

Парабола: основное понятие, свойства и применение



Парабола связывает геометрию, алгебру и реальные траектории, превращая формулы в наглядные формы.

Почему парабола — ключ к квадратным зависимостям



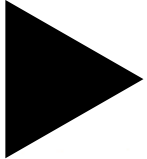
На старте 10 класса вы переходите от прямых зависимостей к квадратным. Парабола помогает понимать траектории движения, выбирать оптимальные значения и видеть, как графики, уравнения и геометрия работают вместе.



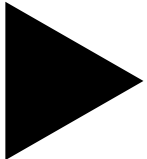
Геометрическое определение параболы



Парабола — это множество точек плоскости, для которых расстояния до фокуса и до директрисы равны. Такое определение относится к коническим сечениям.

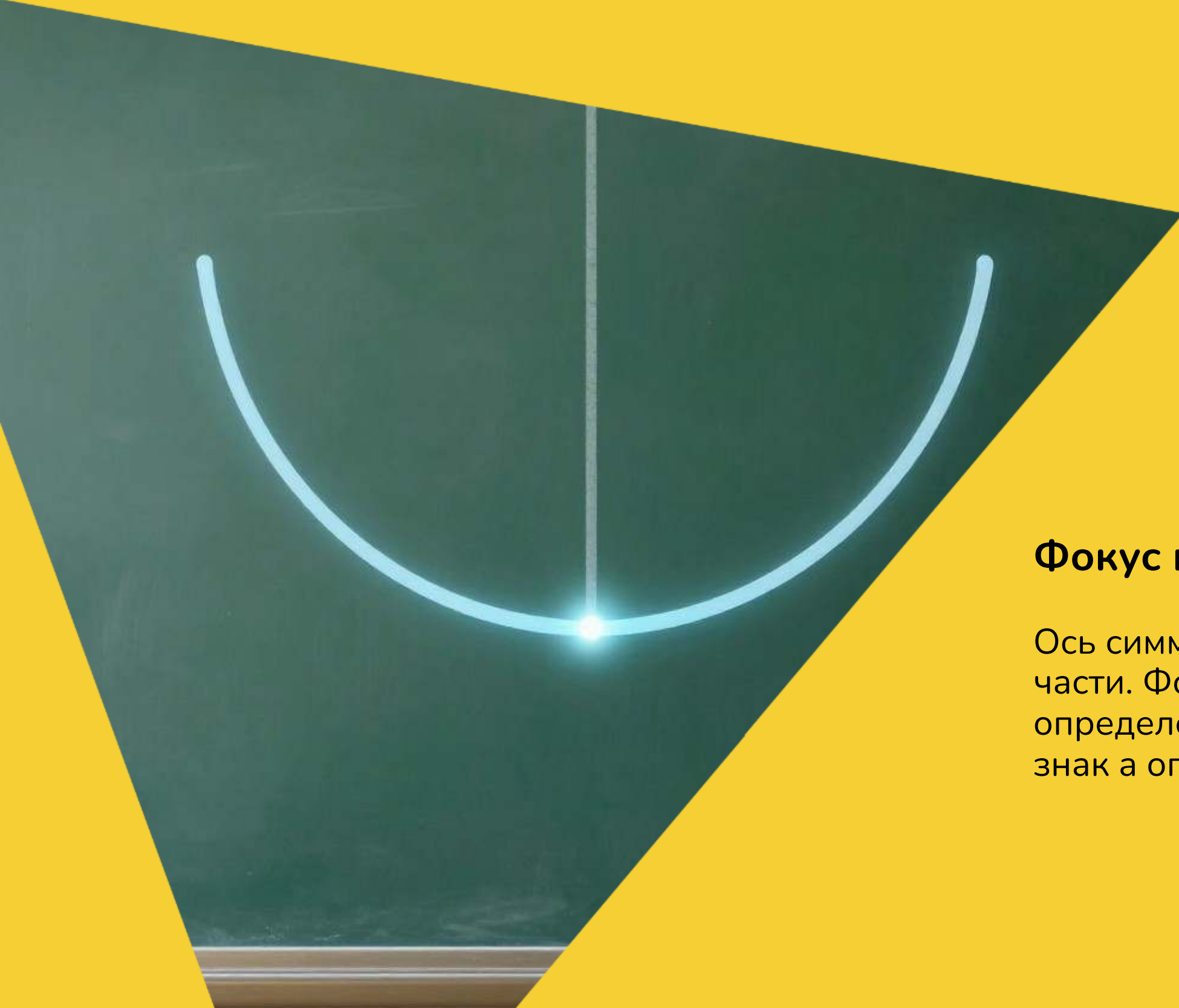


Равенство двух расстояний задаёт строгую геометрию: точка «одинаково близка» как к фокусу, так и к фиксированной прямой. Это объясняет характерную форму кривой.



Именно это свойство лежит в основе отражательных эффектов и симметрии параболы: если переместить точку относительно оси симметрии, расстояния сохраняются.

Основные элементы параболы на чертеже



Вершина, ось симметрии и ветви

Вершина параболы — точка минимума или максимума квадратной функции. Она лежит на оси симметрии и определяет «направление» всей кривой на графике.

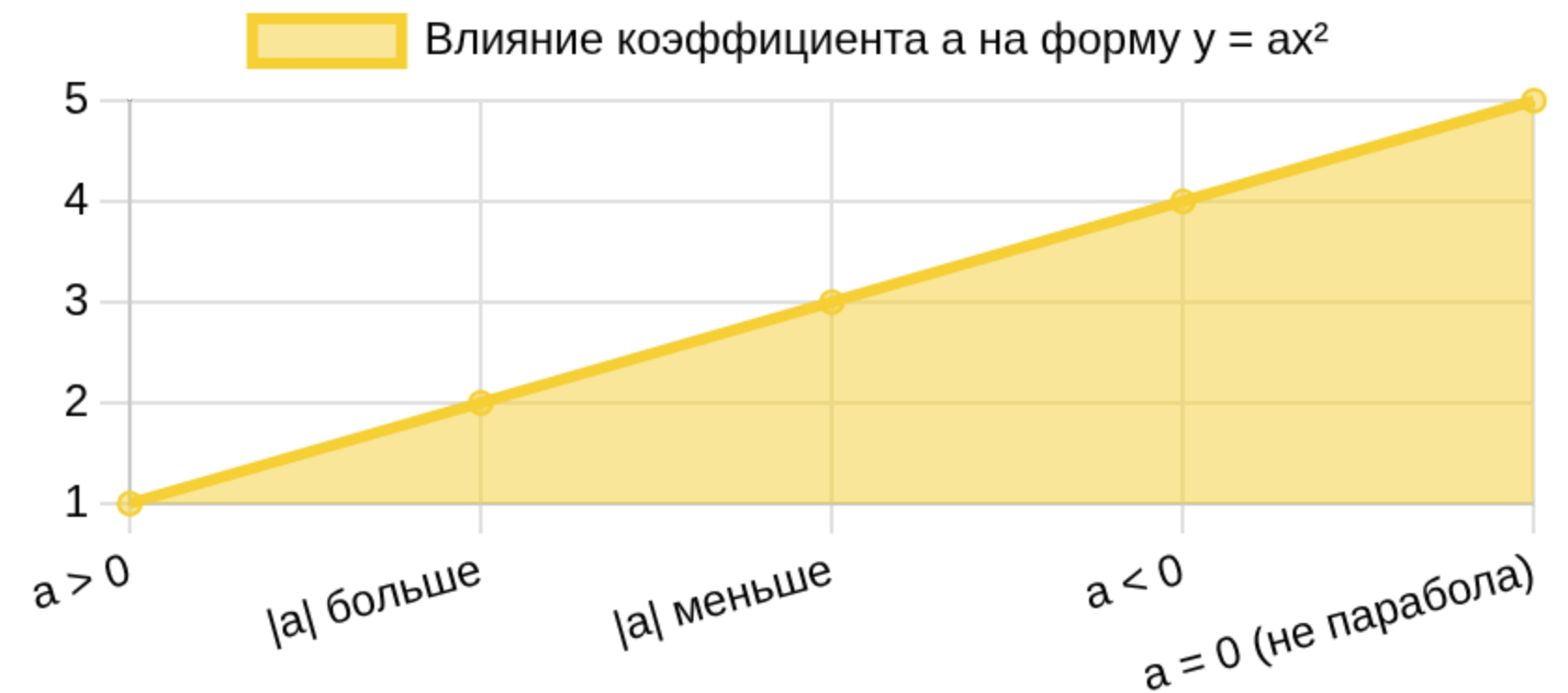
Фокус и директриса

Ось симметрии делит параболу на две зеркально равные части. Фокус и директриса входят в геометрическое определение: расстояния от любой точки до них равны; знак a определяет, куда «смотрят» ветви.

Как коэффициент a меняет параболу

При $a=0$ получаем линейную или константную функцию, поэтому парабола как кривая второго порядка исчезает.

По данным видно: знак a задаёт ориентацию ветвей, а величина $|a|$ — «крутизну» и ширину графика.



Школьный курс алгебры 10 класса; качественная зависимость по знаку и модулю a .

Вершинная форма квадратной функции

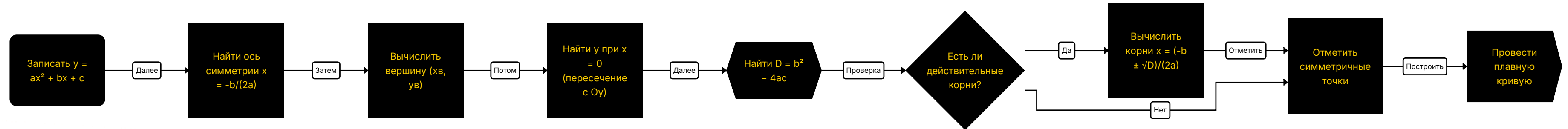
▶ Вершинная форма записывается как $y = a(x - h)^2 + k$. Точка (h, k) — вершина параболы: именно вокруг неё концентрируется вся наглядность.

▶ Если $a > 0$, вершина даёт наименьшее значение функции (минимум). При $a < 0$ вершина соответствует наибольшему значению (максимум).

▶ Параметры h и k выполняют сдвиги: h переносит график по горизонтали, а k — по вертикали. Поэтому вершина сразу читается без лишних вычислений.

Построение параболы по формуле $y = ax^2 + bx + c$

Алгоритм анализа коэффициентов a , b , c и выделения ключевых точек графика



Формы записи квадратной функции

У разных формул разные «точки зрения»: какие свойства видны сразу, а какие нужно вычислять.

Выбор формы ускоряет решение: для экстремума — вершина, для пересечений с Ох — корневая, для вычислений — стандартная.

Форма	Выражение	Что видно сразу	Когда удобна
Стандартная	$y = ax^2 + bx + c$	Коэффициенты a, b, c ; D	Для дискриминанта и корней
Вершинная	$y = a(x - h)^2 + k$	Вершина (h, k) ; сдвиги	Для минимума/ максимума
Корневая	$y = a(x - x_1)(x - x_2)$	Нули x_1, x_2	Если корни известны

Школьный курс алгебры 10 класса.

Корни квадратного уравнения и пересечения с осью Ox

- ▶ Корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ находятся по формулам $x = (-b \pm \sqrt{D})/(2a)$, где $D = b^2 - 4ac$. Это напрямую связано с точками пересечения графика с осью Ox .
- ▶ Если $D > 0$, $\sqrt{D}$ существует и даёт два различных значения x . Тогда парабола пересекает ось Ox в двух точках — слева и справа от оси симметрии.
- ▶ При $D = 0$ получаем одно значение корня: $x = -b/(2a)$. В этом случае парабола касается оси Ox в единственной точке и не «пересекает» её.
- ▶ Если $D < 0$, действительных значений x нет, значит пересечений с осью Ox не будет. Геометрически парабола целиком расположена по одну сторону от оси Ox .

Парабола в физике: движение тела под действием тяжести

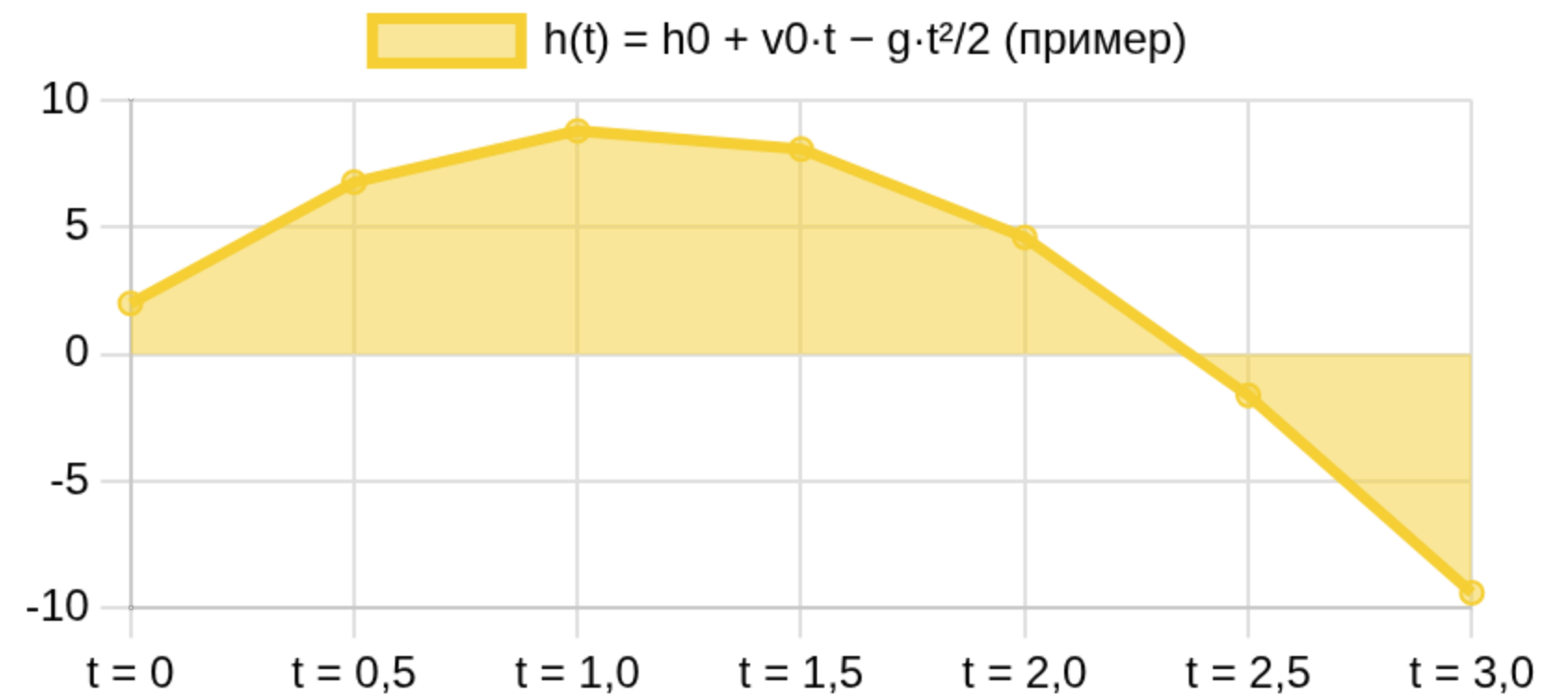
- При движении тела в поле тяжести без сопротивления воздуха траектория описывается зависимостями второго порядка. Высота над землёй меняется по квадратичному закону относительно времени.
- В идеализированной модели формула включает начальную высоту h_0 , начальную скорость v_0 и ускорение свободного падения $g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$. Это подходит, например, для броска мяча, струи воды или спортивного снаряда.



График изменения высоты во времени

Для идеального движения без сопротивления воздуха высота описывается квадратичной функцией: график растёт до момента максимума и затем убывает.

Вершина показывает наибольшую высоту, а ось симметрии делит траекторию по времени на «подъём» и «падение» при одинаковых скоростях по модулю.



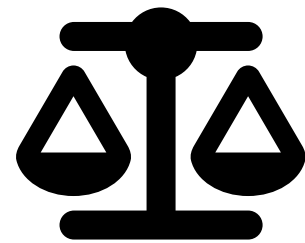
Пример для иллюстрации: $h_0=2$ м, $v_0=8$ м/с, $g=9,8$ м/с²; построение по дискретным t .

Как использовать параболу для поиска экстремума



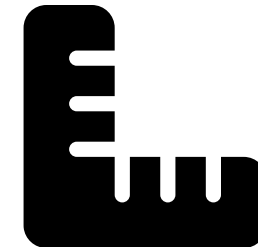
Единственный экстремум

У квадратной функции один экстремум, и он находится в вершине параболы. Поэтому поиск максимума или минимума сводится к определению координаты вершины и знака коэффициента a .



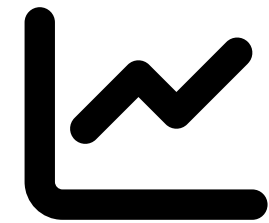
Знак a определяет тип

Если $a > 0$, ветви направлены вверх, а вершина даёт минимум. При $a < 0$ ветви направлены вниз, и вершина соответствует максимуму — это ключ для задач на оптимизацию.



Оптимальные размеры в геометрии

В задачах про площадь, длину и ограждения экстремум часто появляется при «правильном» размере. Парабола позволяет выразить величину через параметр и затем найти минимум или максимум.



Максимум прибыли и наименьшая стоимость

В прикладных сюжетах (прибыль, выручка, затраты) величина обычно зависит от некоторого параметра квадратично. Тогда оптимум — это вершина, а сравнение вариантов делает вычисления прозрачными.

Параболическая форма в инженерных и природных образах



Фокус в антеннах и прожекторах

Представьте источник в фокусе: отражающая поверхность «собирает» лучи так, что после отражения они идут параллельно оси. Благодаря этому параболические зеркала улучшают направленность сигналов в антеннах и качество освещения в прожекторах.



Световые отражатели в фарах

Автомобильные фары используют параболические отражатели, чтобы световой пучок формировался управляемо. Когда лампа расположена так, что лучи проходят по пути, близкому к законам отражения, итоговая картина становится более равномерной и дальнобойной для водителя.



Арки и несущие конструкции в архитектуре

Профиль параболы встречается в арочных формах, где важны распределение нагрузки и устойчивость. Изогнутая геометрия позволяет «поддерживать» конструкцию и делает силу тяжести менее концентрированной в отдельных точках пролёта.

Основные свойства параболы

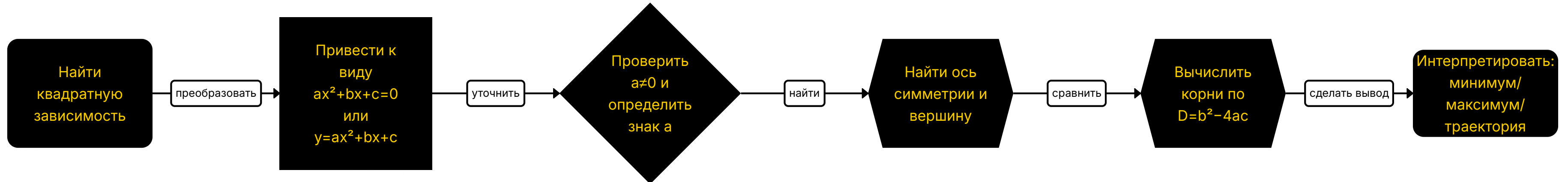
Элемент	Что видно на графике	Условие/ значение
Вершина и направление	Точка наибольшей высоты или наименьшей; ветви идут вверх/вниз	$a > 0$: минимум; $a < 0$: максимум
Ось симметрии	Делит график на две зеркальные части	Ось: $x = -b/(2a)$
Пересечения	Сколько точек у Ox и где лежит пересечение с Oy	Ox : $D > 0$ — 2, $D = 0$ — 1, $D < 0$ — 0; Oy : $(0, c)$

Связь между элементами параболы и тем, как это выглядит на графике: что видно сразу и что определяется через дискриминант.

По одному взгляду на знак a определяется тип экстремума, а по дискриминанту — число пересечений с осью Ox . Пересечение с Oy фиксировано координатой $(0, c)$.

План: как распознать параболу в задаче

Алгоритм используется, когда в условии встречается квадратная зависимость или уравнение второй степени.



Типичные ошибки при работе с параболой

- ▶ Путают вершину параболы с точкой пересечения с осью Oy . Вершина определяется значениями a , b и c , а пересечение с Oy происходит при $x=0$, поэтому это разные точки графика.
- ▶ Часто ошибаются в формуле оси симметрии: $x=-b/(2a)$. Если перепутать знак или коэффициенты, сместится ось, а вместе с ней — расчёт координаты вершины и вывод о симметрии.
- ▶ Неверно выбирают знак коэффициента a и из-за этого ошибочно читают направление ветвей: $a>0$ — ветви вверх, $a<0$ — вниз. Тогда тип экстремума также определяется неправильно и «ломается» решение.
- ▶ Смешивают корни уравнения с координатой вершины. Корни соответствуют пересечениям с осью Ox , а вершина — это максимум/минимум по y ; также игнорируют масштаб сетки при чтении графика.

Преобразования графика параболы

При замене $y=ax^2$ на $y=a'x^2$ меняется «крутизна»: увеличение $|a|$ делает параболу уже, а уменьшение — шире, сохраняя направление ветвей по знаку a .

Бар-диаграмма иллюстрирует: рост $|a|$ усиливает степень «сжатия» графика к вершине. При этом знак a по-прежнему отвечает за то, куда направлены ветви.



Иллюстрация на основе зависимости формы от $|a|$; шкала крутизны условная, t и b, c не учитывались.

Парабола вокруг нас: от спорта до оптики

Полет мяча как «живой» график

Короткий бросок и длинная дуга полёта напоминают параболу: высота меняется по квадратичному закону времени. Поэтому в школьных задачах движение тела обычно переводят в уравнение, чтобы видеть максимум и момент падения.



Струя воды и световые отражатели

Когда струя вылетает под углом и летит без сильных искажений потоком воздуха, её траектория становится близкой к параболе. Похожее «собирающее» поведение дают зеркальные поверхности и отражатели, которые формируют направленный эффект.



Краткий алгоритм решения квадратной задачи

Пошаговая схема помогает перейти от формы уравнения к вычислению корней, вершины, оси симметрии и геометрической интерпретации.

Сначала дискриминант экономит усилия, затем корни и вершина дают полную картину графика. Последний шаг закрепляет математический результат в прикладном смысле.

Шаг	Что делаем	Результат
1	Приводим вид	Получаем $ax^2+bx+c=0$
2	Считаем D	Понимаем число корней
3	Находим корни	Если $D\geq 0$, получаем x
4	Вершина и ось	Схема максимума/минимума
5	Определяем ветви	По знаку a: вверх/вниз
6	Интерпретация	Связь с графиком/ситуацией

Школьный курс алгебры: алгоритм решения квадратных уравнений.

Парабола — это математика, которая «видна» и в задачах, и в реальности

Изучение параболы соединяет геометрию, алгебру и модели движения: вы находите корни, вершину и экстремальные значения. Понимание разных форм и преобразований делает квадратные задачи понятнее и применимее.