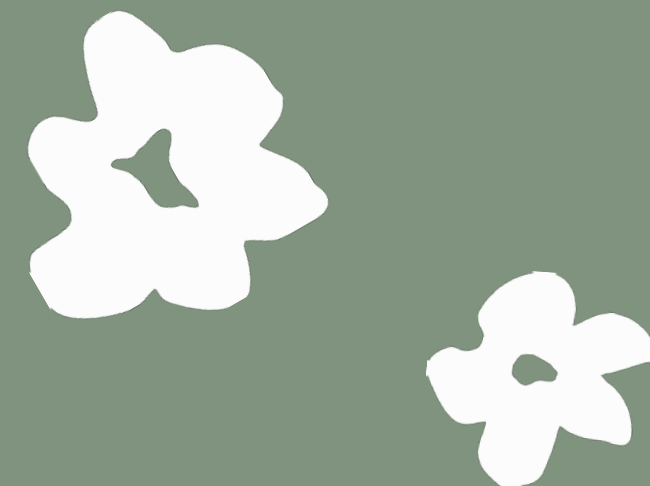
Для заданного угла α значение синуса и косинуса определяется положением точки на окружности или в треугольнике.

Поворот на 360°

После полного оборота точка возвращается в то же положение, поэтому значения $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ снова становятся такими же.

Период функции

Если к углу прибавить или вычесть 360° (или 2π), значение не изменится. Это и есть периодичность.



Синус, косинус и тангенс: сравнение определений

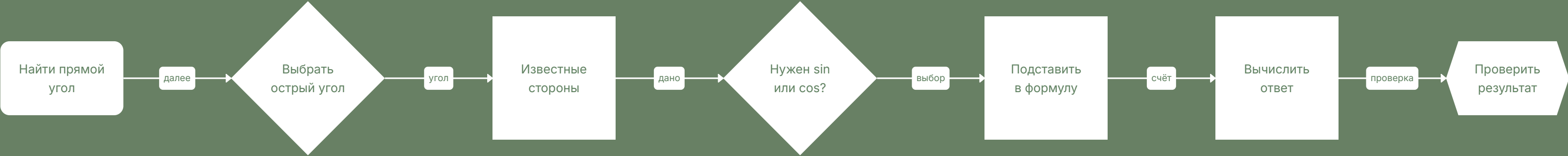
Сравнение показывает, какие стороны прямоугольного треугольника участвуют в определении каждой функции и каков возможный диапазон значений.

Синус и косинус используют гипотенузу, а тангенс — только катеты. Поэтому у тангенса нет ограничения от -1 до 1 .

Функция	Формула	Связь
$\sin \alpha$	противолежащий / гипотенуза	$-1 \dots 1$
$\cos \alpha$	прилежащий / гипотенуза	$-1 \dots 1$
$\operatorname{tg} \alpha$	противолежащий / прилежащий	может быть большим

Как решать задачи с прямоугольным треугольником

Последовательность действий при применении $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ в школьных задачах

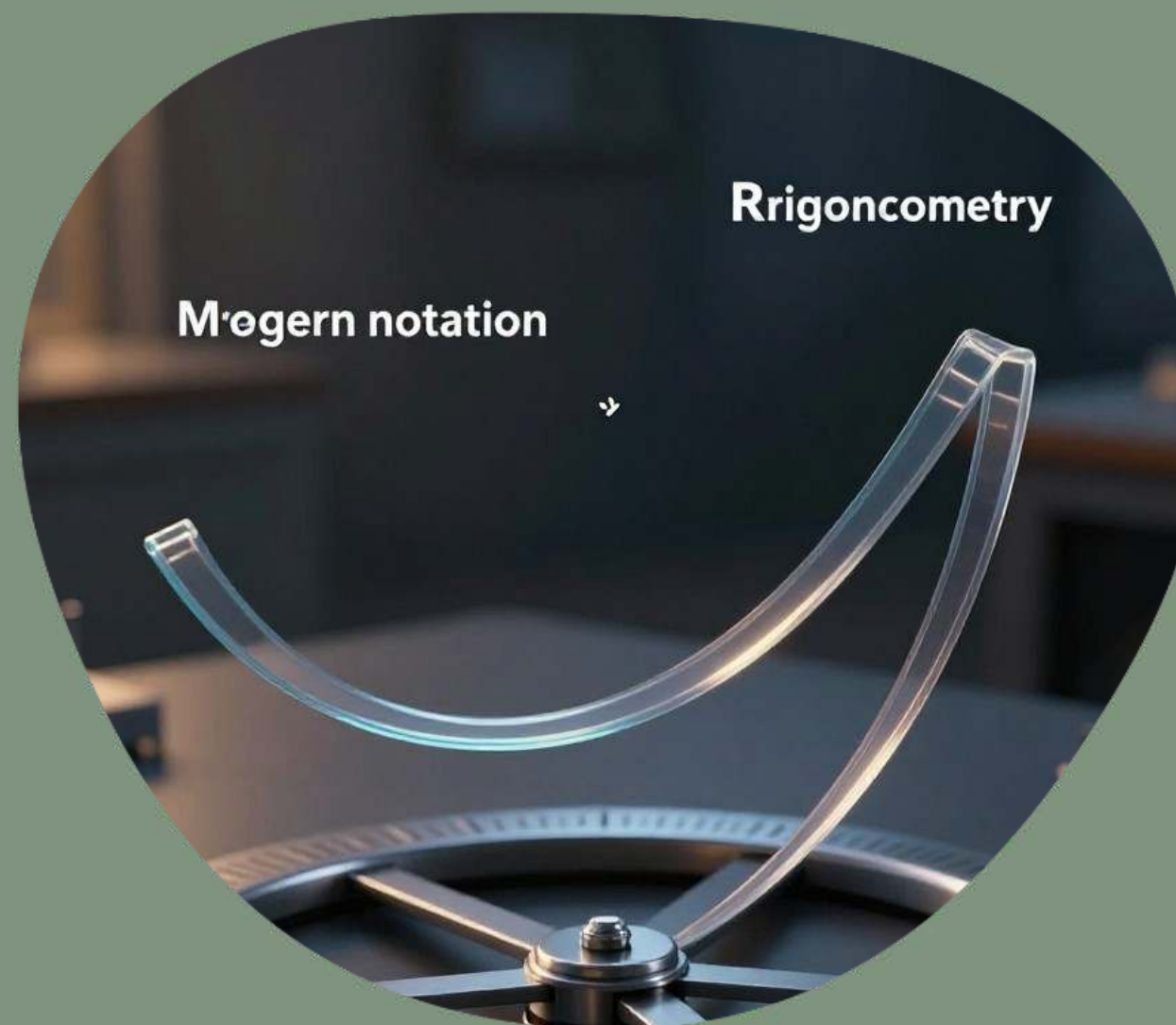


Как появились тригонометрические идеи



От звёзд к таблицам

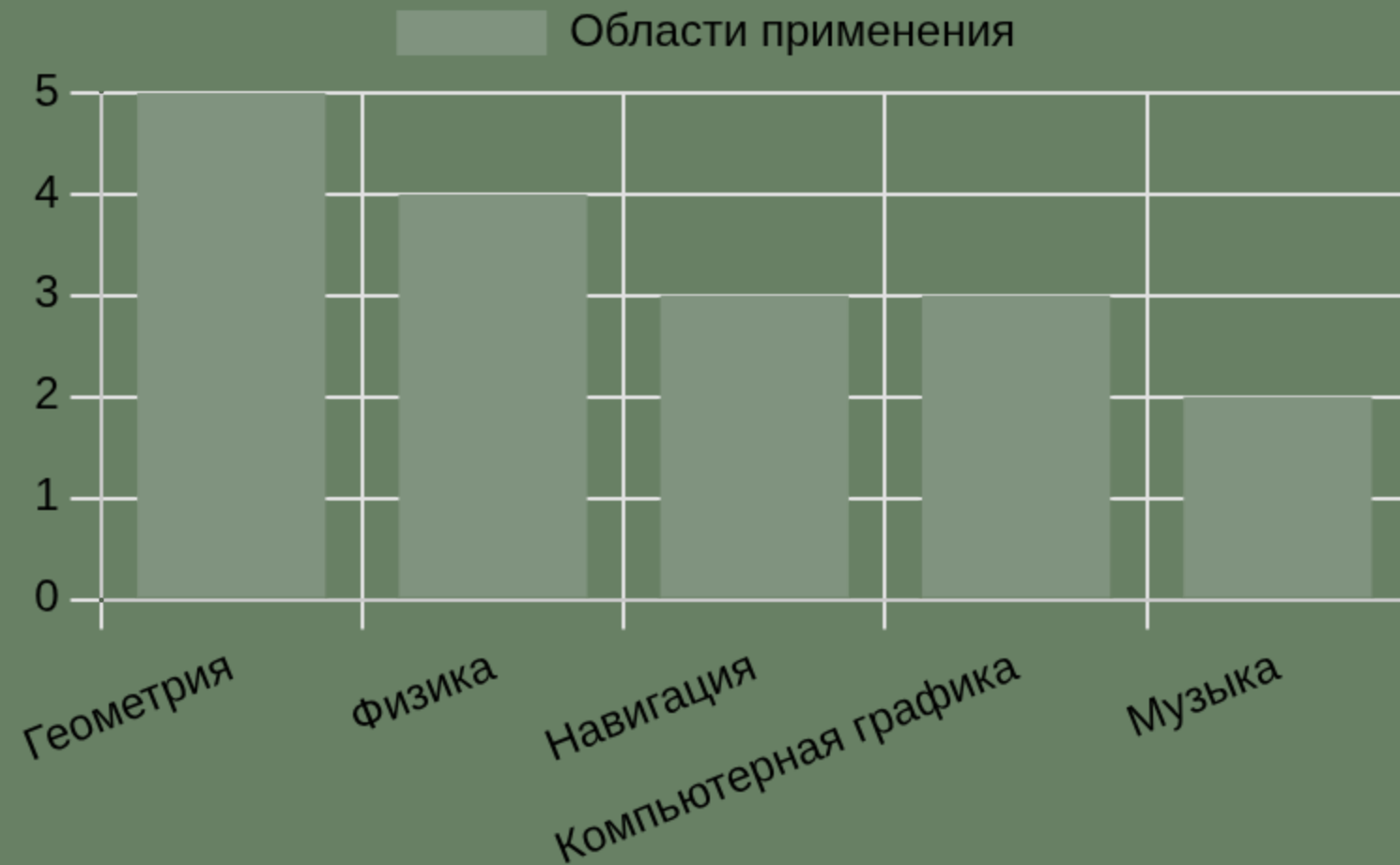
Первые тригонометрические таблицы нужны были астрономам, морякам и землемерам. По ним находили направления, расстояния и положения небесных светил, когда прямое измерение было невозможно. Так отношения сторон постепенно стали важным инструментом науки.



Современные обозначения

Позже математика стала записывать тригонометрические отношения короче и удобнее: появились обозначения $\sin$ и $\cos$. Вместе с этим тригонометрия оформилась как отдельный раздел, а координатная плоскость и окружность помогли увидеть знакомые связи по-новому.

Где встречаются синус и косинус в жизни и науке



Иллюстративное распределение типичных учебных и прикладных примеров

Чаще всего школьники видят эти функции в задачах по геометрии и физике, но их роль заметна и в технологиях.

Диаграмма показывает, что синус и косинус полезны не только в школе: они описывают движение, направления и форму сигналов.

Типичные ошибки при изучении темы



1. Путают формулы

Синус иногда принимают за отношение прилежащего катета к гипотенузе, хотя это формула косинуса. Чтобы не ошибиться, полезно каждый раз проговаривать, какая сторона лежит напротив угла.

2. Берут не ту сторону

В задаче важно сначала выбрать именно тот острый угол, о котором идёт речь, а затем определять противолежащий и прилежащий катеты. Без этого можно составить неверное отношение.

3. Забывают про четверть

При углах больше 90° значение функции зависит от четверти, в которой находится точка на окружности. Если не учесть знак, ответ может оказаться по модулю верным, но неверным по знаку.

4. Не проверяют ответ

Хорошая привычка — сравнивать результат с размером треугольника и диапазоном функции. Если ответ больше гипотенузы или выходит за пределы от -1 до 1 , значит, допущена ошибка.



Что нужно знать и уметь после изучения темы

Находить $\sin$ и $\cos$

Уметь определять синус и косинус в прямоугольном треугольнике по выбранному углу и правильно использовать формулы с катетами и гипотенузой.

Читать окружность

Понимать, что на единичной окружности косинус задаёт абсциссу точки, а синус — ординату, и находить их по положению точки.

Помнить основные значения

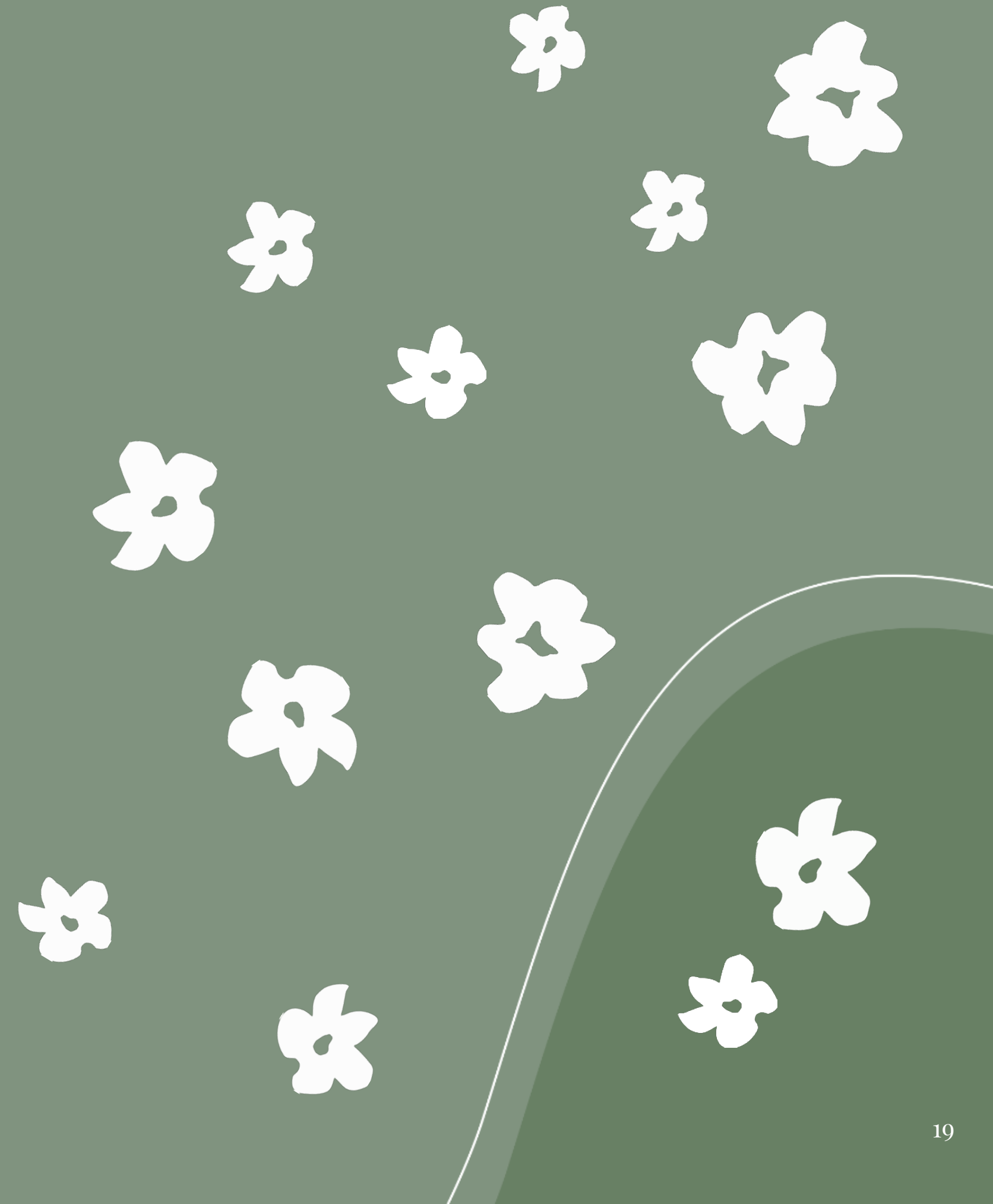
Воспроизводить значения для 0° , 30° , 45° , 60° и 90° без калькулятора и использовать их как опорные в задачах.

Определять знаки

Быстро устанавливать знак синуса и косинуса в каждой из четырёх четвертей, ориентируясь на положение точки относительно осей.

Понимать графики

Узнавать форму графиков $y = \sin x$ и $y = \cos x$, видеть их периодичность и понимать, почему значения повторяются.



Синус и косинус — один угол, два способа описания

Синус и косинус показывают связь угла с треугольником и с координатной плоскостью. Эти функции помогают решать задачи, читать графики и понимать повторяющиеся процессы вокруг нас.