

Различные комбинации из трех элементов

Как выбрать три объекта и не запутаться в подсчёте вариантов?



Комбинаторика: считаем выбор без порядка

Комбинаторика помогает находить все возможные варианты выбора. В задачах на комбинации важны только сами элементы, а их порядок не влияет на ответ.



Что значит выбрать три элемента

Один набор

Если из множества выбрать три объекта, получится тройка. Такой набор описывают по составу: какие именно элементы вошли в него, а не как они были записаны.

Порядок не важен

Наборы А, Б, В и В, Б, А считаются одной комбинацией, потому что в обоих случаях выбраны те же самые три элемента. Меняется только запись, а не сам выбор.



Комбинации без повторений

Один элемент — один раз

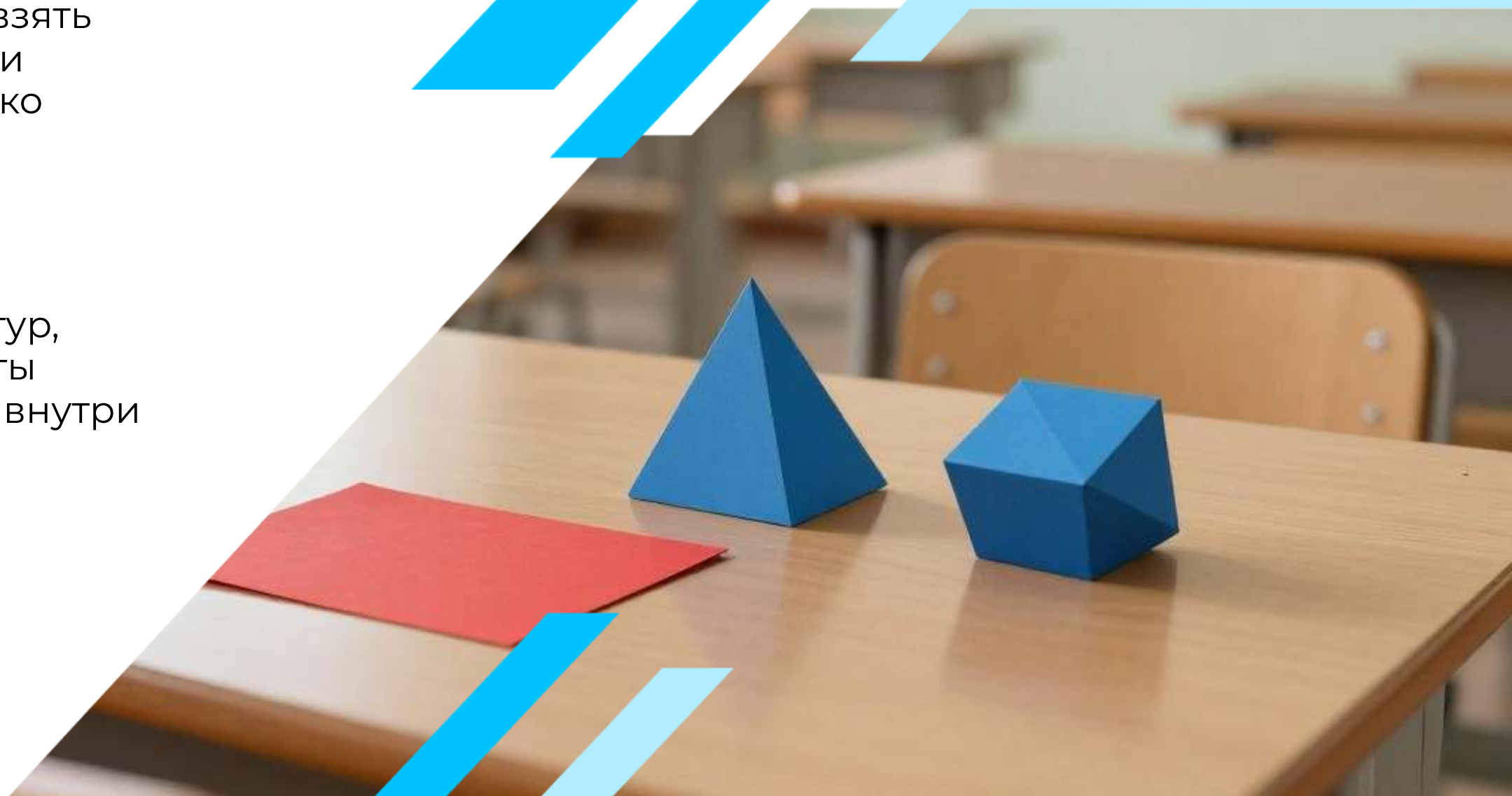
В задачах без повторений один и тот же объект нельзя взять дважды. Если учеников выбирают в дежурные или книги на выставку, каждый предмет может войти в набор только один раз.

Подходит для школьных задач

Такой тип выбора удобен для небольших множеств: фигур, карточек, книг, учеников. Можно перебрать все варианты и убедиться, что одинаковые предметы не повторяются внутри одной тройки.

Повтор исключён

Если в условии сказано, что элементы не повторяются, то любая тройка состоит из разных объектов. Это главное правило, по которому такие задачи отличаются от случаев с повторением.



Комбинации с повторениями

1

Повтор допускается

Иногда один и тот же объект можно выбрать несколько раз. Тогда в одной тройке могут встретиться одинаковые элементы, и это не считается ошибкой, а входит в условие задачи.

2

Считают состав и кратность

Важно не только, какой объект выбран, но и сколько раз он появился. Например, три шарика могут быть одинаковыми, двумя одинаковыми и одним другим или все разными.

3

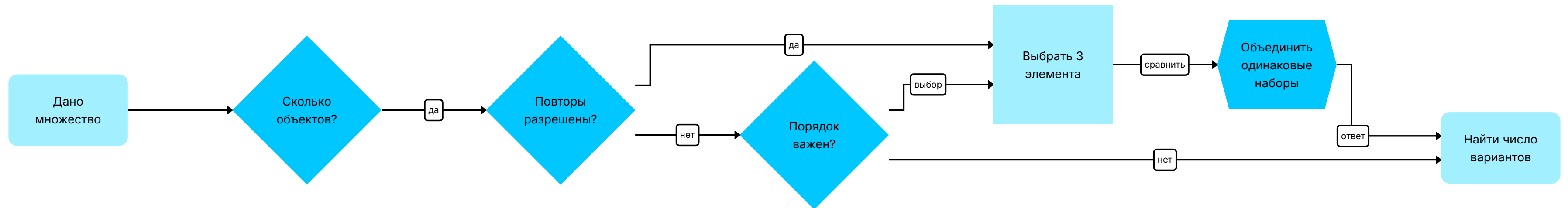
Итог зависит от условия

Такие задачи требуют особого подсчёта, потому что одинаковые наборы не исключаются. При повторениях меняется сам смысл выбора, и обычный перебор уже не всегда подходит.



План решения задачи на три элемента

Схема показывает общий алгоритм выбора трёх объектов в комбинаторной задаче.



Перестановки, размещения и комбинации

Таблица помогает быстро отличить три типа выбора и не перепутать задачи на подсчёт вариантов.

Комбинации проще для подсчёта, потому что одинаковые наборы не различаются по порядку.

Вид выбора	Порядок	Повторы	Пример
Перестановки	важен	нет	3 книги
Размещения	важен	обычно нет	3 места
Комбинации	не важен	нет	3 ученика

Формула помогает быстро считать число троек в задачах без повторений и заменяет длинный перебор всех вариантов.

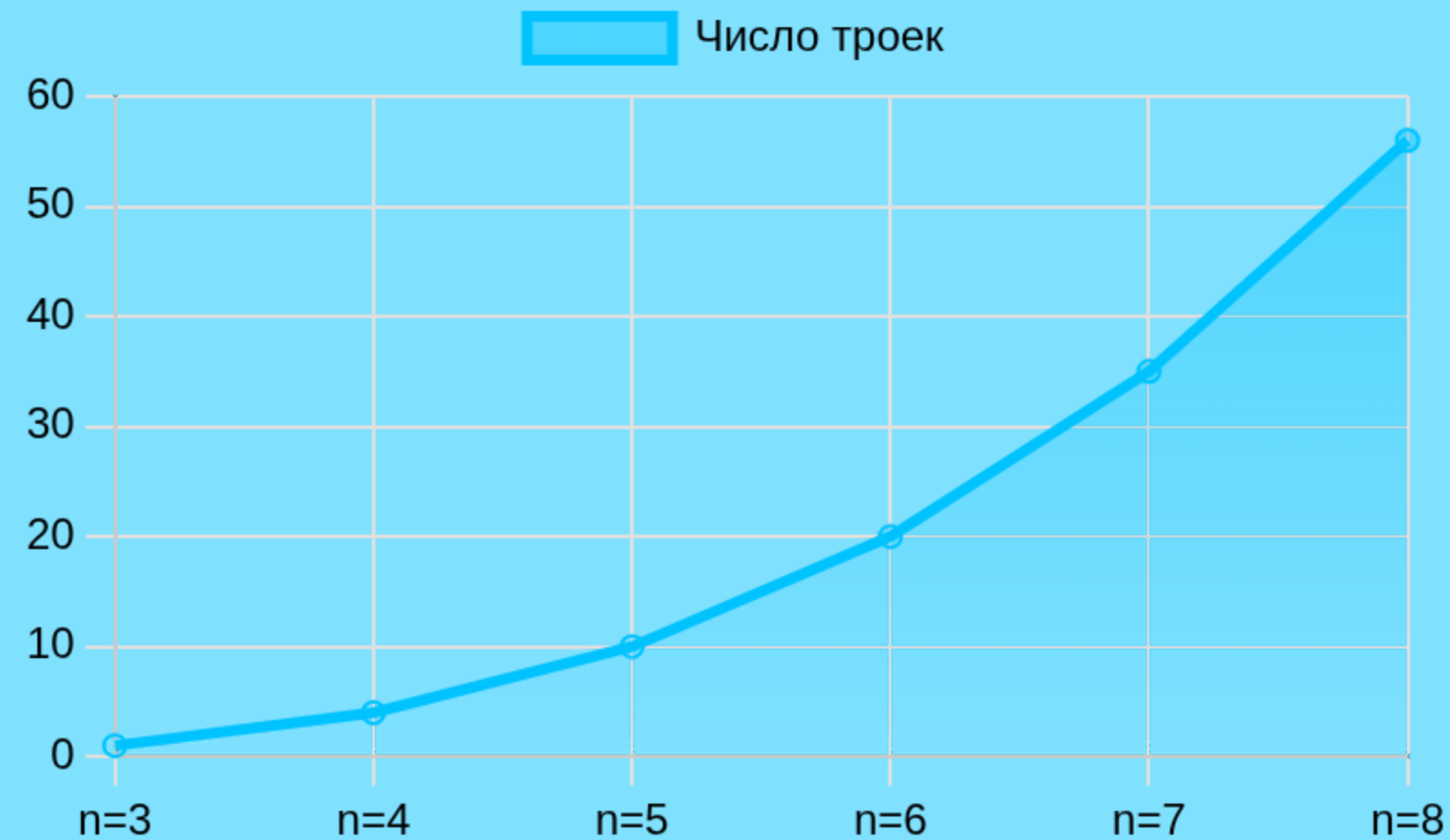
$$C(n,3)=n!/(3!(n-3)!)$$

**показывает, сколько
разных троек можно
выбрать из n объектов
без учёта порядка.**

Как растёт число троек при увеличении n

Даже небольшой рост числа объектов заметно увеличивает количество возможных троек. Поэтому перебор вариантов быстро становится длинным.

Число комбинаций растёт быстрее, чем кажется: каждое новое значение n добавляет сразу много новых троек.



Вычислено по формуле $C(n, 3)$

Как выбрать три ученика из четырех



А, Б и В

Представим четыре карточки с именами: А, Б, В и Г. Если взять первые три, получится одна тройка, и порядок здесь не влияет на результат. Карточки можно разложить на столе или изобразить кругами на схеме, чтобы показать состав набора.



А, Б и Г

Во второй тройке меняется только один участник: вместо В берут Г. Это уже другой вариант, потому что набор стал иным по составу. На рисунке удобно выделить выбранные карточки цветом, чтобы сразу увидеть, кто вошёл в группу.



А, В и Г

Третья тройка показывает, что один ученик может отсутствовать, а остальные входят в набор вместе. Такой пример помогает понять, что комбинации отличаются не порядком записи, а тем, какие элементы выбраны. Из четырёх учеников получается всего четыре разные тройки.

Почему одна и та же тройка может быть записана по-разному

1

Одна тройка — много записей

Набор А, Б, В можно записать шестью способами, если переставлять элементы местами. Но состав не меняется, поэтому все записи обозначают одну и ту же комбинацию.

2

Единый порядок записи

Чтобы не считать одинаковые наборы несколько раз, элементы приводят к общему правилу, например располагают по алфавиту. Тогда каждая тройка имеет только одну запись и один ответ.

Комбинации с повторениями на примере трех шариков



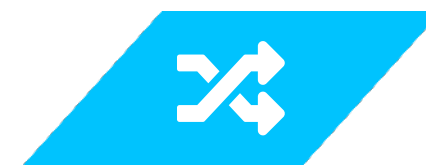
Три одинаковых

Если все три шарика одного цвета, набор все равно считается одним вариантом. Важен не внешний вид записи, а то, сколько раз выбран каждый цвет.



Два и один

Можно выбрать два шарика одного цвета и один другого. Такие наборы отличаются по составу, поэтому при подсчете учитывают количество повторений каждого цвета в тройке.



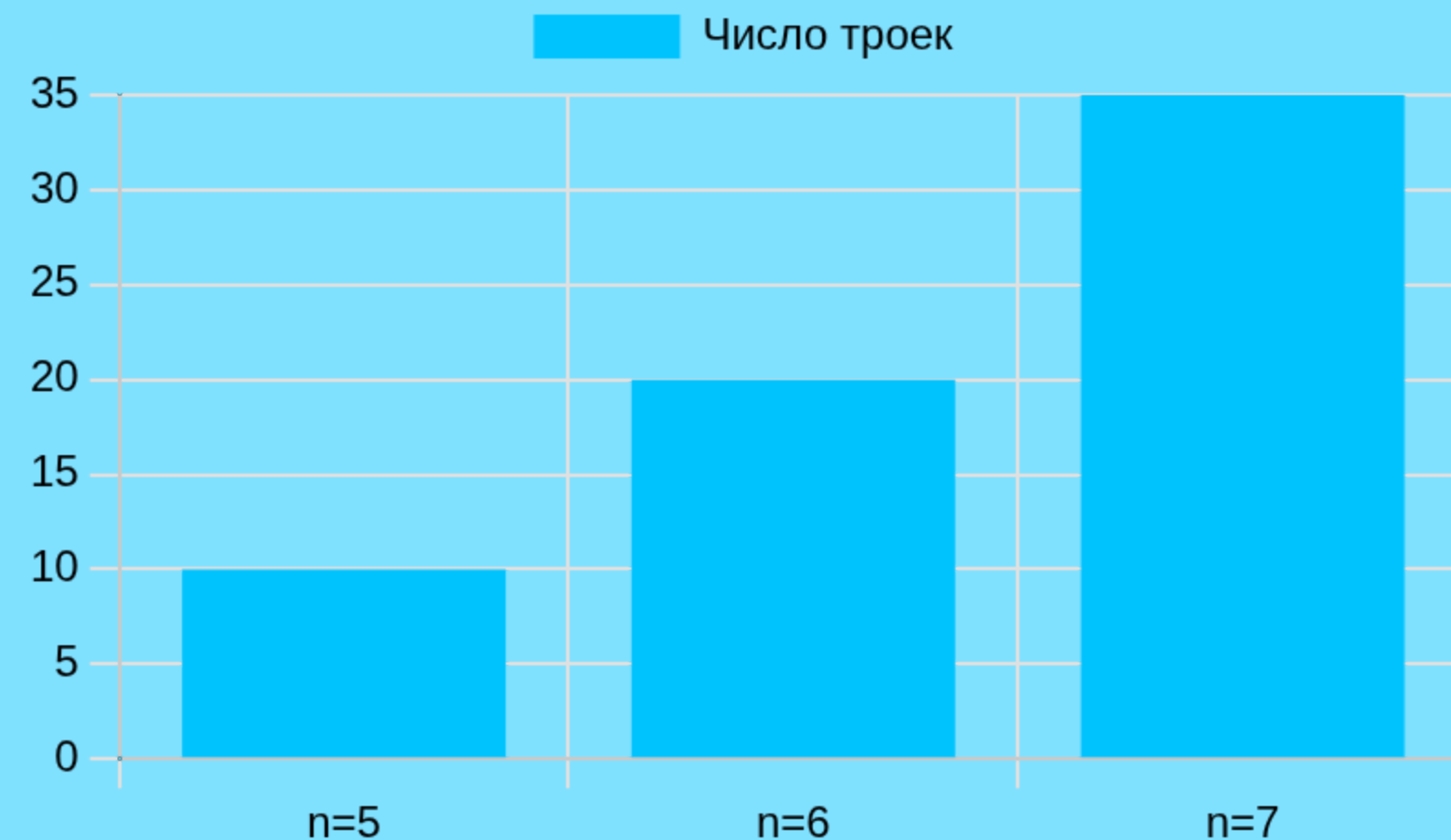
Три разных цвета

Если среди выбранных шариков нет повторов, получается еще один тип набора. В задачах с повторениями все эти случаи объединяются по составу, а не по порядку.

Сравнение количества пар и троек

Даже при одинаковом числе исходных объектов тройки образуют больше вариантов, чем пары, потому что при выборе добавляется еще один уровень сочетаний.

Число троек растет быстрее, чем число пар, поэтому задачи на выбор трех элементов обычно дают больше вариантов.



Данные из условия презентации: $C(5,2)=10$, $C(5,3)=10$; $C(6,2)=15$, $C(6,3)=20$; $C(7,2)=21$, $C(7,3)=35$.

Где в жизни встречаются комбинации из трех элементов



Ситуация	Что выбирают	Почему это комбинация
Салат	3 ингредиента	Порядок не важен
Команда	3 игрока	Состав один
Чтение	3 книги	Набор тот же
Рисунок	3 цвета	Главен выбор

В этих ситуациях важен именно состав набора, а не порядок элементов. Поэтому их удобно рассматривать как комбинации.

Во всех примерах один и тот же набор элементов дает один результат, поэтому порядок записи не влияет на ответ.

Обобщение школьных примеров из повседневной жизни.



Типичные ошибки в задачах на комбинации

Считают перестановки

Иногда одну и ту же тройку считают несколько раз, потому что меняют порядок записи. Для комбинаций это ошибка: важен только состав, а не расположение элементов.

Путают повторы

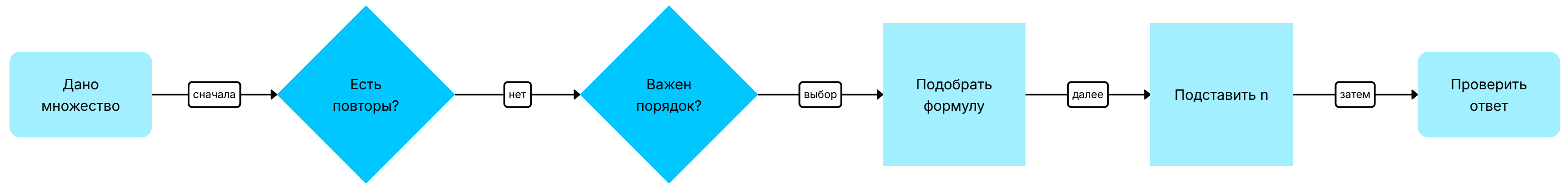
В некоторых задачах один объект можно взять только один раз, а в других — несколько. Если не заметить это условие, ответ получится неверным уже на первом шаге.

Смешивают виды выбора

Комбинации часто путают с размещениями, где порядок имеет значение. Чтобы избежать ошибки, нужно сразу проверить, меняется ли ответ при перестановке элементов местами.

Алгоритм решения задачи на три элемента

Последовательность шагов для задач на выбор трех объектов без ошибок в подсчете.



Комбинации из трех элементов в школьных ситуациях

Три участника для проекта

Учитель просит собрать мини-группу из трех человек. Состав группы важен, а порядок имен в списке ничего не меняет, поэтому одна и та же тройка учеников считается одним вариантом. Именно так и работает комбинация в школьной задаче.



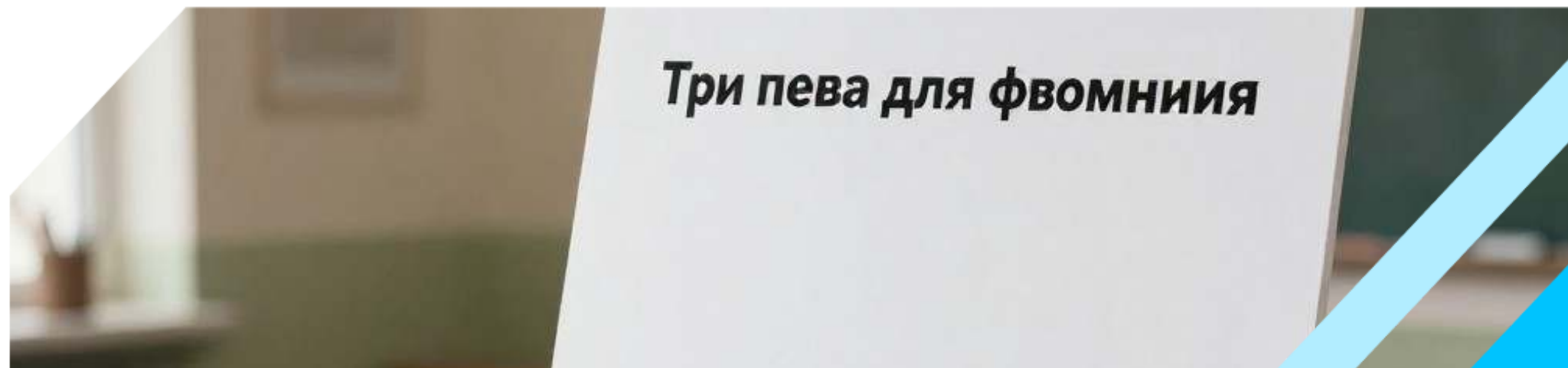
Три предмета для набора

На уроке труда или для выставки могут выбрать три предмета из нескольких. Если взять те же предметы в другом порядке, получится тот же набор, потому что меняется только запись, а не сам выбор. Это удобно при подсчете вариантов.



Три цвета для оформления

При оформлении плаката или проекта часто нужно выбрать три цвета. Здесь важны именно выбранные оттенки, а не порядок, в котором их перечислили. Поэтому такие задачи легко сравнивать с комбинациями из учебника математики.



Проверка на простых примерах

1

Пример с фруктами

Если из пяти фруктов выбрать три без повторений, получаем 10 вариантов. Этот результат подтверждает формулу сочетаний и показывает, что порядок внутри тройки не влияет на ответ.

2

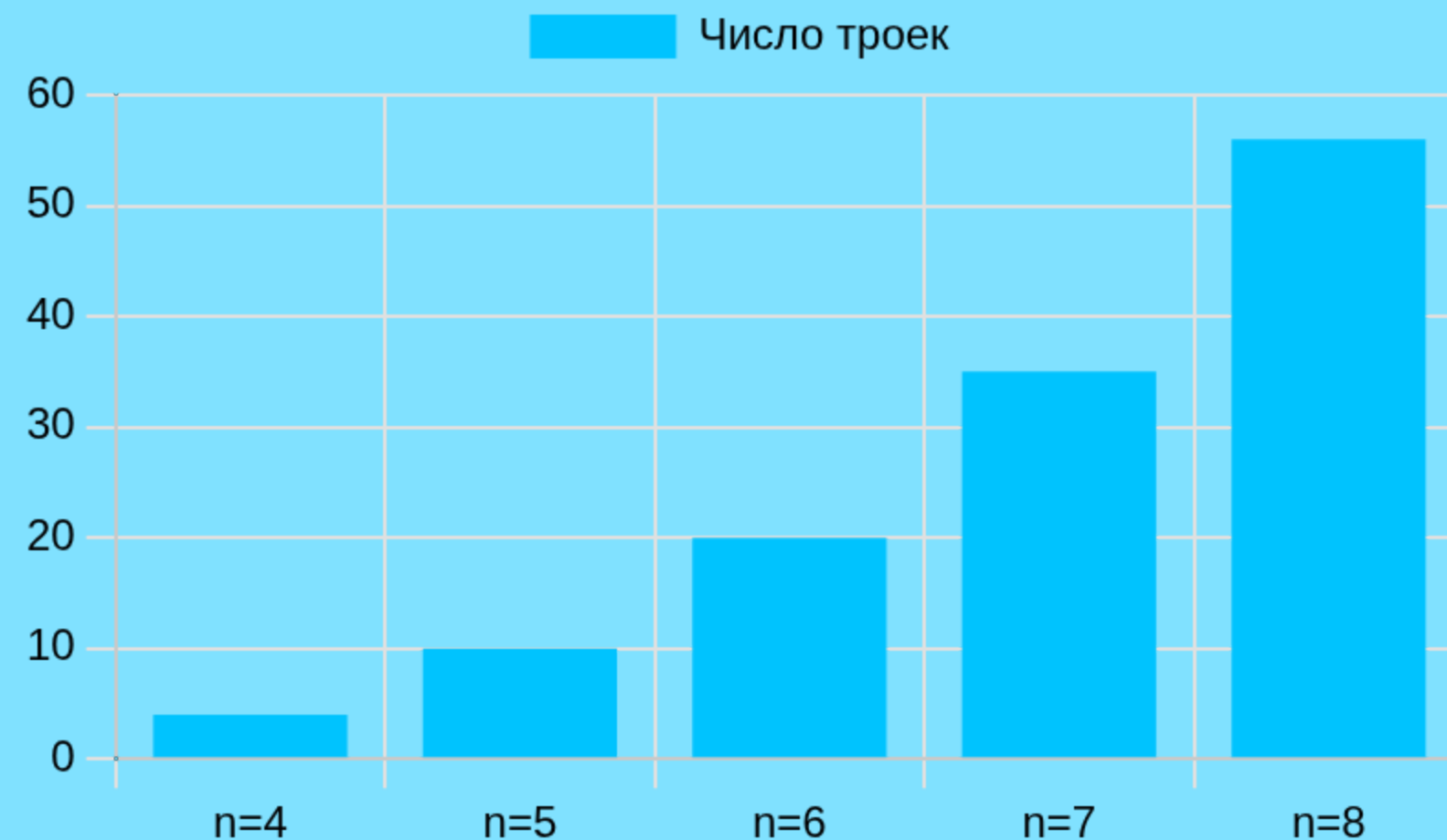
Пример с учениками

При выборе трех учеников из семи число вариантов равно 35. Если же важным становится расположение по местам, задача уже меняет тип, и считать нужно по-другому.

Сколько разных троек можно получить при разных n

Даже один дополнительный объект заметно расширяет число возможных наборов, поэтому рост значений становится все более быстрым.

Чем больше исходных объектов, тем резче увеличивается число троек; это помогает заранее оценивать сложность задачи.



Данные из условия презентации: 4, 10, 20, 35, 56.

Три элемента, много вариантов

Комбинации из трех элементов помогают быстро считать варианты, когда порядок не важен. Если понять разницу между выбором без повторений и с повторениями, задачи по алгебре становятся намного понятнее.