

Подобие треугольников: основная идея темы

Подобные треугольники совпадают по форме, но
меняются по размерам; разберём признаки и
применение в задачах 8 класса.



Где встречается подобие в жизни и в геометрии

В черчении, архитектуре и картографии масштаб помогает переносить размеры на план. Масштаб 1:100 означает: 1 см на схеме соответствует 100 см в реальности. Подобие появляется и в измерениях по тени.



Что означает, что треугольники подобны

Если треугольники подобны, то равны все соответствующие углы: каждый угол одного треугольника равен «своему» углу другого.

Соответствующие стороны пропорциональны: их отношения одинаковы, поэтому форма сохраняется, даже если фигуры становятся больше или меньше.

При коэффициенте подобия 2 все стороны второго треугольника в 2 раза длиннее соответствующих сторон первого; обозначают это так: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Коэффициент k показывает, во сколько раз
меняются длины при сохранении формы и
соответствующих углов.

$$k = 3$$

**Значит, больший
треугольник в три раза
больше меньшего по
длинам
соответствующих сторон.**

Три признака подобия треугольников

Подобие можно доказать, используя любой один признак: нужно проверить подходящие равенства или пропорции.

Достаточно одного признака: если выполнено условие хотя бы для одной строки таблицы, подобие доказано.

Признак	Условие	Что доказываем
По двум углам	2 угла равны	Треугольники подобны
По двум сторонам и углу	стороны пропорциональны, угол между ними равен	Треугольники подобны
По трём сторонам	стороны пропорциональны	Треугольники подобны

Первый признак: по двум углам

Если два угла одного треугольника равны двум углам другого, то третий угол автоматически тоже равен, потому что сумма углов треугольника равна 180° .

Треугольники при этом сохраняют «поворот» формы: каждый угол находит пару, а значит стороны окажутся в тех же пропорциях.

Признак особенно удобен в задачах с параллельными прямыми: там часто находят равные накрест лежащие или соответственные углы.

Второй признак: по двум сторонам и углу между ними

Треугольники подобны, когда две стороны одного пропорциональны двум сторонам другого, а угол между этими сторонами равен.

Удобно проверять отношения сторон: например, если пары сторон имеют одинаковое отношение, а центральный угол совпадает, то форма повторяется с масштабом.

В приведённом подходе отношения 4:8 и 6:12 равны, то есть пропорция выполняется, а равенство угла «закрепляет» соответствие сторон.

Этот признак часто выбирают, когда известны длины двух сторон и один угол, и нужно понять, есть ли подобие.

Третий признак: по трём сторонам

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого, то треугольники подобны без необходимости искать углы.

Такой признак особенно полезен в задачах, где даны только длины сторон: решение строится на проверке одинаковых отношений.

Например, пары сторон 3, 4, 5 и 6, 8, 10 дают одинаковые отношения 1:2: каждая сторона второго треугольника в 2 раза больше соответствующей.

Как изменяются соответствующие стороны

На диаграмме показано, что каждое отношение «большая сторона : меньшая сторона» равно 2, поэтому коэффициент подобия постоянен.

Если все три пары соответствующих сторон дают один и тот же множитель, значит треугольники связаны именно коэффициентом $k = 2$.



Что сохраняется и что меняется при подобии

При подобии сохраняются все соответствующие углы, а значит форма треугольников не меняется — они лишь масштабируются.

Отличаются длины сторон: соответствующие стороны растут или уменьшаются в одном и том же отношении, равном коэффициенту подобия.

Периметры тоже меняются по тому же правилу: во сколько раз изменяются стороны, во столько же меняется и периметр.

Площадь изменяется сильнее: она увеличивается в квадрате коэффициента подобия, то есть при $k = 2$ — в 4 раза, при $k = 3$ — в 9 раз.

Подобие через тени и солнечные лучи

Как возникает подобие в природе

Солнечные лучи падают примерно параллельно, поэтому треугольник «высота-тень» получается с теми же углами, что и треугольник для другого объекта. Отношения сторон остаются неизменными.

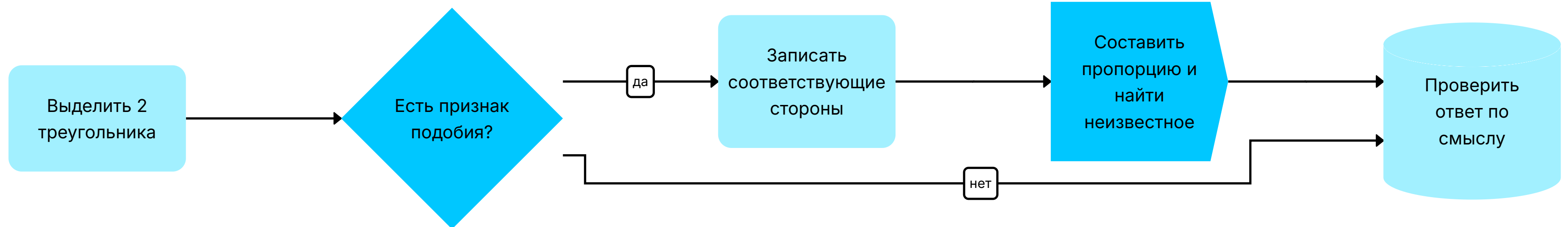
Как находят высоту по длине тени

Если измерить длину тени и высоту человека, можно вычислить высоту дерева по пропорции. Угол падения света один и тот же, значит треугольники сохраняют подобие, а вычисления становятся надежными.



Алгоритм решения задач на подобие

Четыре шага: выделить треугольники, проверить признак, сопоставить стороны, составить пропорцию; затем проверить смысл и единицы.



Типичные ошибки в задачах на подобие



Путают соответствующие стороны

Часто неверно сопоставляют вершины и из-за этого в пропорцию попадают не те отрезки. Тщательно отметьте, какие стороны лежат между одинаковыми углами, и только потом сравнивайте отношения.



Смешивают порядок отношений

Ещё одна ошибка — записать отношения «в разную сторону»: сторону из одного треугольника делить на сторону из другого не в той паре. Используйте одинаковую нумерацию соответствующих элементов во всей задаче.



Признак применяют без опоры на данные

Нельзя считать треугольники подобными, если равенство углов или пропорциональность сторон не подтверждены условием. Сначала проверьте, какой именно признак работает: по углам, по стороне-углу или по трём сторонам.

Подобные и равные треугольники



Свойство	Равные треугольники	Подобные треугольники
Коэффициент k	$k = 1$	$k > 0$
Форма	одинакова	одинакова
Углы	равны	равны

Сравните свойства: у равных треугольников совпадает размер, у подобных — только форма. По соответствующим углам они одинаковы в обоих случаях.

Равные треугольники — частный случай подобия: они всегда подобны. Но подобие не гарантирует равенство размеров, поэтому k может быть не равным 1.



Подобие на координатной плоскости

Масштабирование

На координатной плоскости фигуру можно увеличить или уменьшить в одном и том же масштабе. Это делают так, чтобы все координаты менялись пропорционально одному числу.

Сохранение формы

Если вершины изменяются с одним коэффициентом, то углы остаются теми же, а стороны растут или уменьшаются одинаковыми долями. Форма треугольника сохраняется.

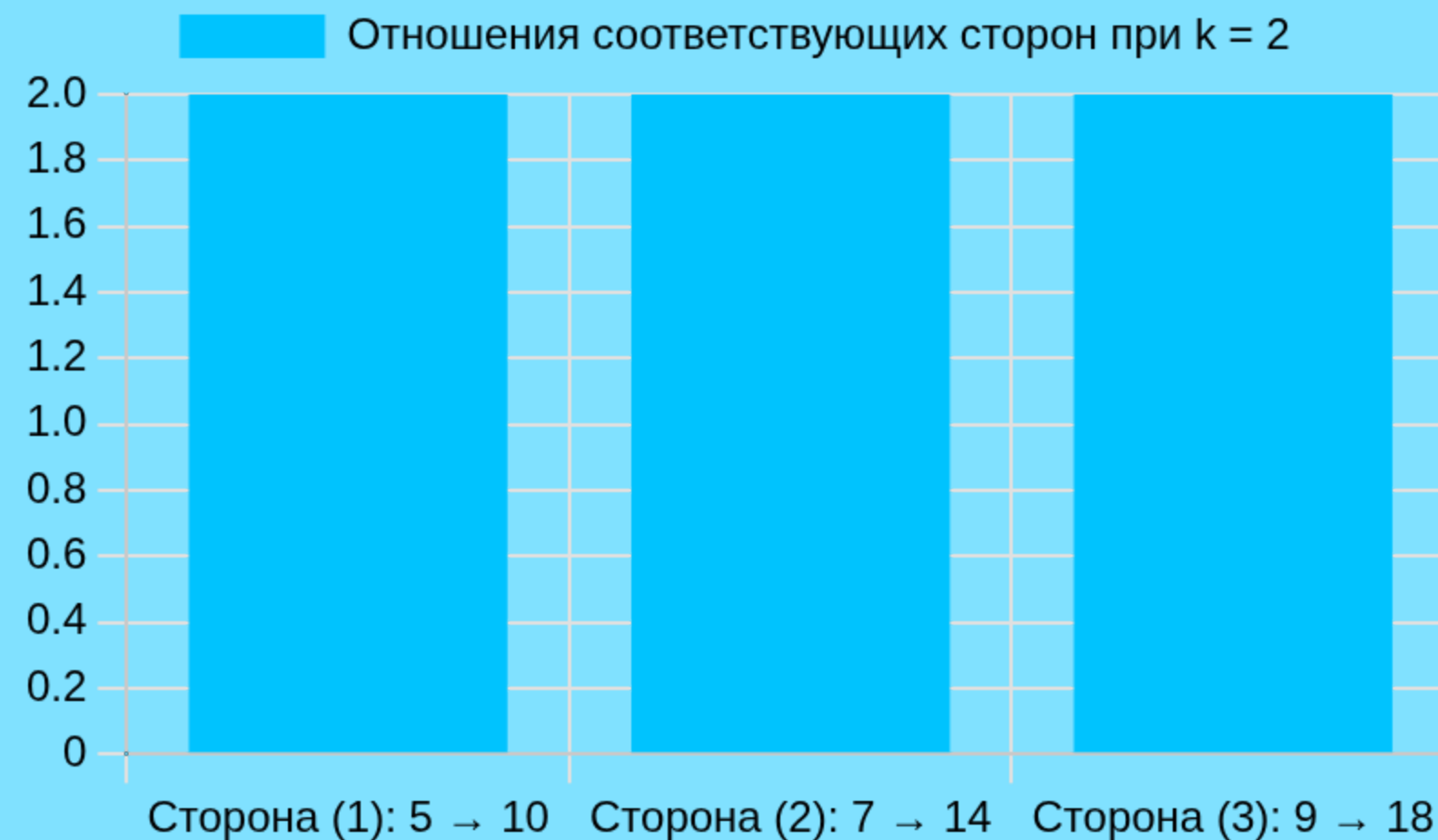
Практический смысл

Такое представление помогает сравнивать фигуры на сетке и переносить идеи масштаба из чертежей и карт. Можно проверять результаты задач и находить стороны по пропорции.

Пропорции сторон в примере

Так как коэффициент подобия один и тот же, отношения длин для всех трёх пар сторон совпадают. Поэтому можно находить любую сторону по двум данным значениям.

Диаграмма показывает: при увеличении в 2 раза форма сохраняется, а все стороны «масштабируются» одинаково. Это и есть смысл коэффициента подобия.



Условие примера: стороны 5, 7, 9 и 10, 14, 18 ($k = 2$)

Исторические и практические применения подобия

Подобие использовали землемеры и строители: по чертежам и наблюдениям они находили расстояния и высоты, не добираясь до трудных объектов напрямую. Идея работает из-за сохранения углов.

Картографы применяли подобные построения, чтобы переносить измерения с местности на бумагу. Масштаб позволяет связать отрезки на карте и соответствующие расстояния в реальности через пропорции.

Сегодня подобие встречается в дизайне и архитектурных проектах, при навигации и в компьютерной графике. Масштабирование объектов помогает быстро получать нужные формы и размеры.

Связь подобия с другими темами геометрии

Подобие тесно связано с параллельными прямыми: равные углы, возникающие при пересечении параллелей, часто становятся основой для доказательства подобия треугольников.

Связь есть и с биссектрисой, а также с построениями высоты и медианой. Эти элементы помогают выделять новые треугольники и находить пропорциональные отрезки.

При пересечении прямых важны углы и их свойства: когда удаётся показать равенство соответствующих углов, признаки подобия срабатывают даже без прямых измерений.

Поэтому в задачах часто объединяются сразу несколько идей: параллельные прямые дают углы, а пропорции приводят к неизвестной стороне или расстоянию. Подобие становится «мостом» между темами.

Главные формулы и соотношения

Ключевые зависимости при подобии: стороны масштабируются в k раз, периметры — тоже в k раз, а площади — в k^2 раз. Используйте их как готовые правила для задач.

Эти соотношения объясняют, почему для площадей всегда нужен квадрат коэффициента. Благодаря этому можно быстро проверять вычисления и избегать типичных ошибок.

Величина	Масштаб при k	Пример
Стороны	k	$k=2 \rightarrow \times 2$
Периметры	k	$k=3 \rightarrow \times 3$
Площади	k^2	$k=1,5 \rightarrow \times 2,25$

Итоги темы: зачем нужно подобие треугольников

Подобие помогает находить неизвестные размеры через пропорции и равные углы. В основе лежат три признака, коэффициент подобия и правила для сторон, периметров и площадей, важные для 8 класса.