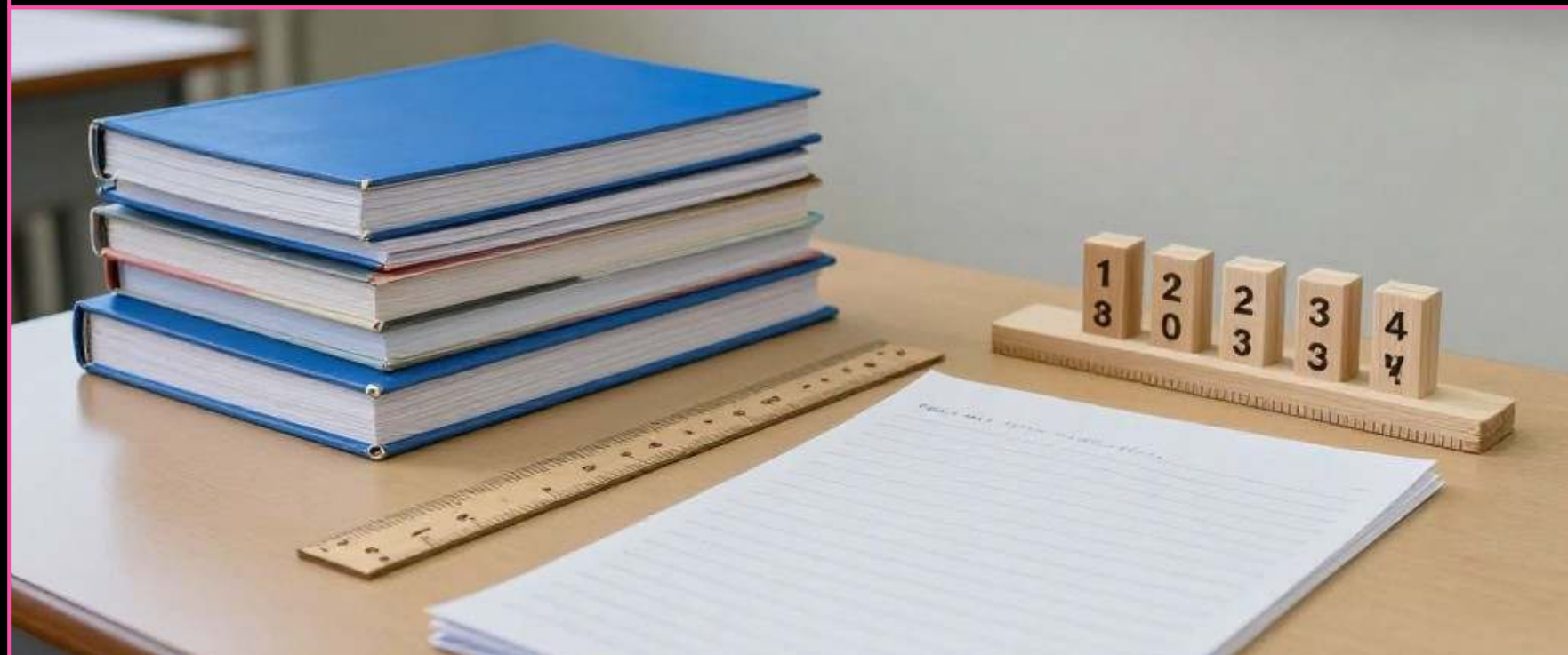


МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ: ОТ ИДЕИ К РЕШЕНИЮ



Единая схема доказательства для всех натуральных чисел.



ЗАЧЕМ НУЖЕН МЕТОД ИНДУКЦИИ

Индукция помогает доказывать формулы, неравенства и свойства последовательностей тогда, когда полный перебор невозможен. Сначала видим шаг от n к $n+1$, затем строим строгое доказательство.

						3	
<i>ИНДУКЦИЯ ЗАМЕНЯЕТ БЕСКОНЕЧНУЮ ПРОВЕРКУ ДВУМЯ ЛОГИЧЕСКИМИ ШАГАМИ: СТАРТОМ И ПЕРЕХОДОМ. ЭТО ОСНОВА ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ДЛЯ ВСЕХ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ.</i>							
2				достаточно, чтобы охватить бесконечное множество случаев. Определение метода математической индукции			

***МЕТОД ДЕРЖИТСЯ НА ДВУХ ОБЯЗАТЕЛЬНЫХ
ЭЛЕМЕНТАХ: БАЗЕ И ПЕРЕХОДЕ. БЕЗ ЛЮБОГО ИЗ НИХ
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕ РАБОТАЕТ.***

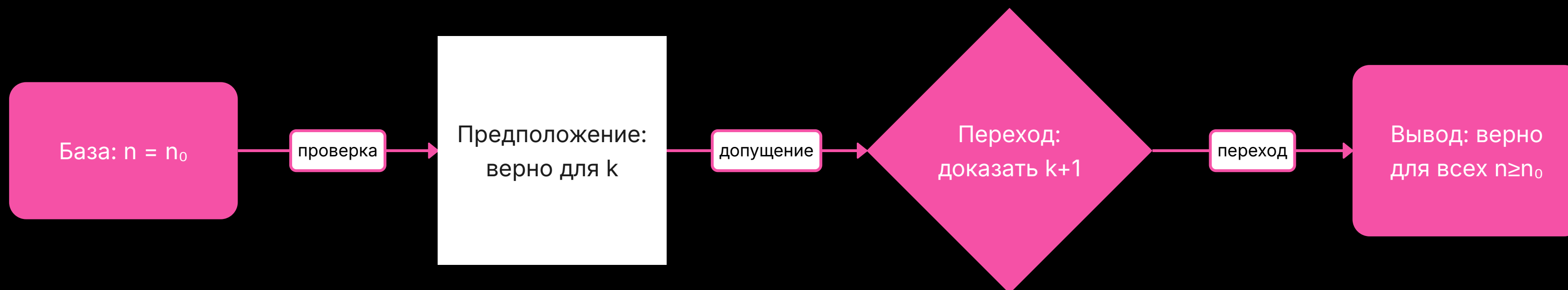
2

части нужны одновременно, чтобы
вывод был полным.

Определение метода математической
индукции

БАЗА ➤ *ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ* ➤ *ПЕРЕХОД* ➤ *ВЫВОД*

Последовательность шагов, которая делает доказательство строгим.



***ПЕРЕХОД СТРОИТСЯ ОТ ФИКСИРОВАННОГО К
К СЛЕДУЮЩЕМУ ЗНАЧЕНИЮ. ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ
ЗАПИСЫВАЮТ ОТДЕЛЬНО, ЧТОБЫ НЕ СМЕШИВАТЬ ЕГО
С ВЫВОДОМ.***

К

обозначает произвольный шаг,
на который опирается доказательство.

Правило записи индукционного
предположения

СУММА ПЕРВЫХ N НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ИМЕЕТ КОМПАКТНУЮ ФОРМУЛУ, И ИНДУКЦИЯ ПОКАЗЫВАЕТ, ПОЧЕМУ ОНА СОХРАНЯЕТСЯ ПРИ ПЕРЕХОДЕ К СЛЕДУЮЩЕМУ ЧЛЕНУ.

1

достаточно для запуска проверки формулы с самого начала.

Классический пример индукции для суммы натуральных чисел

СУММА НЕЧЁТНЫХ ЧИСЕЛ ОБРАЗУЕТ КВАДРАТ: КАЖДЫЙ НОВЫЙ НЕЧЁТНЫЙ СЛОЙ ДОБАВЛЯЕТ РОВНО СЛЕДУЮЩИЙ ПРИРОСТ К ПЛОЩАДИ КВАДРАТА.

1

от него начинается цепочка, приводящая к квадрату.

Классический пример индукции для суммы нечётных чисел

ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО РАСТЁТ ДОСТАТОЧНО БЫСТРО, ПОЭТОМУ ЕГО УДОБНО УСИЛИВАТЬ ЧЕРЕЗ УМНОЖЕНИЕ НА 2 И ОЦЕНКУ СЛЕДУЮЩЕГО ШАГА.

2

раздвигает левую часть быстрее, чем увеличивается правая.

Классический пример индукции для неравенства $2^n \geq n+1$

			10
	<i>В ПЕРЕХОДЕ ДОПУСТИМЫ ТОЛЬКО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ОПИРАЮЩИЕСЯ НА ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ ИНДУКЦИИ И КОРРЕКТНЫЕ СВОЙСТВА РАВЕНСТВ И НЕРАВЕНСТВ.</i>		
	1	шаг должен завершаться формой для следующего значения. Правило индукционного перехода	

***ДВЕ БАЗОВЫЕ ПРОВЕРКИ ЗАЩИЩАЮТ
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОТ ФОРМАЛЬНЫХ ОШИБОК:
ПЕРВАЯ — ВЕРНЫЙ СТАРТ, ВТОРАЯ — ЯВНАЯ ОПОРА
НА ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ.***

2

ключевые проверки нужны перед сдачей
решения.

Формулировка метода математической индукции;
стандартная структура доказательства.

***ПЕРЕХОД ДОЛЖЕН ОПИРАТЬСЯ ТОЛЬКО НА СЛУЧАЙ К;
ЕСЛИ ПОДМЕНА ПРОИСХОДИТ ХОТЯ БЫ ОДИН РАЗ,
ЦЕПОЧКА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕРЯЕТ СТРОГОСТЬ.***

1

правильная опора в переходе должна
быть единственной.

Формулировка индукционного перехода.

МИНИ-ЧЕКЛИСТ ПЕРЕД СДАЧЕЙ РЕШЕНИЯ

Перед сдачей решения
проверьте ключевые элементы
индукционного доказательства:
старт, предположение, переход
и итоговую формулировку.

Чеклист помогает быстро увидеть,
что доказательство начато
с нужного значения, использует
предположение корректно
и завершается общим выводом.

Проверка	Что должно быть	Зачем
База	первое n	старт доказательства
Предположение	верно для k	опора перехода
Вывод	для всех $n \geq n_0$	завершение

***В ЭТОЙ ЗАДАЧЕ ПЕРВЫЙ ШАГ ВСЕГДА ОДИНАКОВ:
ПРОВЕРИТЬ ФОРМУЛУ НА МИНИМАЛЬНОМ n И ЗАТЕМ
ВЫВЕСТИ ОБЩИЙ ВИД СУММЫ ЧЕРЕЗ СЛЕДУЮЩИЙ
ЧЛЕН.***

1

с него начинается доказательство
формулы для суммы натуральных чисел.

Постановка задачи о сумме первых n
натуральных чисел.

ЗДЕСЬ ДОСТАТОЧНО ОДНОГО БАЗОВОГО СЛУЧАЯ, ЧТОБЫ ПОКАЗАТЬ УСТОЙЧИВОСТЬ ДЕЛИМОСТИ ПРИ ПЕРЕХОДЕ ОТ k К СЛЕДУЮЩЕМУ ЗНАЧЕНИЮ.

2

на это число должна делиться
разность в каждом шаге.

Постановка задачи о делимости числа
 3^{n-1} на 2.

***НЕРАВЕНСТВО СТРОИТСЯ ВОКРУГ СРАВНЕНИЯ
СОСЕДНИХ СЛУЧАЕВ: ИЗ ОЦЕНКИ ДЛЯ k ПОЛУЧАЕТСЯ
ОЦЕНКА ДЛЯ СЛЕДУЮЩЕГО НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА.***

1

именно с этого значения начинается
проверка неравенства.

Постановка задачи о неравенстве
 $n^2 \geq 2n - 1$.

***СИЛЬНАЯ БАЗА НУЖНА ПОТОМУ, ЧТО ОЦЕНКА
ДЛЯ ПЕРЕХОДА СТАНОВИТСЯ ВЕРНОЙ ЛИШЬ ПОСЛЕ
ДОСТИЖЕНИЯ ДОСТАТОЧНОГО НОМЕРА N .***

4

с этого значения утверждение уже
можно доказывать индукцией.

Постановка задачи о неравенстве
 $2^n \geq n^2$ при $n \geq 4$.

ИНДУКЦИЯ ПРЕВРАЩАЕТ МНОЖЕСТВО ОТДЕЛЬНЫХ СЛУЧАЕВ В ЕДИННЫЙ АЛГОРИТМ: СТАРТ, ПЕРЕХОД, ВЫВОД. ПОСЛЕ ПРАКТИКИ ЭТОТ ШАБЛОН РАБОТАЕТ ПОЧТИ АВТОМАТИЧЕСКИ.

3

основные элементы делают метод устойчивым и универсальным.

Обобщение структуры индукционного доказательства.

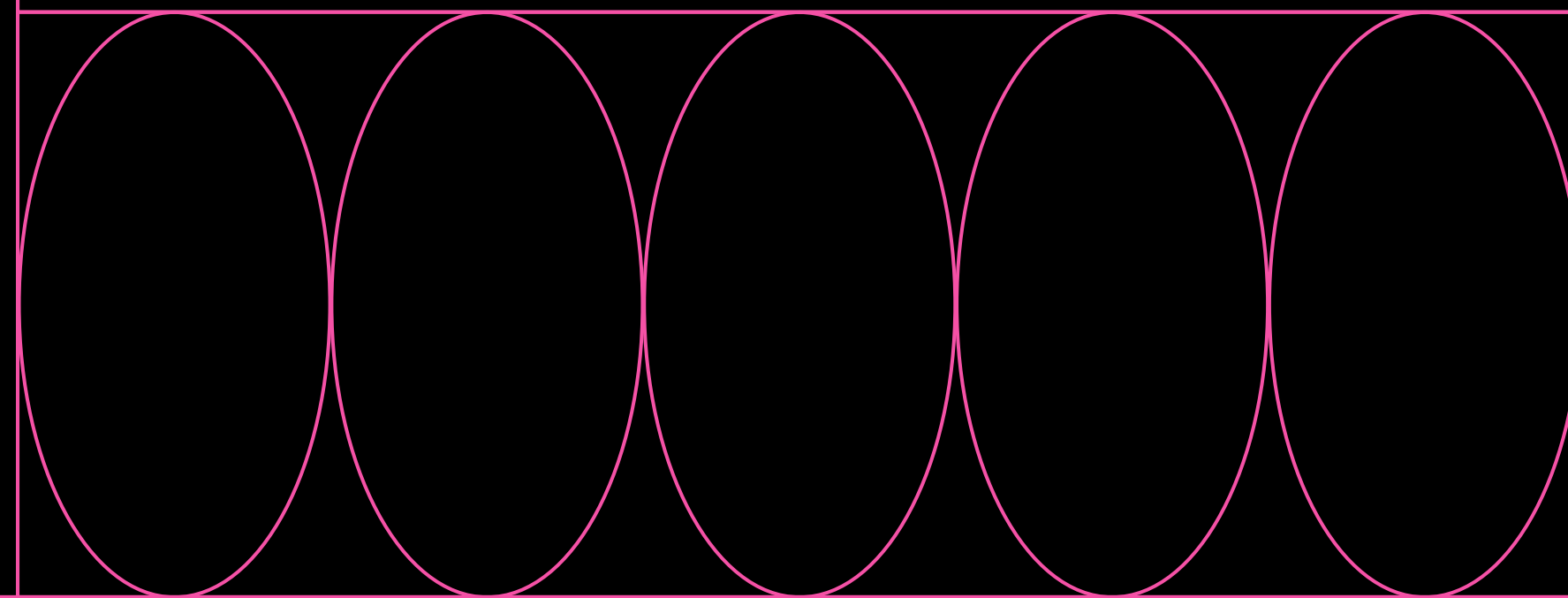
СТРОГОСТЬ ОБЕСПЕЧИВАЮТ ТРИ ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ ЧАСТИ: ФОРМУЛИРОВКА, БАЗА И ПЕРЕХОД. КОГДА ОНИ НА МЕСТЕ, ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСТАЁТСЯ КОРОТКИМ И ПОЛНЫМ.

3

частей достаточно для строгого школьного доказательства.

Стандартная структура доказательства методом математической индукции.

ИНДУКЦИЯ: КОРОТКИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНО Й ЦЕПОЧКИ



Индукция даёт универсальный способ доказывать утверждения для всех натуральных чисел: один верный шаг запускает всю цепочку. Дальше всё решают внимательность, чистая логика и регулярная практика.