

Как связаны вершины, стороны и окружность?

Вписанные и описанные многоугольники



Почему эта тема важна

Окружность помогает увидеть связь между длинами, углами и симметрией. Эти фигуры встречаются в чертежах, орнаментах, колесах и правильных многоугольниках, а в 9 классе помогают закрепить свойства окружности и четырёхугольников.

Что называют вписанным многоугольником

Вершины на окружности

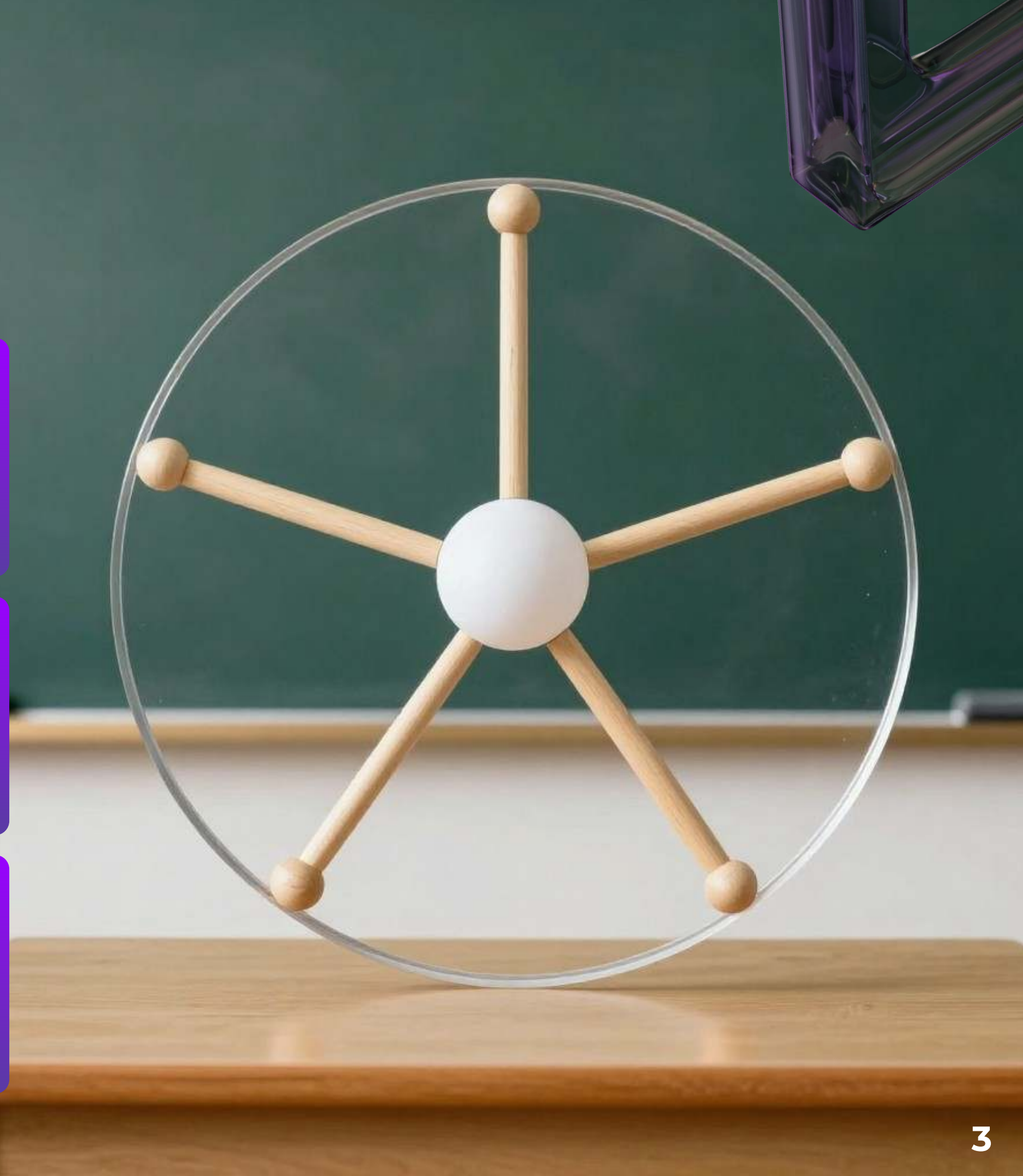
Вписанным называют многоугольник, все вершины которого лежат на одной окружности. Такая окружность называется описанной около многоугольника и проходит через каждую его вершину.

Центр окружности

Центр описанной окружности одинаково удалён от всех вершин. Это значит, что расстояния от него до каждой вершины равны, а радиусы, проведённые к ним, тоже равны.

Примеры фигур

Вписанными могут быть любой треугольник, квадрат и правильный пятиугольник. У правильных многоугольников вершины всегда лежат на одной окружности, поэтому они особенно удобны для изучения.



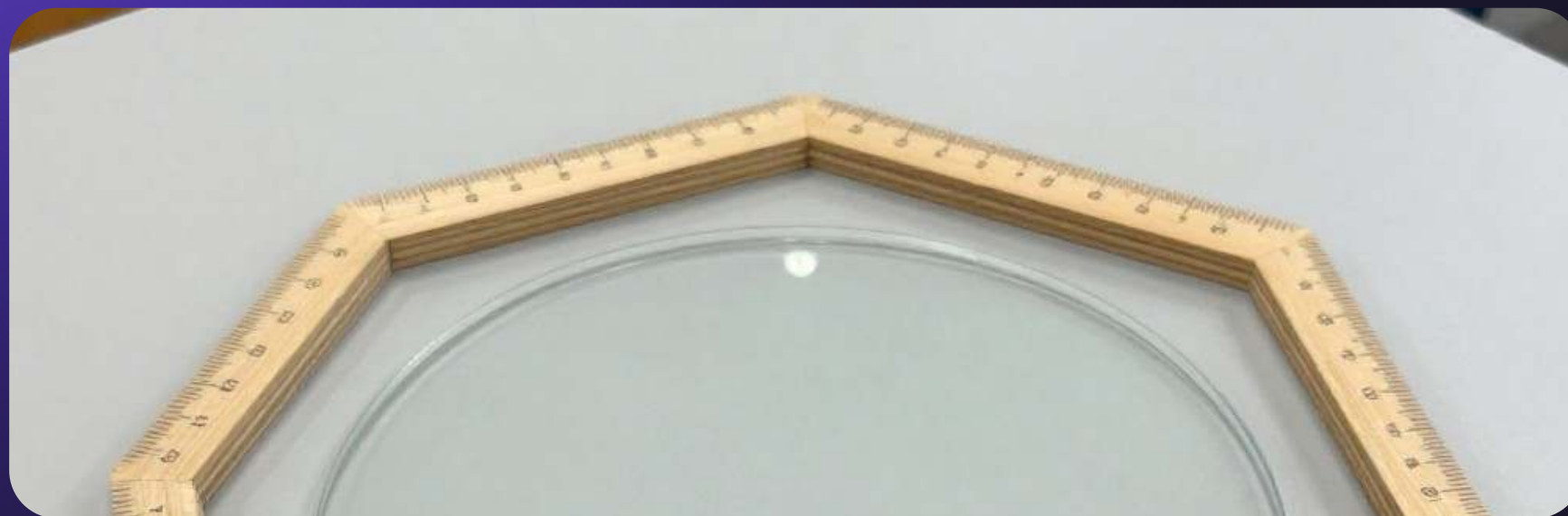
Что называют описанным многоугольником

01 Стороны касаются окружности

Описанным называют многоугольник, все стороны которого касаются одной окружности. Такая окружность находится внутри фигуры и называется вписанной в многоугольник.

02 Центр и расстояния

Центр вписанной окружности одинаково удалён от всех сторон многоугольника. Это означает, что от него к каждой стороне можно провести равные перпендикулярные отрезки.

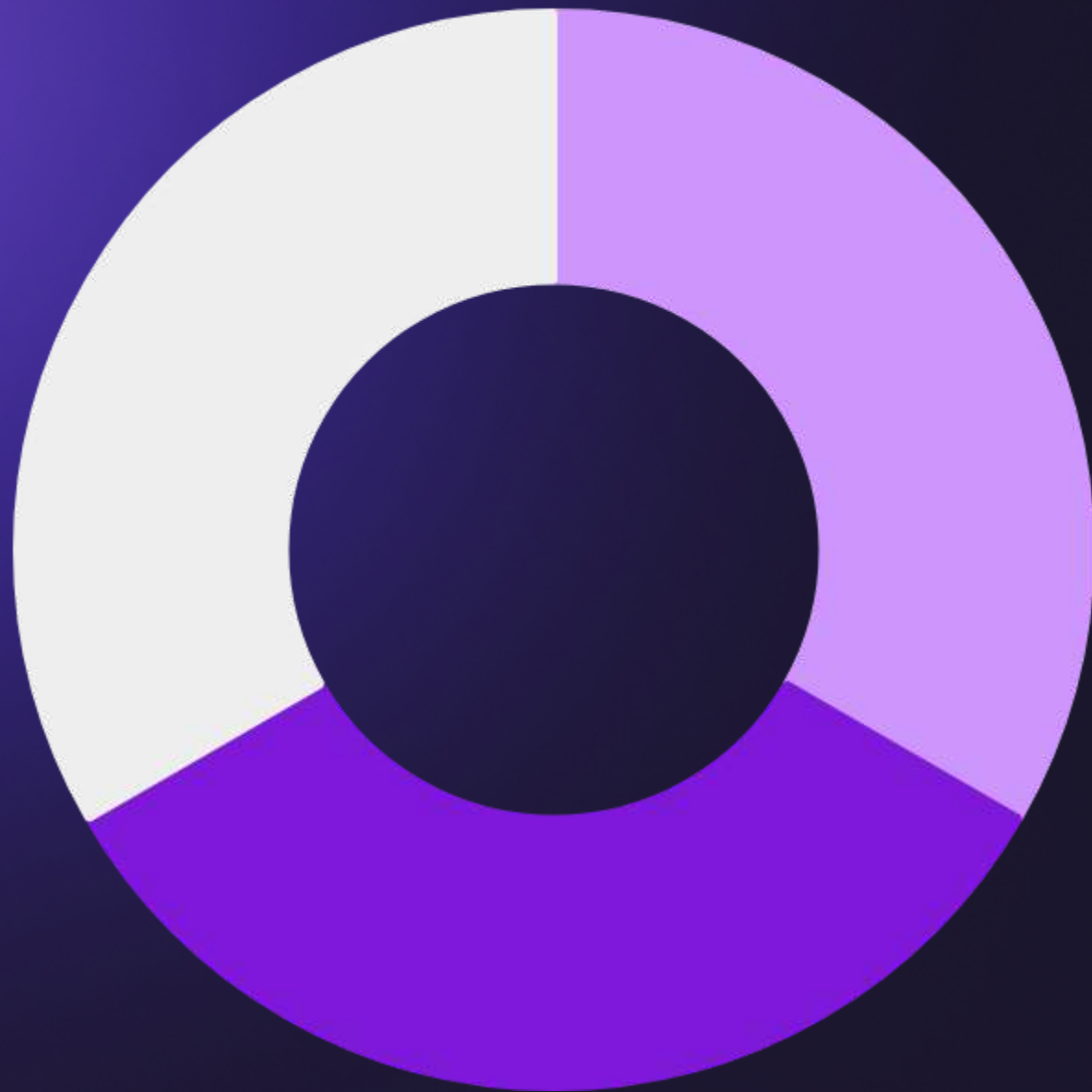


03 Касательная и радиус

Касательная касается окружности только в одной точке. Радиус, проведённый в точку касания, всегда перпендикулярен касательной, и это свойство часто используют в построениях.

Вписанный и описанный многоугольники

■ Что лежит на окружности ■ Положение окружности
■ Что касается окружности ■ Положение фигуры



Обе фигуры связаны с одной окружностью, но роль окружности разная: она либо проходит через вершины, либо касается сторон.

Главное различие — в том, что именно соприкасается с окружностью: вершины или стороны. Это помогает сразу распознавать тип многоугольника.

Учебный материал по теме
«Вписанные и описанные
многоугольники»

Связь с треугольником

01

Всегда две окружности

Любой треугольник можно вписать в окружность и можно описать около окружности. Для треугольника обе окружности существуют всегда, независимо от вида треугольника.

02

Центр описанной окружности

Центр описанной окружности находится в точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Эта точка одинаково удалена от всех трёх вершин.

03

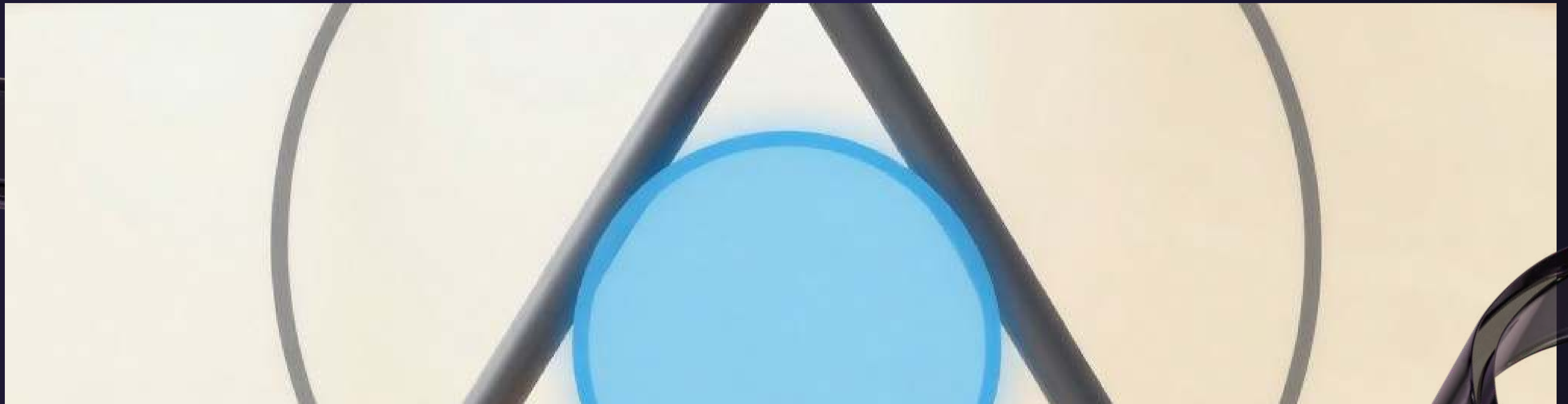
Центр вписанной окружности

Центр вписанной окружности — точка пересечения биссектрис углов треугольника. От неё до каждой стороны можно провести равные перпендикуляры, которые и задают радиус.

04

Почему это удобно

Треугольник — самая простая фигура для изучения окружностей. На нём легко увидеть, как работают перпендикуляры, биссектрисы и равные расстояния от центра.



Когда четырёхугольник можно вписать в окружность

01 Признак по углам

Четырёхугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180° . Это и есть признак вписанного четырёхугольника.

02 Проверка на чертеже

Если измерить углы на рисунке, можно быстро проверить условие вписанности. Такой способ особенно удобен, когда фигура уже построена и нужно сделать вывод по данным измерений.



03 Правильные многоугольники

У правильных многоугольников все вершины лежат на одной окружности, поэтому они всегда являются вписанными. Это свойство связано с их равными сторонами и равными углами.

Когда четырёхугольник можно описать около окружности



■ Признак по сторонам

Четырёхугольник можно описать около окружности тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны: $a + c = b + d$. Это основной признак описанного четырёхугольника.

■ Где находится центр

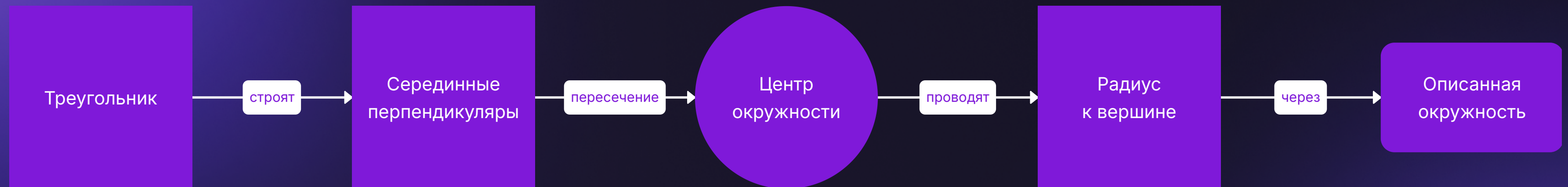
Центр вписанной окружности лежит на биссектрисах углов четырёхугольника. Из этой точки радиусы к сторонам выходят под прямым углом, поэтому все касания происходят одинаково.

■ Связь с правильными фигурами

У правильных многоугольников вписанная окружность существует всегда. Их симметрия обеспечивает равные расстояния от центра до сторон, а значит, все стороны можно сделать касательными.

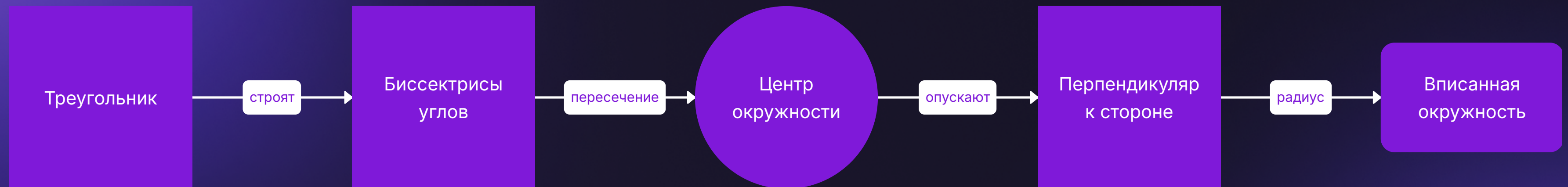
Как построить описанную окружность треугольника

Пошаговое геометрическое построение по серединным перпендикулярам



Как построить вписанную окружность треугольника

Пошаговое геометрическое построение по биссектрисам и перпендикуляру



Правильные многоугольники и две окружности

Одинаковые стороны и углы

У правильного n -угольника все стороны равны и все углы равны, поэтому его вершины можно расположить на одной окружности, а стороны — сделать касательными к другой.

Два центра

Для такой фигуры существуют центр описанной окружности и центр вписанной окружности. В правильном многоугольнике они совпадают, а расстояния от центра до вершин и до сторон оказываются равными.

Примеры в геометрии

К правильным многоугольникам относятся правильный треугольник, квадрат и правильный шестиугольник. Эти фигуры удобны для построений, потому что их симметрия помогает точно вписывать и описывать окружности.



Основные признаки в таблице

Фигура	Условие	Признак
Треугольник	всегда	2 окружности
Вписанный 4-угольник	$\angle A + \angle C = 180^\circ$	вершины на окружности
Описанный 4-угольник	$a + c = b + d$	стороны касаются
Правильный многоугольник	всегда	обе окружности

В таблице собраны самые важные случаи, которые нужно узнавать по чертежу и по условию задачи. Она помогает быстро сравнить фигуры и признаки окружностей.

Для треугольника обе окружности существуют всегда, а для четырёхугольника нужны специальные признаки. Правильные многоугольники объединяют оба случая и поэтому особенно симметричны.

Свойства окружности, касательной и четырёхугольников

Почему касательная играет важную роль



Только одна точка

Касательная имеет с окружностью ровно одну общую точку. Поэтому в описанном многоугольнике каждая сторона касается окружности отдельно и не пересекает её.



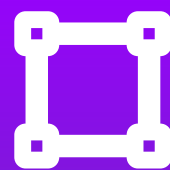
Основа измерений

Свойство касательной связывает длины сторон, радиусы и перпендикуляры. Благодаря этому задачи на окружности решаются точнее и понятнее, особенно в чертежах и построениях.



Угол прямой

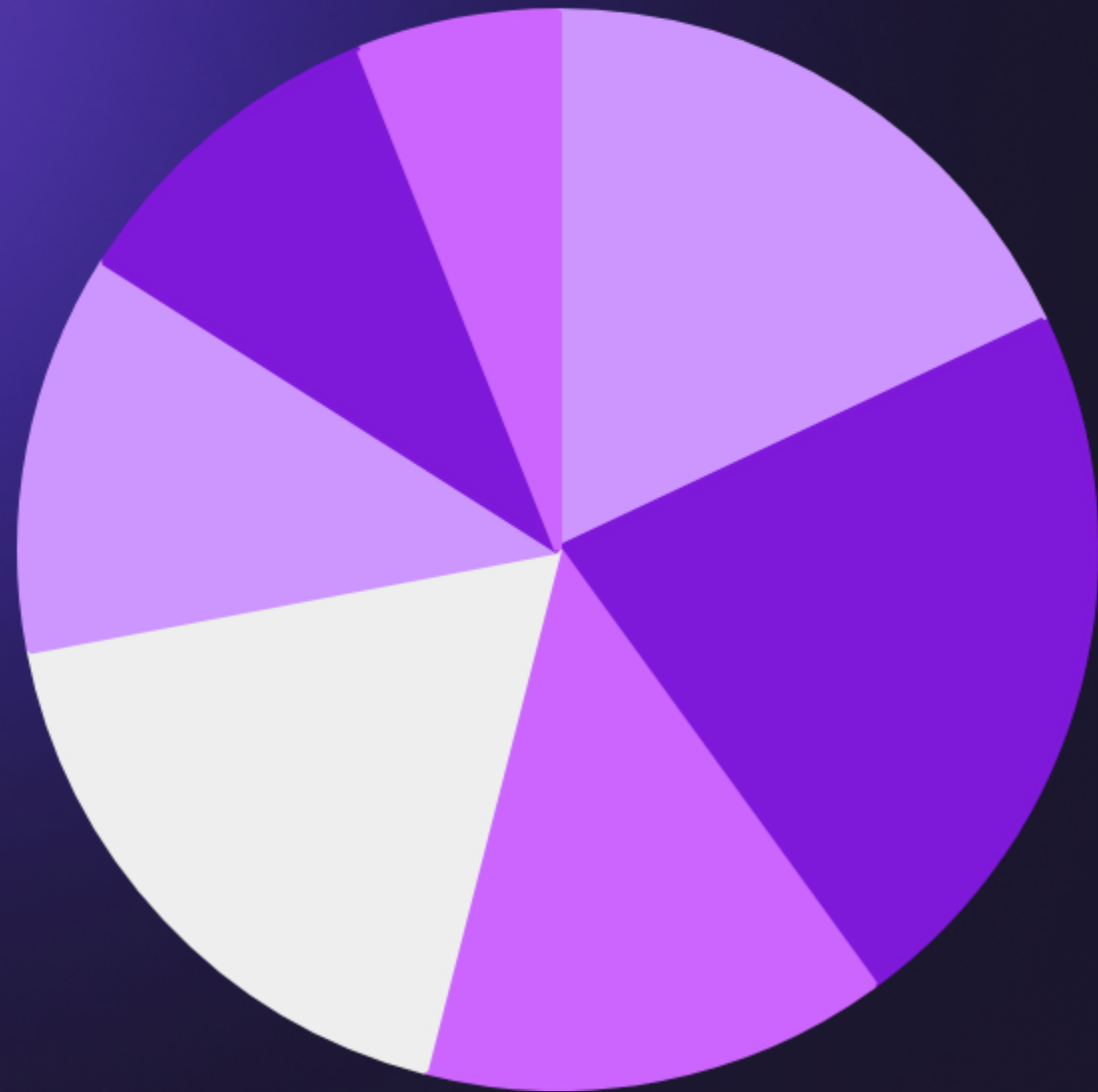
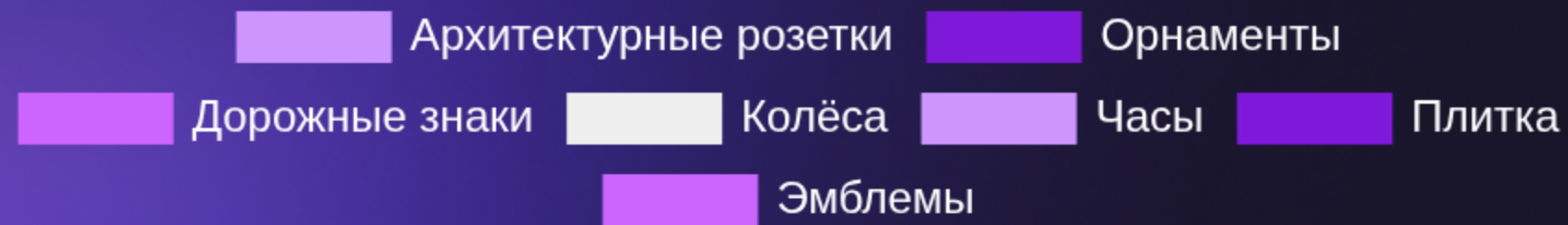
Если радиус проведён в точку касания, он образует с касательной прямой угол. Это свойство часто используют, чтобы находить неизвестные углы и проверять правильность построения.



Связь с перпендикуляром

Радиус к точке касания помогает строить перпендикуляры от центра к сторонам. Так можно находить расстояние от центра до каждой стороны описанного многоугольника.

Где встречаются вписанные и описанные многоугольники



Такие фигуры легко заметить в предметах с симметричным рисунком и точной разметкой. В одних примерах важны вершины на окружности, в других — касание сторон.

Наиболее заметны орнаменты, розетки и колёса: именно там геометрическая симметрия особенно удобна для конструкции и украшения.

Обобщение распространённых примеров из геометрии и окружающих предметов

Частые ошибки при работе с этими фигурами



Любая окружность не подходит

Не каждая окружность вокруг фигуры является описанной. Описанной называют только ту, которая проходит через все вершины многоугольника или касается всех его сторон по условию.



Путают центры окружностей

Центр описанной окружности и центр вписанной окружности — это разные точки, кроме правильных многоугольников. Чтобы не ошибиться, нужно проверять, что именно равноудалено от центра.



Путают вершины и стороны

Иногда думают, что достаточно, чтобы окружность просто находилась рядом с фигурой. Нужно точно смотреть: у вписанного многоугольника на окружности лежат вершины, а у описанного касаются стороны.



Забывают про одну точку касания

Касание происходит только в одной точке. Если окружность пересекает сторону в двух точках, это уже не касательная, и признак описанного многоугольника не выполняется.

Что должно быть видно на чертеже

01

Подписи вершин

Обязательно обозначьте все вершины многоугольника и его стороны. Без подписей трудно понять, какие элементы относятся к окружности и какие именно точки нужно проверять.

02

Центр и радиус

Отметьте центр окружности буквой O и подпишите радиус R или r . Это помогает сразу увидеть, какая окружность изображена: описанная или вписанная.

03

Точки касания или вершины

Если фигура вписана в окружность, покажите вершины на окружности. Если многоугольник описан около окружности, выделите точки касания на каждой стороне.

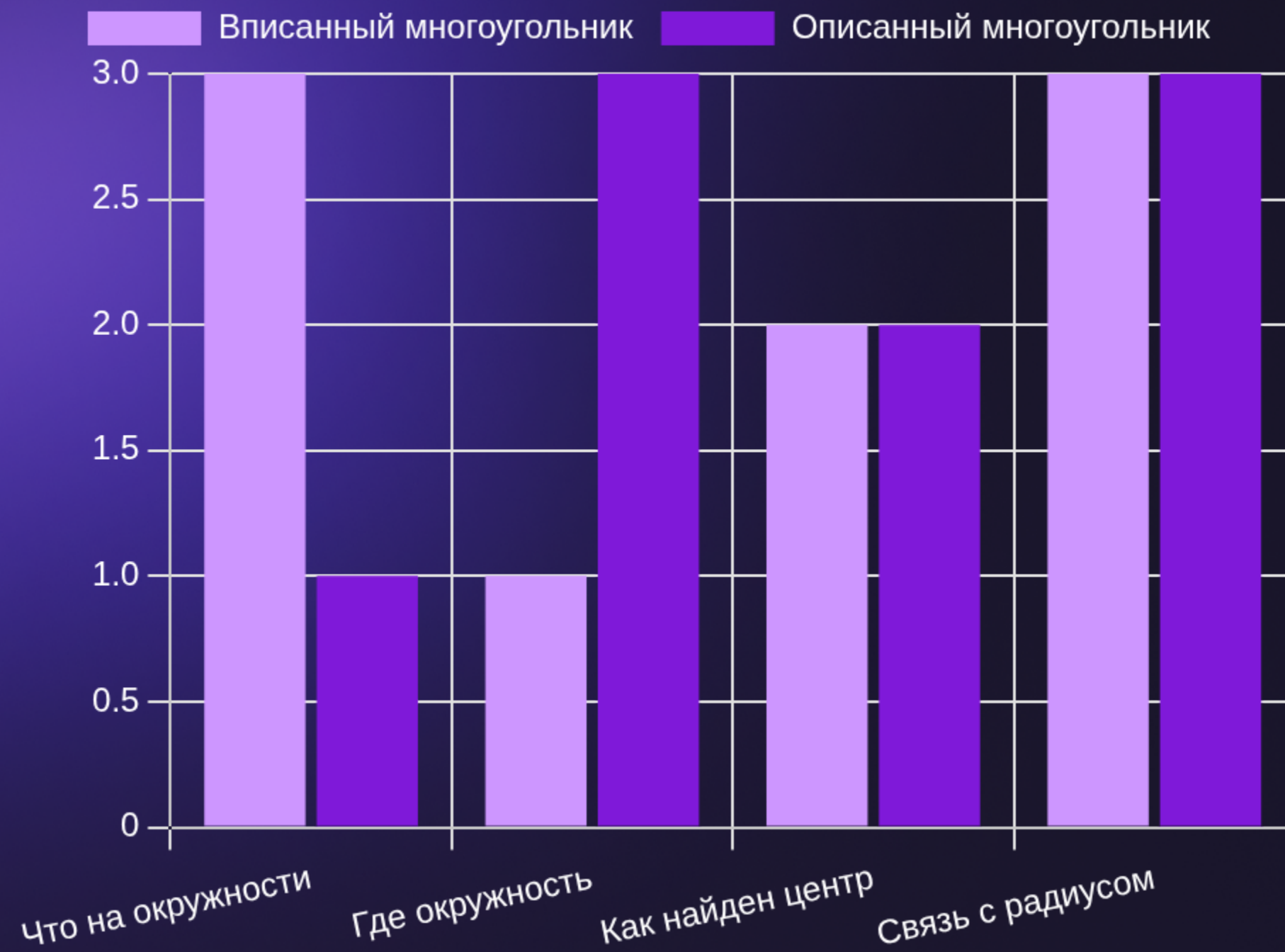
04

Равные расстояния

Проверьте, что расстояния от центра до вершин одинаковы или что перпендикуляры к сторонам равны радиусу. Именно это подтверждает нужное свойство фигуры.



Сравнение свойств вписанного и описанного многоугольника



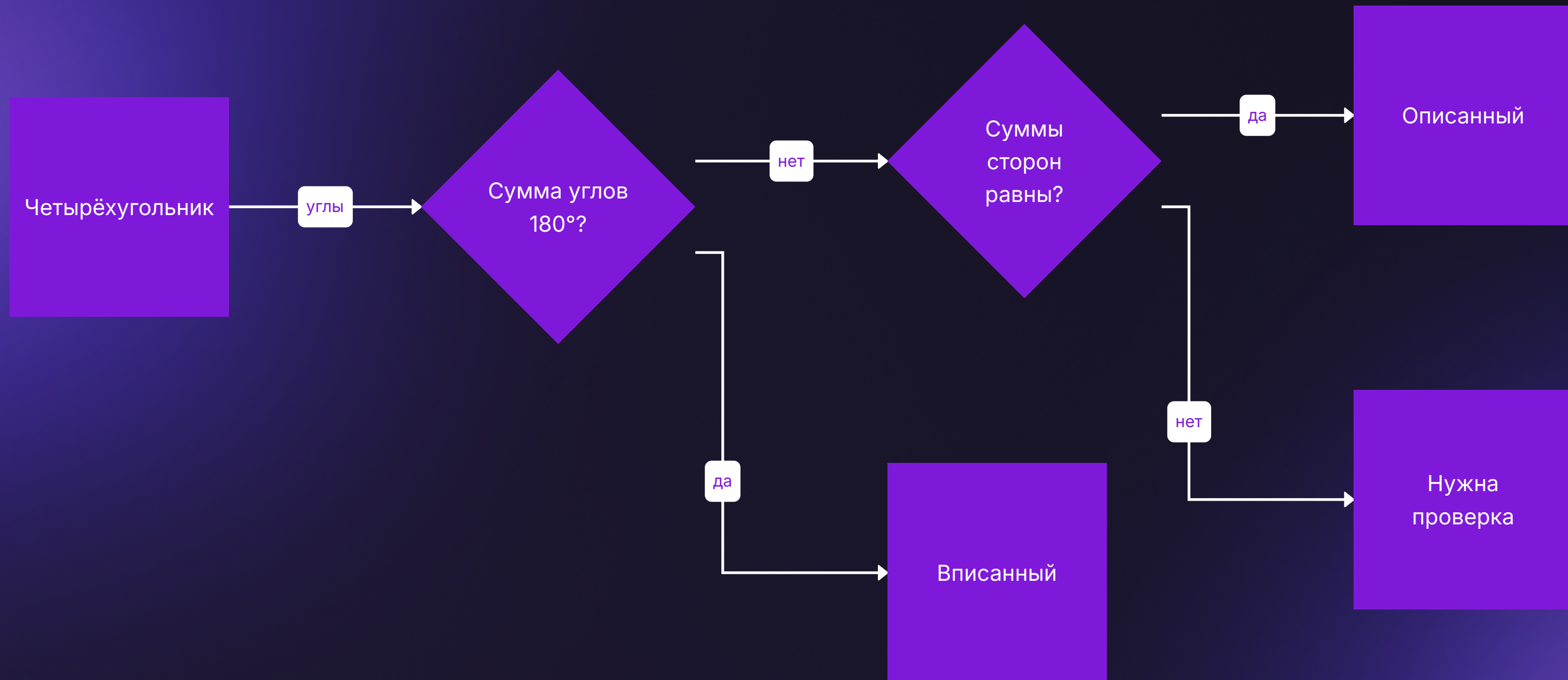
Обе фигуры опираются на равные расстояния от центра, но эти расстояния измеряются по-разному: до вершин или до сторон. Это и есть главное различие.

Сравнение показывает, что форма окружности и положение центра определяются тем, что именно связано с фигурой — вершины или стороны.

Сравнение свойств по материалам школьной геометрии

Алгоритм проверки четырёхугольника

Проверка по углам и сторонам помогает определить, можно ли вписать окружность или описать её около четырёхугольника.



Обозначения, формулы и признаки



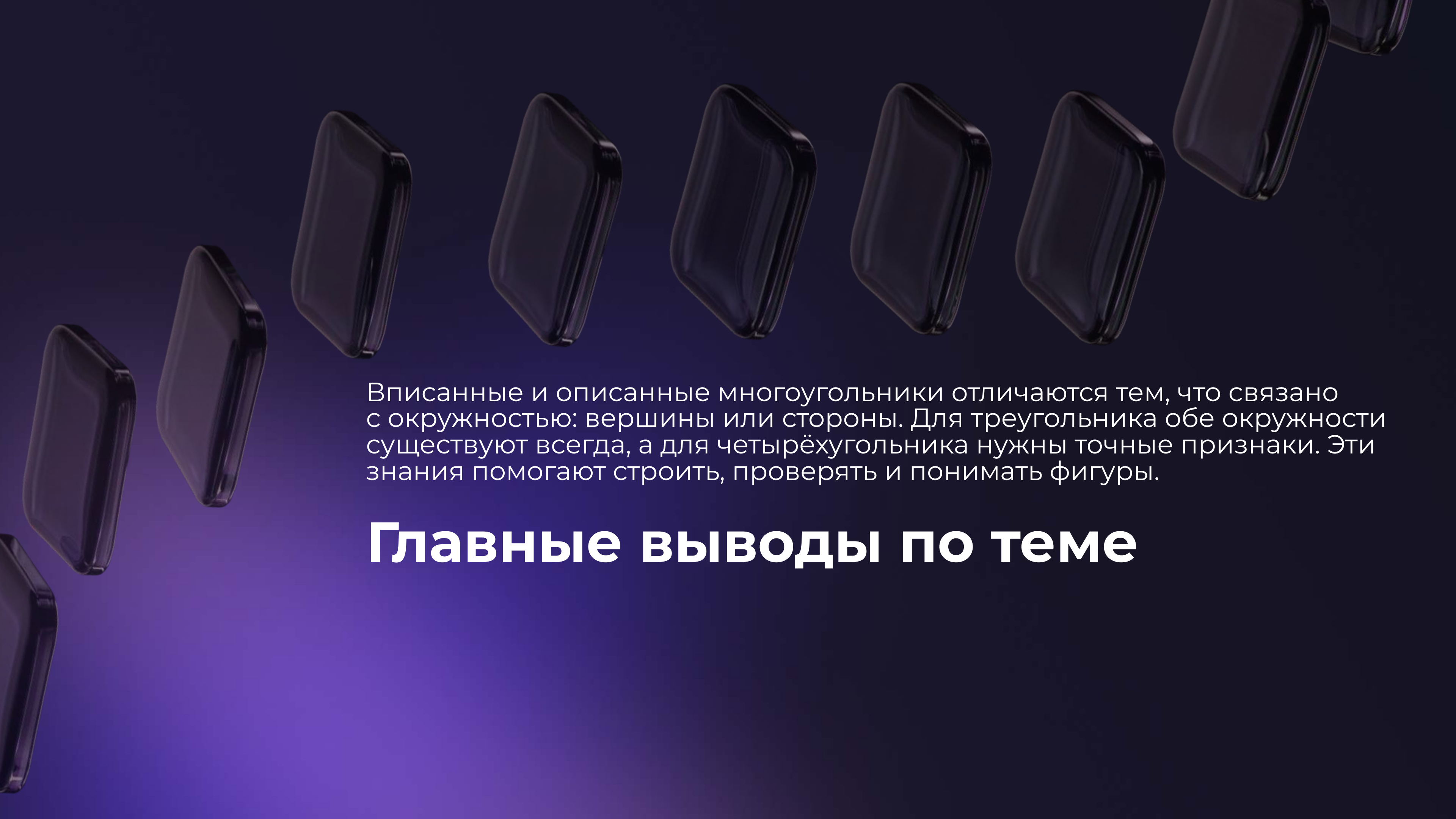
Эта таблица помогает запомнить главные обозначения и признаки, которые встречаются в задачах на окружности и многоугольники.

Обозначения O , R и r позволяют быстро читать чертёж. Признаки показывают, как связаны центр, радиус, стороны и углы.

Обозначение	Смысл	Признак
O	центр	равные расстояния
R	радиус опис.	до вершин
r	радиус впис.	до сторон
—	касательная	$\perp$ радиусу

Основные обозначения и свойства окружностей в школьной геометрии





Вписанные и описанные многоугольники отличаются тем, что связано с окружностью: вершины или стороны. Для треугольника обе окружности существуют всегда, а для четырёхугольника нужны точные признаки. Эти знания помогают строить, проверять и понимать фигуры.

Главные выводы по теме