

Определение синуса и косинуса

Узнаем, как угол связан
со сторонами треугольника
и точкой на окружности.



Где появляются синус и косинус

Эти понятия помогают находить неизвестные стороны и высоты, если известны угол и одна длина. В 7 классе это первая встреча с инструментом, который позже станет важным в геометрии и алгебре.



Прямоугольный треугольник как основа определения

Гипотенуза

Это сторона, лежащая напротив прямого угла. Она всегда самая длинная в прямоугольном треугольнике и служит опорой для определения синуса и косинуса.

Катеты

Оставшиеся две стороны называются катетами. Относительно выбранного острого угла один из них будет лежать напротив него, а другой — рядом с ним.

Противолежащая сторона

Для каждого острого угла можно выделить катет, который находится напротив него. Именно его длина участвует в формуле синуса.

Прилежащая сторона

Вторая сторона, образующая угол вместе с гипотенузой, называется прилежащей. Она нужна для определения косинуса.



1

относительно гипотенузы всегда
меньше длины противолежащего катета

Синус острого угла — это отношение
противолежащего катета к гипотенузе. Поэтому
его значение находится между нулём и единицей
и показывает «долю» самой длинной стороны.

Школьный курс геометрии, определение синуса
в прямоугольном треугольнике

1

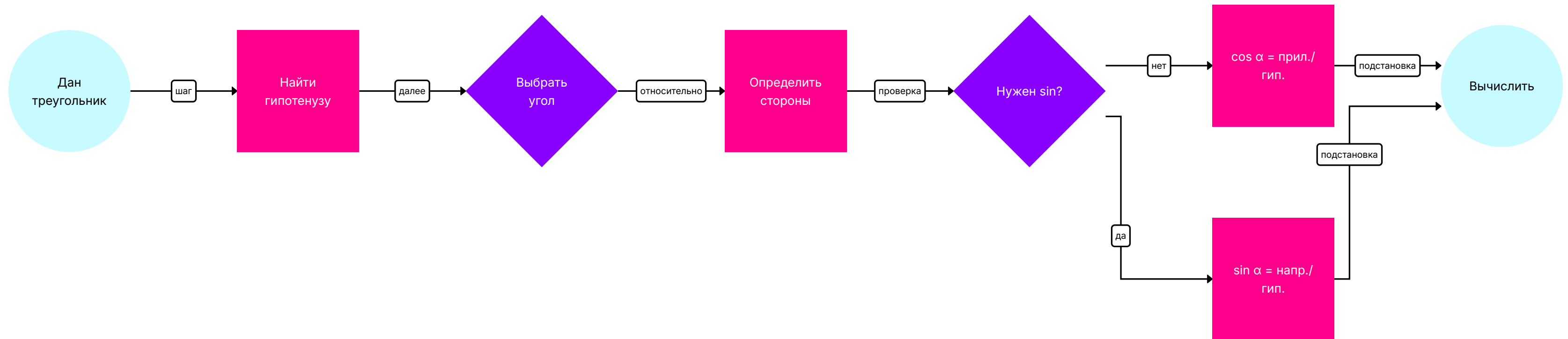
относительно гипотенузы всегда
меньше длины прилежащего катета

Косинус острого угла — это отношение
прилежащего катета к гипотенузе. Как и синус,
он для острого угла лежит между нулём
и единицей.

Школьный курс геометрии, определение косинуса
в прямоугольном треугольнике

Как найти синус или косинус по чертежу

Последовательность действий по рисунку прямоугольного треугольника



Основные значения синуса и косинуса

Таблица помогает быстро вспомнить значения для самых частых углов и увидеть общий ход изменения функций.

При росте острого угла синус увеличивается, а косинус уменьшается.

Школьные формулы для прямоугольного треугольника

Угол	sin	cos
0°	0	1
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
90°	1	0

Равнобедренный прямоугольный треугольник и угол 45°

Два одинаковых катета

Если в прямоугольном треугольнике оба катета равны, то острые углы тоже равны. Значит, каждый из них равен 45° . Такой треугольник удобно брать за образец: его симметрия сразу показывает, почему синус и косинус здесь совпадают.



Гипотенуза по Пифагору

Пусть каждый катет равен 1. Тогда по теореме Пифагора гипотенуза равна $\sqrt{2}$. Отсюда сразу получаем, что $\sin 45^\circ = 1/\sqrt{2}$ и $\cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$, то есть оба значения одинаковы и равны $\sqrt{2}/2$.



Треугольник 30° - 60° - 90°

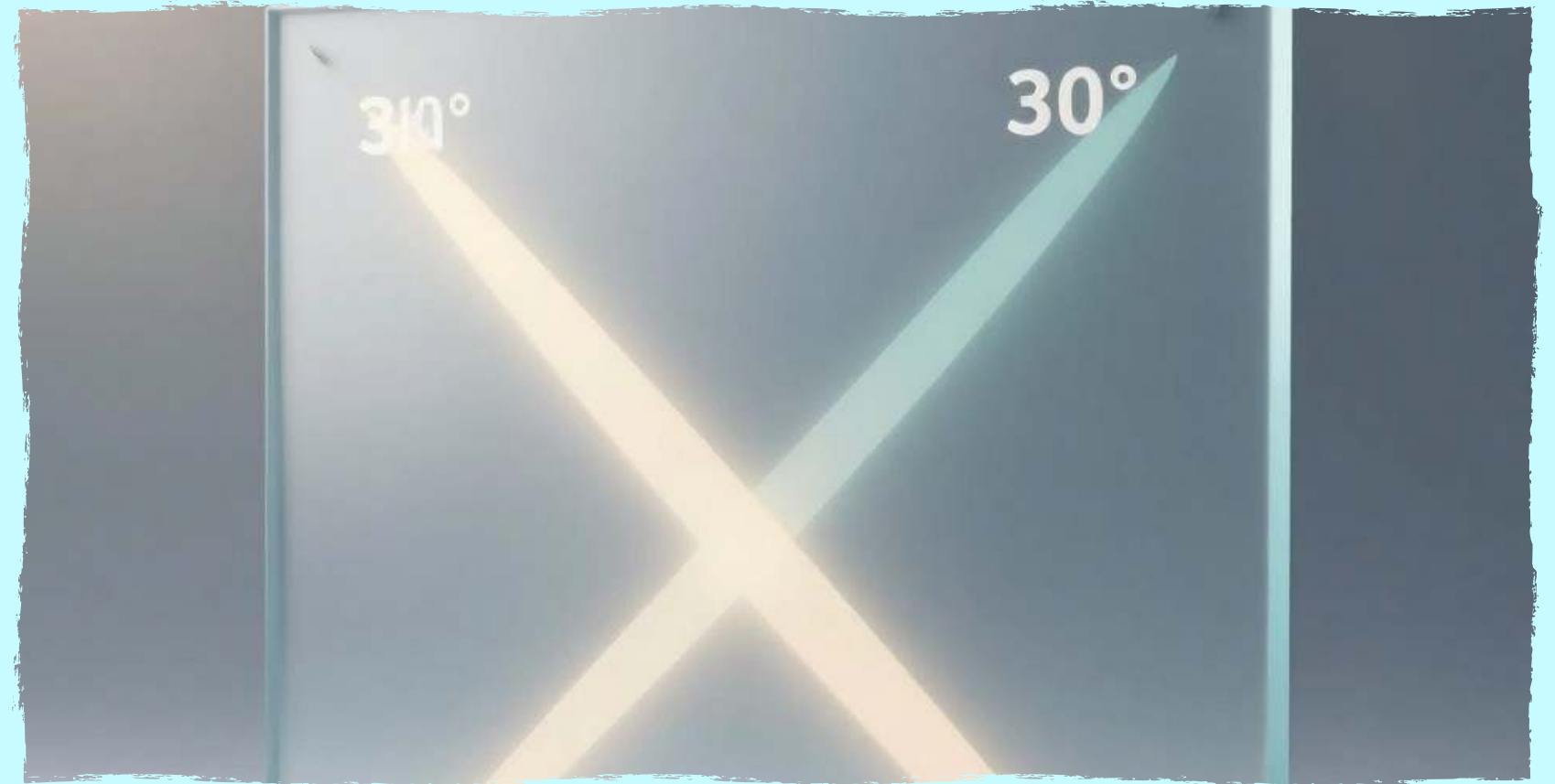
Половина равностороннего треугольника

Если равносторонний треугольник разделить пополам, получится прямоугольный треугольник с углами 30° и 60° . При стороне 2 его гипотенуза равна 2, меньший катет — 1, а больший катет — $\sqrt{3}$. Это удобная модель для вычислений

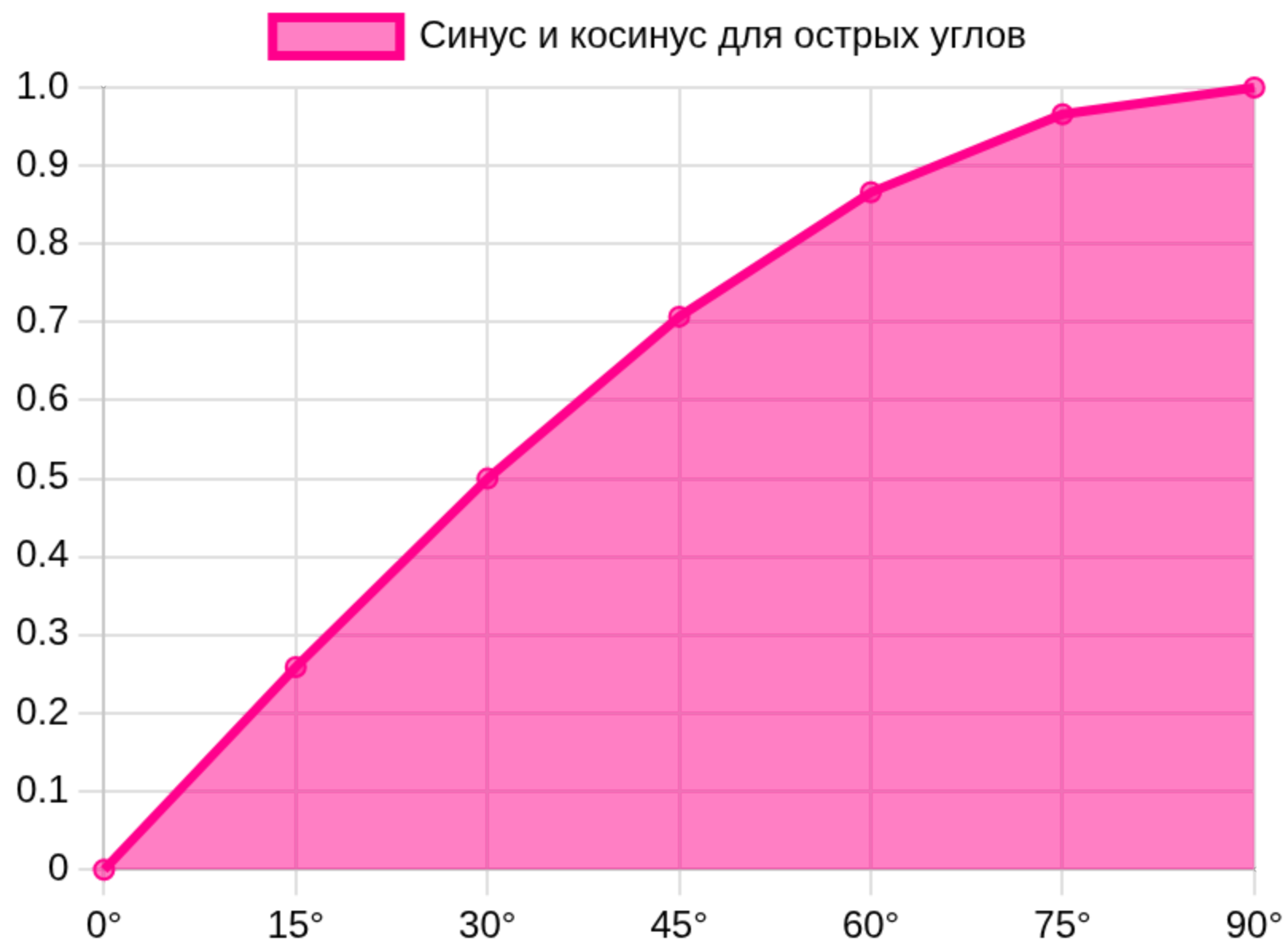


Готовые значения без лишних вычислений

Из этой фигуры сразу следуют основные значения: $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. Один чертёж помогает запомнить сразу четыре результата и не путать их между собой.



Как меняются значения синуса и косинуса



На графике видно, что рост угла делает синус всё ближе к единице.

Синус и косинус меняются в противоположных направлениях: один растёт, другой убывает.

Школьные значения синуса и косинуса для углов 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75° и 90°

Связь с единичной окружностью

1

Точка на окружности

На единичной окружности каждая точка соответствует определённому углу α , отсчитанному от положительного направления оси Ox . Положение точки удобно описывать координатами, а не только длинами сторон треугольника.

2

Координаты и функции

Если радиус окружности равен 1, то x -координата точки показывает косинус угла, а y -координата — синус. Поэтому запись точки имеет вид $(\cos \alpha; \sin \alpha)$, без дополнительных вычислений.

3

Преимущество подхода

Такое определение позволяет работать не только с острыми углами, но и с углами больше 90° . Единичная окружность делает синус и косинус универсальными для всей окружности.

Знаки синуса и косинуса в разных четвертях

Первая четверть

В первой четверти обе координаты точки положительны, поэтому синус и косинус тоже положительны. Это самый простой случай для проверки знаков и первых вычислений.

Вторая четверть

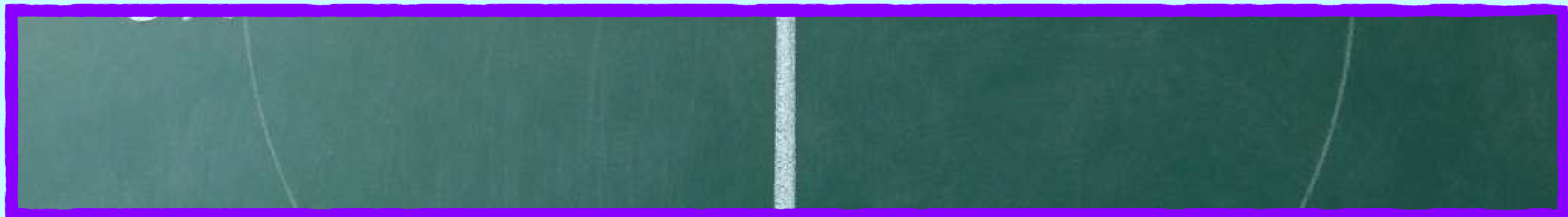
Во второй четверти точка находится выше оси Ox , но левее оси Oy . Значит, синус положителен, а косинус отрицателен, потому что x -координата становится меньше нуля.

Третья четверть

В третьей четверти точка расположена ниже оси Ox и левее оси Oy . Поэтому обе координаты отрицательны, а значит, синус и косинус имеют отрицательные значения.

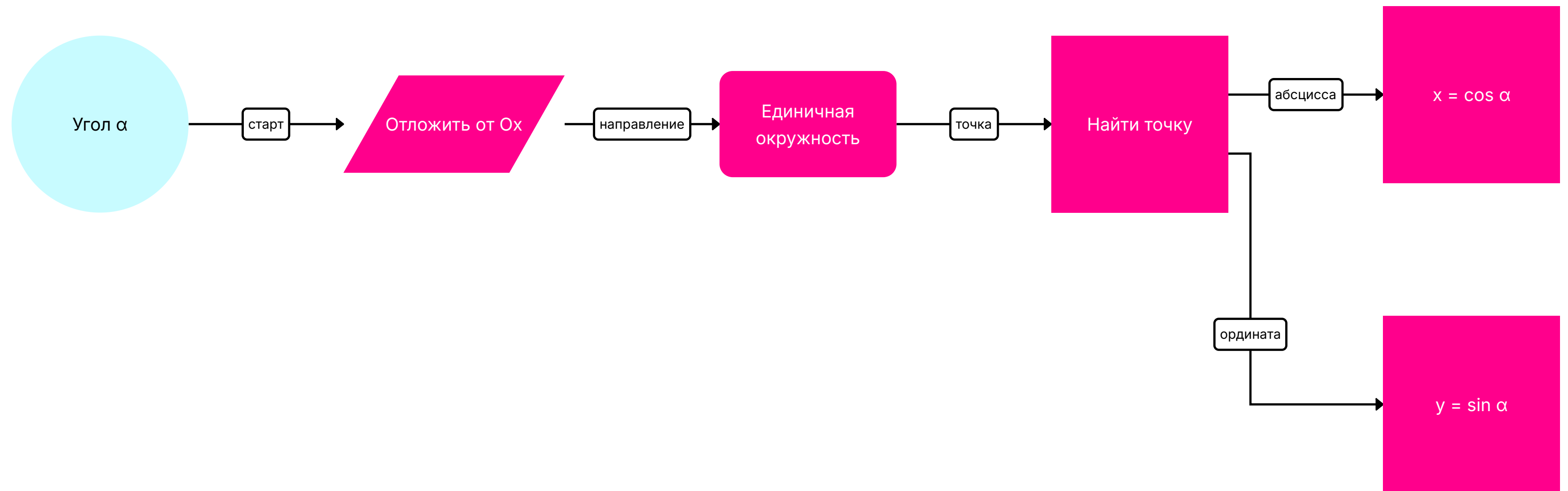
Четвёртая четверть

В четвёртой четверти точка находится ниже оси Ox , но справа от оси Oy . Здесь косинус положителен, а синус отрицателен, поскольку x остаётся больше нуля, а y меньше нуля.



От угла к координатам точки на окружности

Переход от угла к координатам на единичной окружности



Главное тождество для синуса и косинуса

1

Основная формула

Для любого угла выполняется равенство $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Оно связывает две тригонометрические величины и показывает, что они не выбираются независимо друг от друга.

2

Почему это верно

В прямоугольном треугольнике формула следует из теоремы Пифагора, а на единичной окружности — из того, что точка лежит на расстоянии 1 от центра.

3

Как использовать

Если известен синус, косинус можно найти из этого равенства, и наоборот. Нужно лишь подставить значение и аккуратно вычислить второй член, учитывая знак.

4

Проверка ответа

Тождество помогает быстро проверить результат: сумма квадратов синуса и косинуса одного угла всегда равна 1. Если получается другое число, значит, в вычислениях допущена ошибка.

Сравнение синуса и косинуса

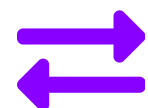
Таблица показывает, чем отличаются синус и косинус в треугольнике и на единичной окружности.

Синус и косинус описывают один угол с разных сторон: через стороны треугольника и через координаты точки.

Школьная тригонометрия, единичная окружность

Признак	Синус	Косинус
Что показывает	противолежащий катет	прилежащий катет
Формула	катет / гипотенуза	катет / гипотенуза
На окружности	у-координата	х-координата
При росте угла	увеличивается	уменьшается

Типичные ошибки при работе с определениями



Путают катеты

Самая частая ошибка — перепутать противолежащий и прилежащий катеты. Чтобы не ошибиться, всегда сначала отмечайте выбранный угол, а потом смотрите, какая сторона лежит напротив него.



Неверная гипотенуза

Гипотенуза — не просто самая длинная сторона, а сторона, лежащая напротив прямого угла. Если перепутать её с катетом, формула синуса или косинуса сразу станет неверной.



Нет отметки угла

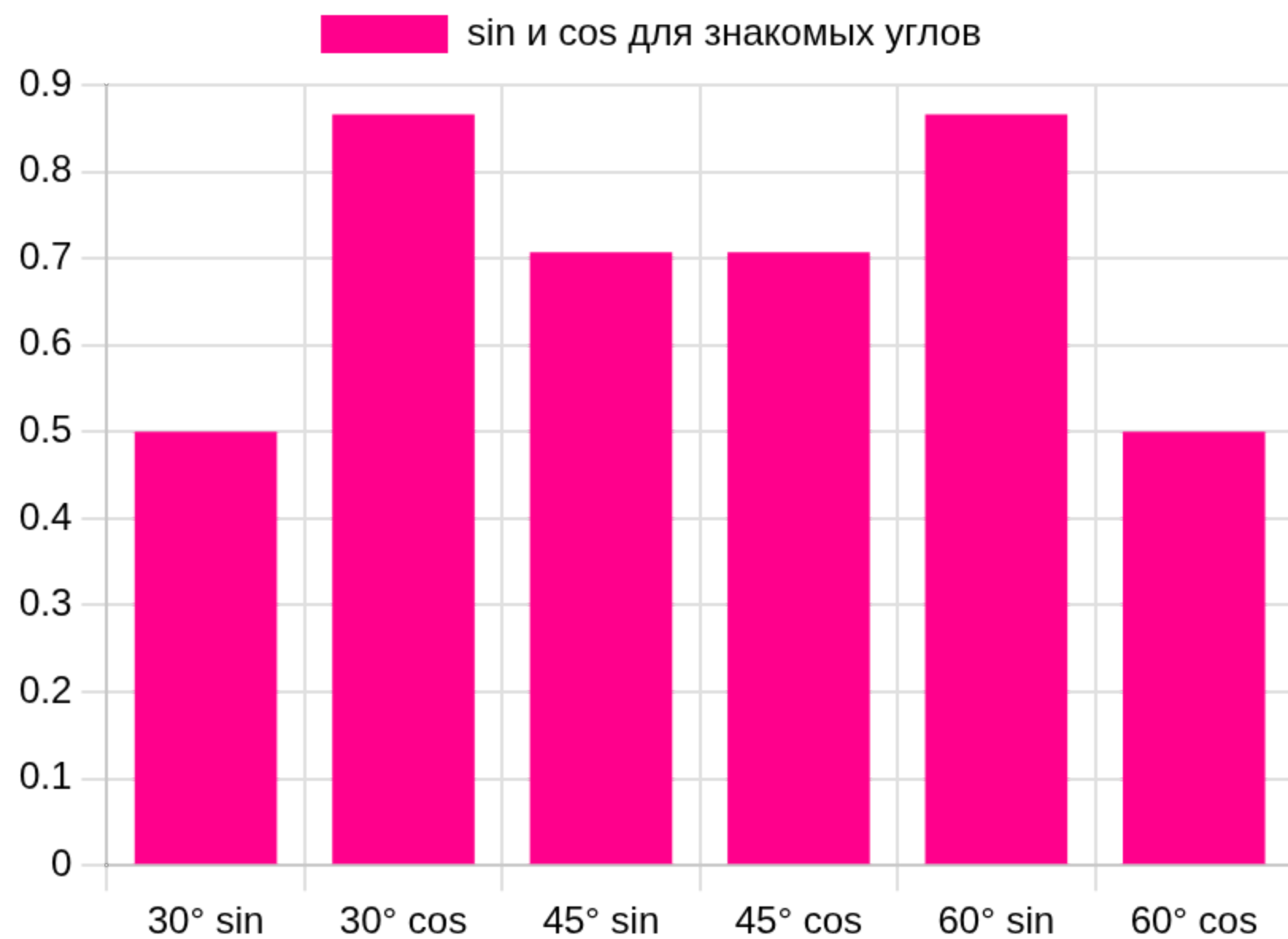
Если на чертеже не обозначен нужный угол, невозможно правильно определить, где синус, а где косинус. Поэтому сначала нужно точно понять, для какого угла выполняется вычисление.



Не проверяют ответ

Полезно в конце сверить, что значения для острого угла находятся между 0 и 1. Такая проверка помогает заметить ошибку ещё до записи окончательного ответа.

Проверка значений на знакомых углах



Здесь показаны только самые известные углы, которые удобно использовать как опору при решении задач и устном счёте.

При 30° больше косинус, при 45° значения равны, а при 60° больше синус. Это помогает быстро запоминать пары.

Школьные значения $\sin$ и $\cos$ для углов 30°, 45° и 60°

Применение в геометрических задачах и жизни

1

Высота по углу

Если известны расстояние до объекта и угол наблюдения, синус помогает найти высоту. Такой приём часто используют в задачах про башни, деревья и другие высокие предметы.

2

Чертежи и планы

В геометрических построениях косинус и синус позволяют вычислять неизвестные стороны, когда задан угол и одна длина. Это удобно при работе с треугольниками и наклонными отрезками.

3

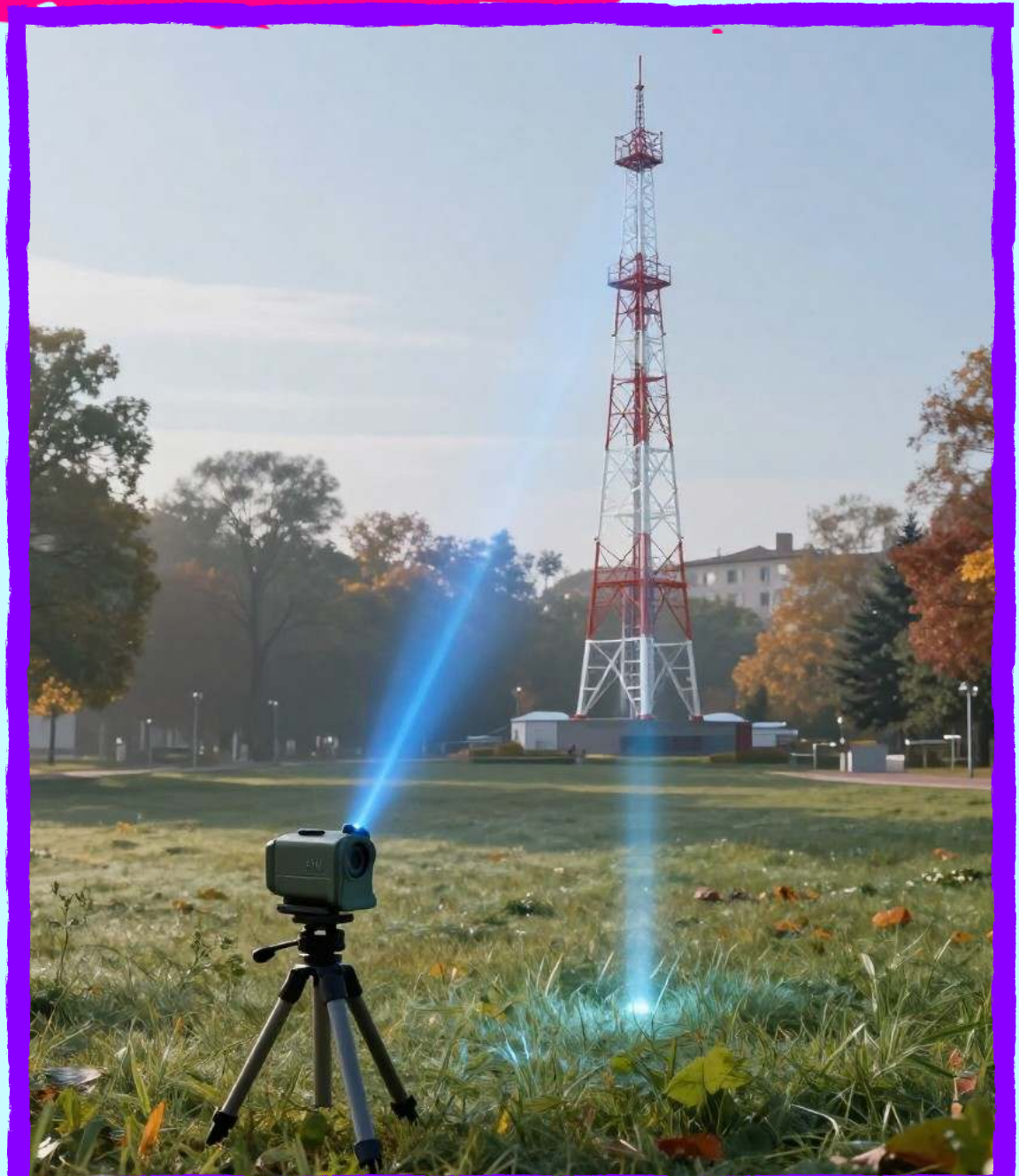
Навигация и карта

В навигации, картографии и ориентировании на местности углы помогают задавать направление, а тригонометрические отношения — переводить его в понятные расстояния и координаты.

4

Графика и модели

В компьютерной графике синус и косинус помогают задавать движение, повороты и положение объектов. Поэтому школьные формулы позже встречаются в более сложных моделях.

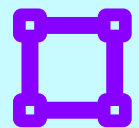


Как запомнить определения и не путать их



«Напротив» и «рядом»

Запомните короткую подсказку: синус связан с катетом напротив угла, а косинус — с катетом рядом с ним. Эта фраза сразу подсказывает, какую сторону брать в формулу.



Ось y и ось x

На единичной окружности синус показывает вертикальное положение точки, а косинус — горизонтальное. Так одна и та же величина описывается через координаты, а не через стороны треугольника.



Только до гипотенузы

В прямоугольном треугольнике и синус, и косинус всегда делят катет на гипотенузу. Поэтому в знаменателе неизменно стоит самая длинная сторона, лежащая напротив прямого угла.



Два взгляда на угол

Полезно помнить, что треугольник и окружность дают одно и то же значение с разных сторон. Если один способ вызывает сомнение, можно проверить ответ через другой.

Что важно запомнить о синусе и косинусе

Синус и косинус помогают связывать угол, стороны треугольника и координаты точки на окружности. Если знать определения и основные значения, решать задачи становится намного проще.