



Распределительные законы умножения векторов на число

Умножаем векторы, раскрывая скобки и сохраняя точность вычислений.



Зачем это нужно в геометрии

Эти законы помогают быстрее считать, упрощать записи и проверять равенства векторных выражений на плоскости.



|k|

**задаёт, во сколько раз изменится
длина вектора после умножения.**

Коэффициент определяет
масштаб вектора: чем больше
его модуль, тем сильнее
меняется длина.

Свойства умножения вектора на число
в школьной геометрии

Первый распределительный закон

.1

Сумма в скобках

Сначала складывают векторы a и b , а затем умножают полученный вектор на число k . Так выражение $k(a+b)$ читается как одно действие над суммой.

.2

Умножение по частям

То же самое можно сделать иначе: умножить каждый вектор на k отдельно и затем сложить результаты. Это даёт $ka+kb$ и тот же итоговый вектор.

.3

Главный вывод

Закон $k(a+b)=ka+kb$ верен для любых векторов и любых действительных чисел, поэтому его можно применять в самых разных задачах.

.1

Сумма коэффициентов

Если один и тот же вектор a умножается на сумму чисел k и m , можно сначала сложить коэффициенты, а потом выполнить одно умножение.

.2

Разделение действия

Либо умножить вектор на каждое число отдельно, а затем сложить полученные векторы. Так выражение $(k+m)a$ превращается в $ka+ma$.

.3

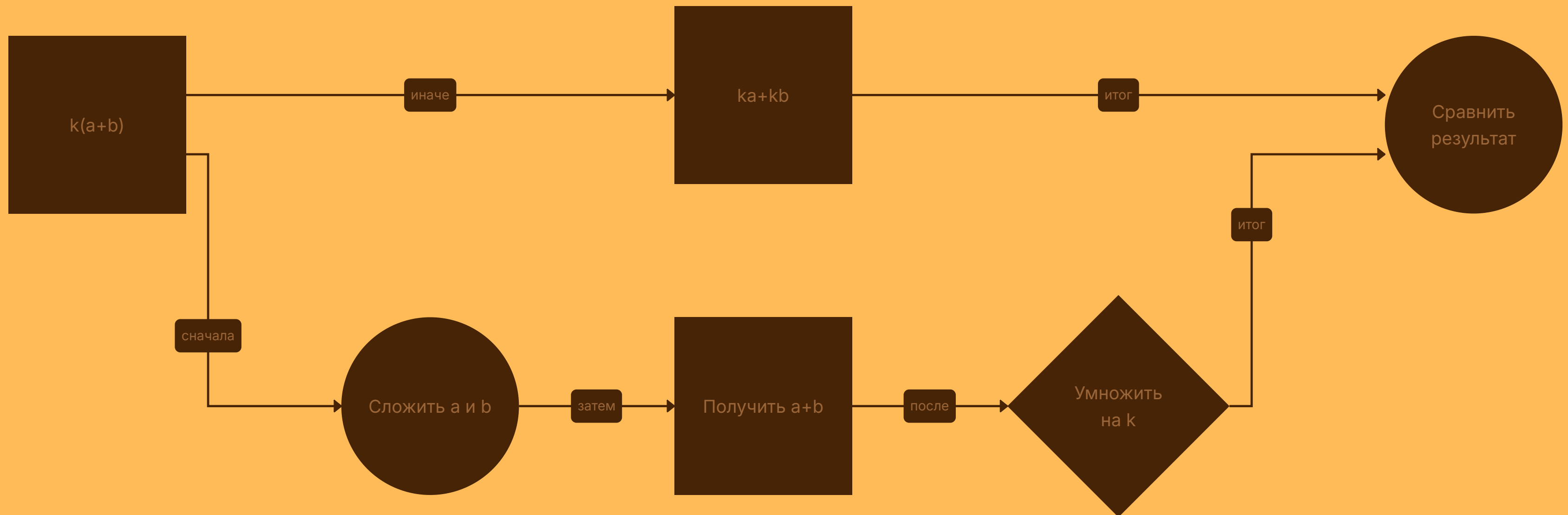
Что это даёт

Закон показывает, что сумма чисел и сумма векторов могут давать одинаковый результат при правильной последовательности действий.

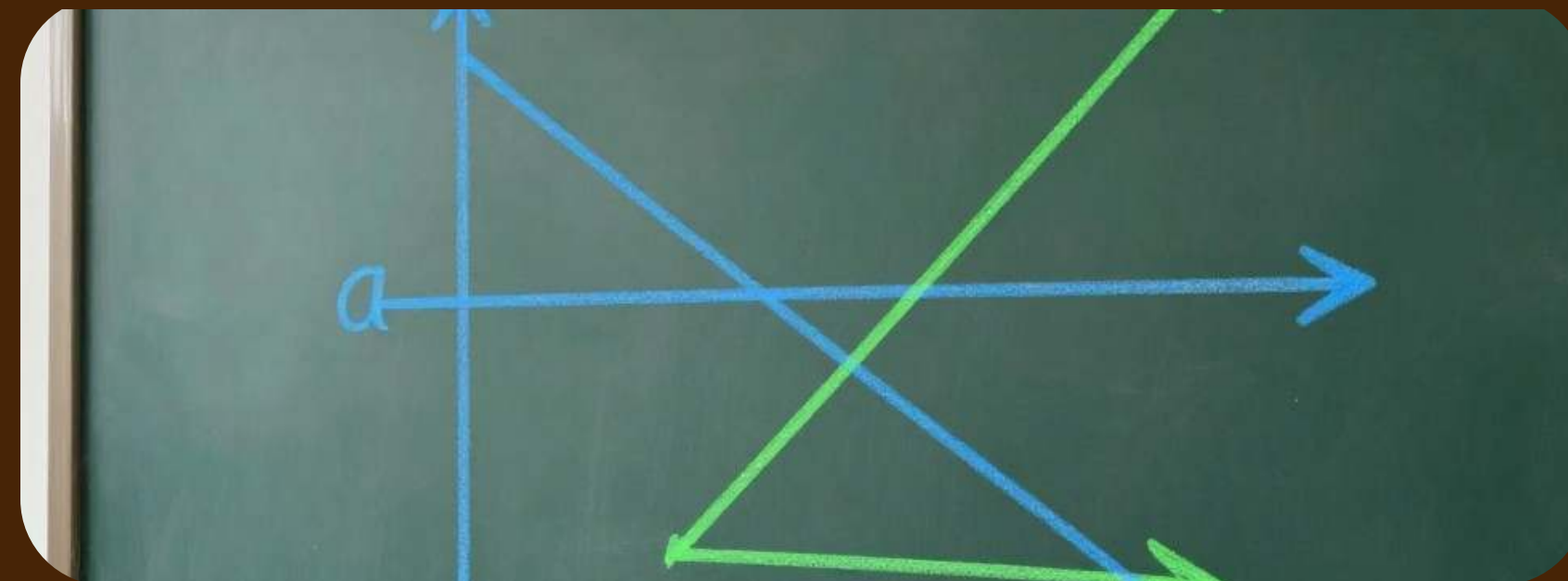
Второй распределительный закон

Как проверить первый закон

Последовательность действий для выражения $k(a+b)$



Геометрический смысл распределительного закона



- **Векторы на плоскости**

На чертеже вектор изображают направленным отрезком. Его длина показывает величину, а стрелка указывает направление, поэтому любое умножение легко увидеть визуально.

- **Что меняется при умножении**

Если число положительное, направление сохраняется. Если число отрицательное, вектор разворачивается в противоположную сторону, а длина изменяется по модулю коэффициента.

- **Сумма и преобразование**

На рисунке обычно показывают исходные векторы a и b , затем их сумму $a+b$ и результат после умножения на k , чтобы увидеть действие закона.

- **Зачем нужен рисунок**

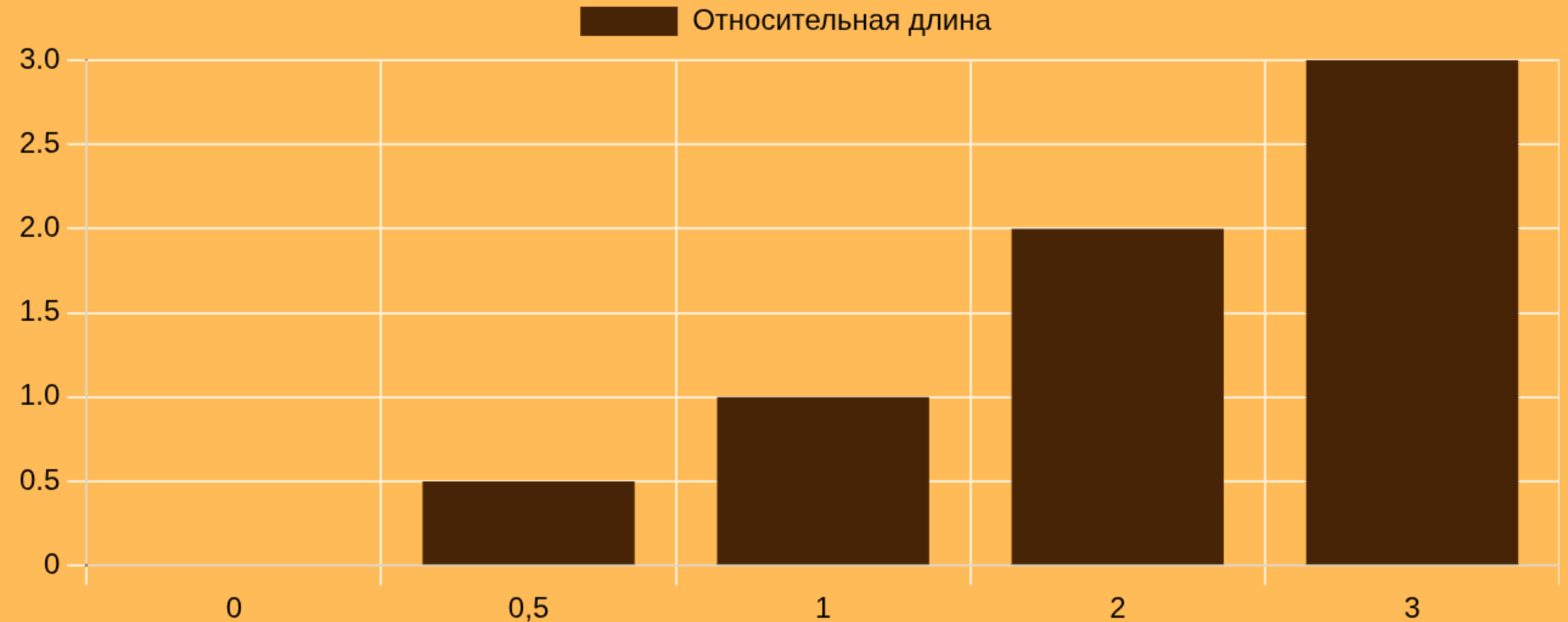
Геометрическая схема помогает не путать порядок действий и лучше понимать, почему два разных способа вычисления приводят к одному и тому же вектору.

Как коэффициент влияет на длину вектора

При отрицательных коэффициентах длина остаётся по модулю той же, но направление меняется на противоположное.

Чем больше модуль коэффициента, тем сильнее растягивается или сжимается вектор; нулевой коэффициент даёт нулевой вектор.

Свойства умножения вектора на число в школьной геометрии



Пример с координатами векторов

.1

Складываем векторы

Для $a=(2; 1)$ и $b=(1; 3)$ находим сумму: $a+b=(3; 4)$. Это первый шаг к проверке закона на координатах.

.2

Умножаем вместе

Если умножить сумму на 2, получаем $2(a+b)=2(3; 4)=(6; 8)$. Здесь число действует сразу на обе координаты.

.3

Проверяем по частям

Отдельно имеем $2a=(4; 2)$ и $2b=(2; 6)$, поэтому $2a+2b=(6; 8)$. Оба пути дают одинаковый результат.

Проверка распределительного закона на нескольких примерах

В таблице сравниваются два способа вычисления: умножение суммы векторов и сумма отдельных умножений.

Во всех примерах оба способа дают одинаковые координаты, значит закон работает для любых действительных коэффициентов.

Свойства действий над векторами в школьной геометрии

a	b	k	$k(a+b)$	$ka+kb$
(1; 0)	(0; 2)	3	(3; 6)	(3; 6)
(-1; 1)	(2; 4)	-2	(-2; -10)	(-2; -10)
(3; -1)	(-2; 1)	1,5	(1,5; 0)	(1,5; 0)

Почему закон выполняется

По координатам

Если вектор задан координатами, то умножение на число действует на каждую координату отдельно. Поэтому сначала можно сложить координаты, а затем умножить результат, или сделать наоборот.

Одинаковый результат

В обоих случаях получается один и тот же вектор, потому что порядок действий не меняет итог. Меняется только форма записи, а не сама геометрическая сущность выражения.

Связь с алгеброй

Это свойство похоже на обычное раскрытие скобок в числах. Векторная запись сохраняет ту же логику, но дополнительно учитывает направление и длину каждого вектора.

Универсальность правила

Закон работает для любых действительных чисел и любых векторов на плоскости. Именно поэтому его удобно применять в задачах, где нужно быстро упростить выражение.

Связь с координатной записью



- **Каждая координата отдельно**

Если векторы заданы парами чисел, то распределительный закон можно проверить по каждой координате. Сумма векторов и умножение на число выполняются независимо для первой и второй координаты.

- **Два способа записи**

Для первого закона выражение $k(a+b)$ превращается в k , умноженное на сумму координат. Для второго закона сумма чисел сначала складывается, а затем умножается на координаты вектора.

- **Проверка на плоскости**

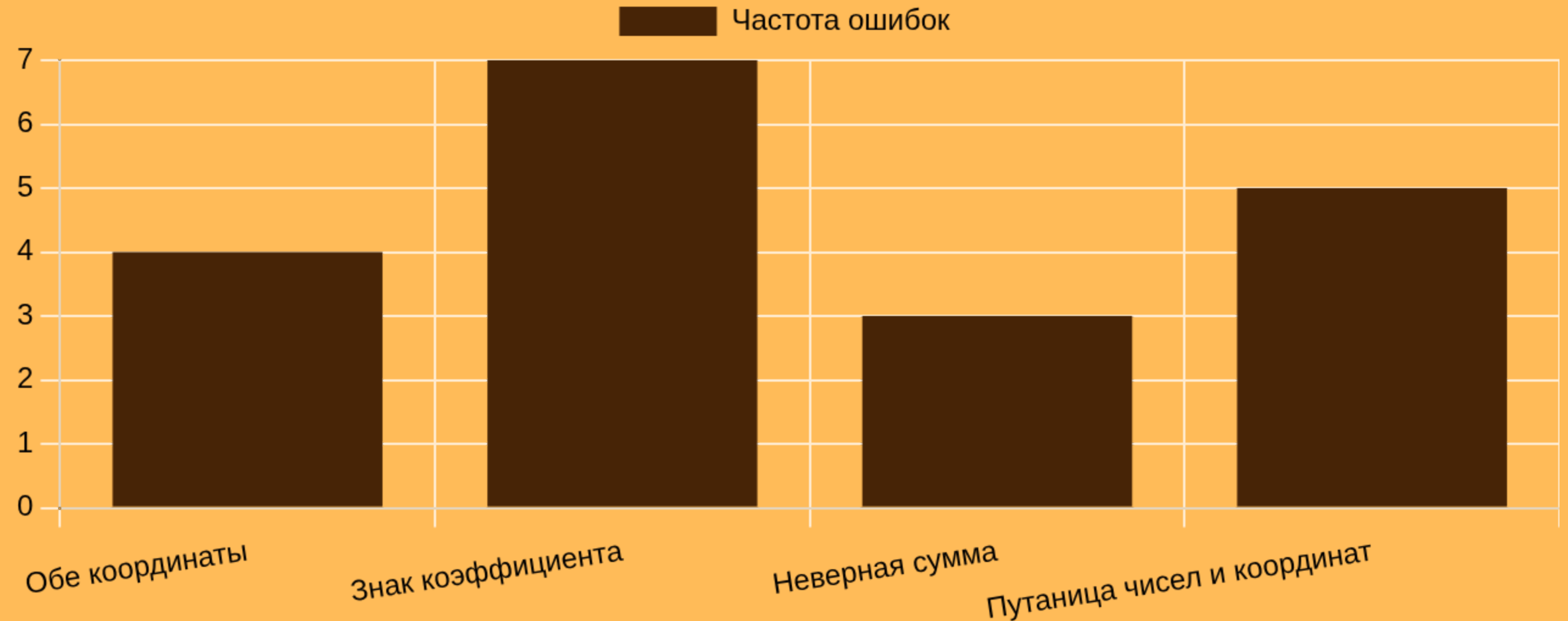
Координатная запись помогает быстро увидеть, что векторные формулы повторяют обычные арифметические правила. Поэтому сложные выражения с векторами можно сводить к простым вычислениям.

Типичные ошибки при работе с векторами

Диаграмма показывает не школьные оценки, а относительную распространённость ошибок при выполнении преобразований с векторами. Наиболее рискованны случаи с отрицательным коэффициентом.

Чаще всего ошибаются в знаке, потому что при отрицательном числе меняется направление вектора. Остальные ошибки связаны с невнимательностью при записи формул.

Обобщение типичных ошибок по теме «векторы и умножение на число»



Аналогия с раскрытием скобок в числах

Сначала — числа

В арифметике ученики учатся раскрывать скобки: произведение числа на сумму равно сумме произведений. Это правило становится привычным примером для дальнейшего сравнения.

Похожий итог

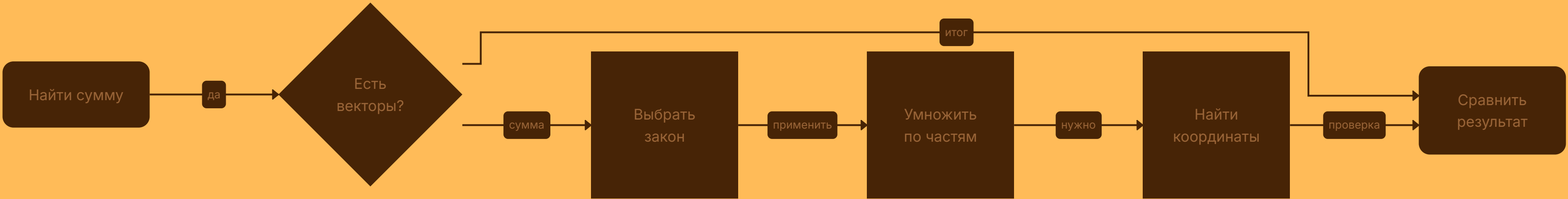
После раскрытия скобок обе записи дают одинаковый результат, если действия выполнены верно. Поэтому алгебраическая привычка помогает легче понимать векторные формулы.

Затем — векторы

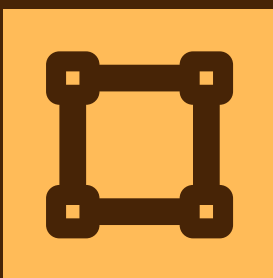
В векторных выражениях работает тот же принцип: число распределяется по сумме векторов. Разница только в том, что каждый результат имеет направление и длину.

Алгоритм применения законов в задачах

Последовательность действий при работе с распределительными законами



Где используются распределительные законы



Упрощение выражений

Законы помогают сокращать длинные векторные записи, когда нужно раскрыть скобки или сгруппировать слагаемые. Это делает решение задачи короче и понятнее для проверки.



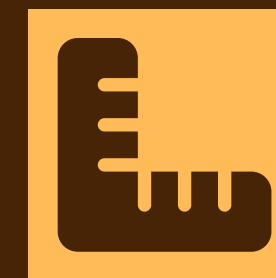
Проверка равенств

Если выражения выглядят по-разному, их можно привести к одинаковому виду. Тогда легче убедиться, что два векторных выражения действительно равны.



Координатные задачи

При работе с координатами распределительное свойство позволяет быстро считать результат без лишних построений. Особенно удобно это в задачах на плоскости и в прямоугольной системе.



Геометрические построения

Свойство часто используют при работе с отрезками, серединами и суммами перемещений. Оно помогает выразить неизвестный вектор через известные и перейти к удобной форме.

Сравнение двух распределительных законов

В таблице сопоставлены две основные формулы темы и показано, что именно распределяется в каждом случае.

Обе формулы описывают одно и то же распределительное свойство, но применяются к разным частям записи: к сумме векторов или к сумме чисел.

Школьные свойства действий над векторами

Закон	Формула	Распределяется	Смысл
Первый	$k(a+b)=ka+kb$	число	по сумме векторов
Второй	$(k+m)a=ka+ma$	вектор	по сумме чисел

Пример из движения и перемещения



Два одинаковых участка пути

Представим, что ученик идёт по двум отрезкам в одном направлении. Каждый отрезок можно обозначить вектором перемещения, а весь маршрут — их суммой. Тогда распределительное свойство помогает увидеть общий результат без отдельного подсчёта каждого шага.



Быстрее или дольше

Если движение продолжается вдвое дольше при той же скорости, перемещение тоже увеличивается в два раза. На рисунке это удобно показать как один и тот же вектор, умноженный на число, и как маршрут из двух равных частей.

.1

Первая формула

Запомните правило $k(a+b)=ka+kb$: число распределяется на каждый вектор в сумме. Это помогает раскрывать скобки и сразу получать более удобную запись выражения.

.2

Вторая формула

Формула $(k+m)a=ka+ma$ показывает, что один и тот же вектор можно умножить на каждое слагаемое отдельно. Затем полученные векторы складываются без потери смысла.

.3

Знак имеет значение

При отрицательном коэффициенте вектор меняет направление, а его длина остаётся связанной с модулем числа. Поэтому знак нужно проверять особенно внимательно.

.4

Проверка координатами

Если есть сомнение, подставьте координаты и выполните вычисления по частям. Совпадение результатов — надёжный способ убедиться, что распределительный закон применён верно.

Что важно запомнить

Главное о распределительных законах

Распределительные законы делают работу с векторами понятной и аккуратной: они сокращают вычисления, помогают переходить от геометрии к координатам и уверенно решать задачи 9 класса.