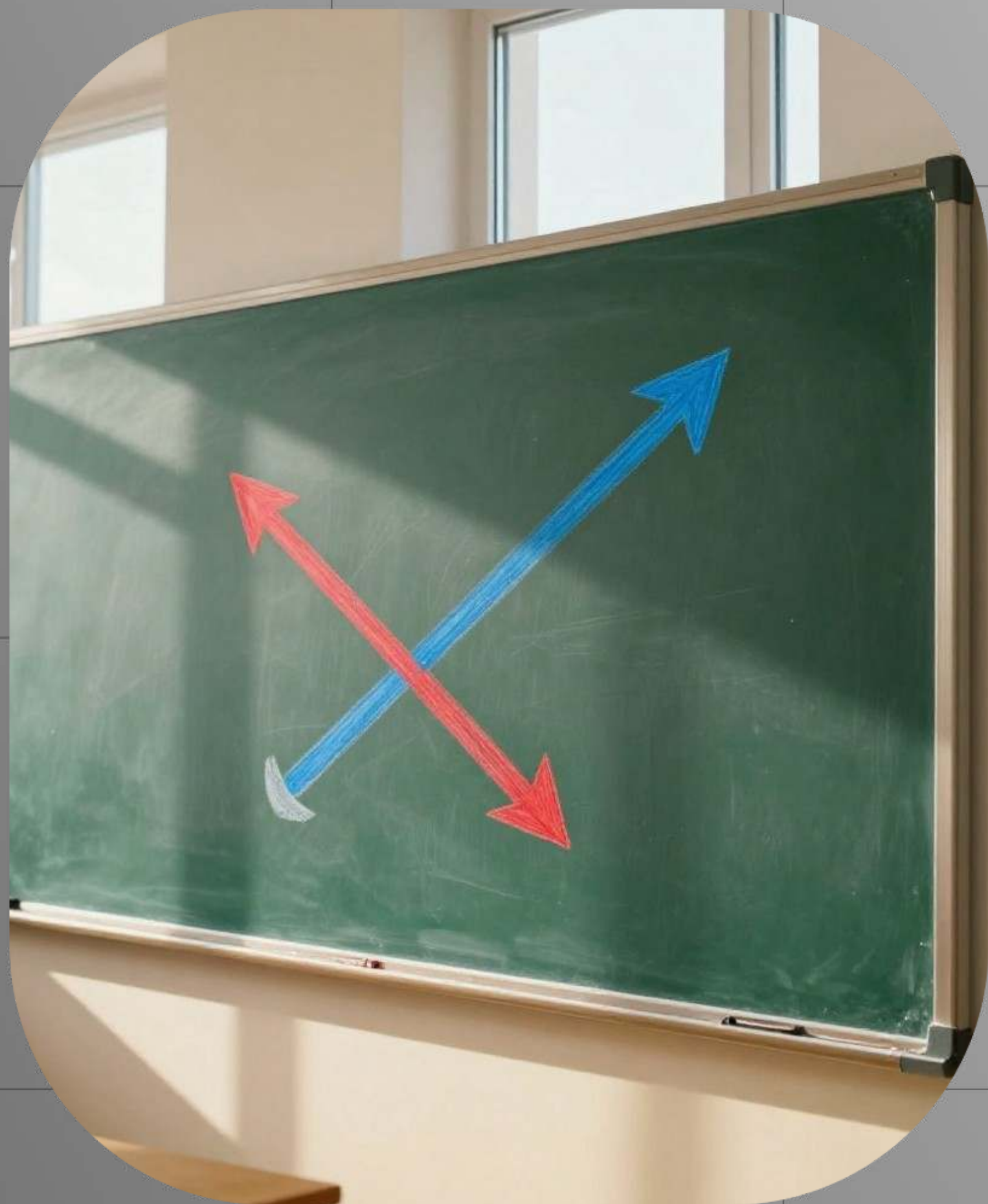


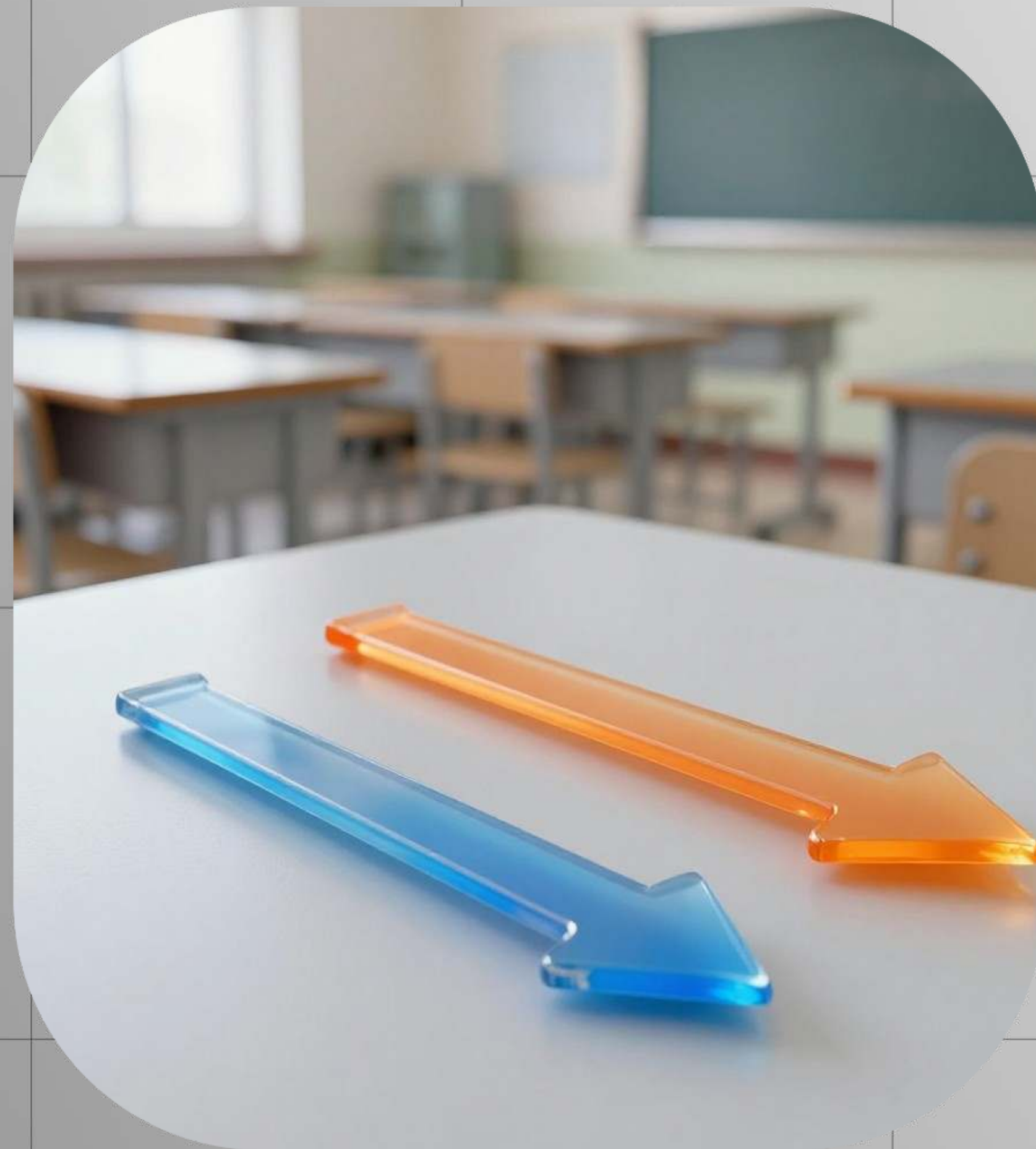


Свойства сложения векторов

Как складывать векторы и находить результат

Зачем нужны векторы

Векторы помогают описывать движение, силы и скорости там, где важны не только величина, но и направление. Знание их свойств делает построения, вычисления и решение задач в геометрии и физике проще и точнее.



Что называют вектором

Стрелка на чертеже

Вектор обычно изображают стрелкой: её начало показывает точку отсчёта, а конец — направление действия. Такая запись позволяет сразу увидеть, куда и насколько направлена величина.

Модуль вектора

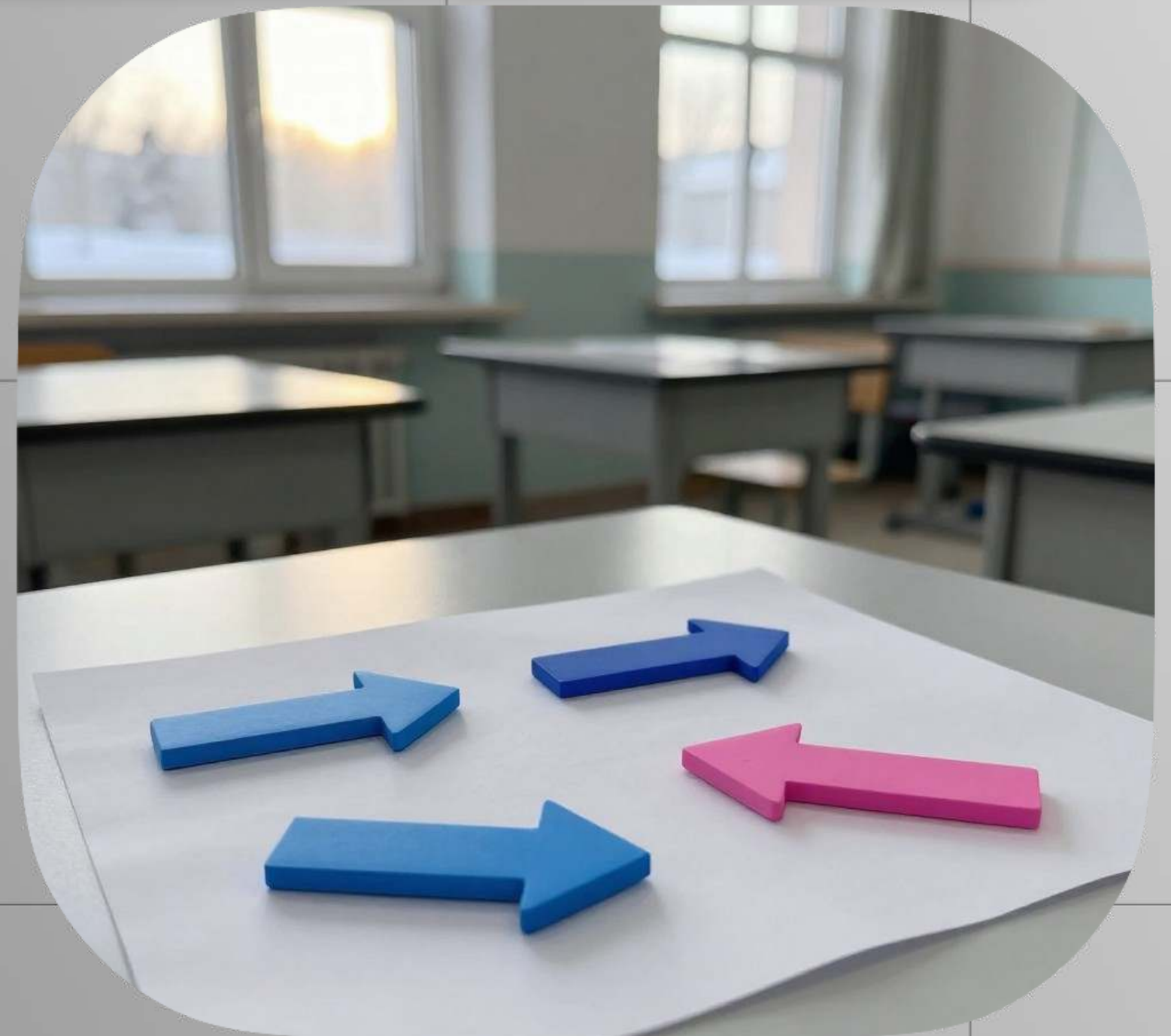
Длина стрелки называется модулем вектора. Она показывает, насколько велико перемещение, сила или другая величина, связанная с этим вектором, независимо от его положения на рисунке.

Равные векторы

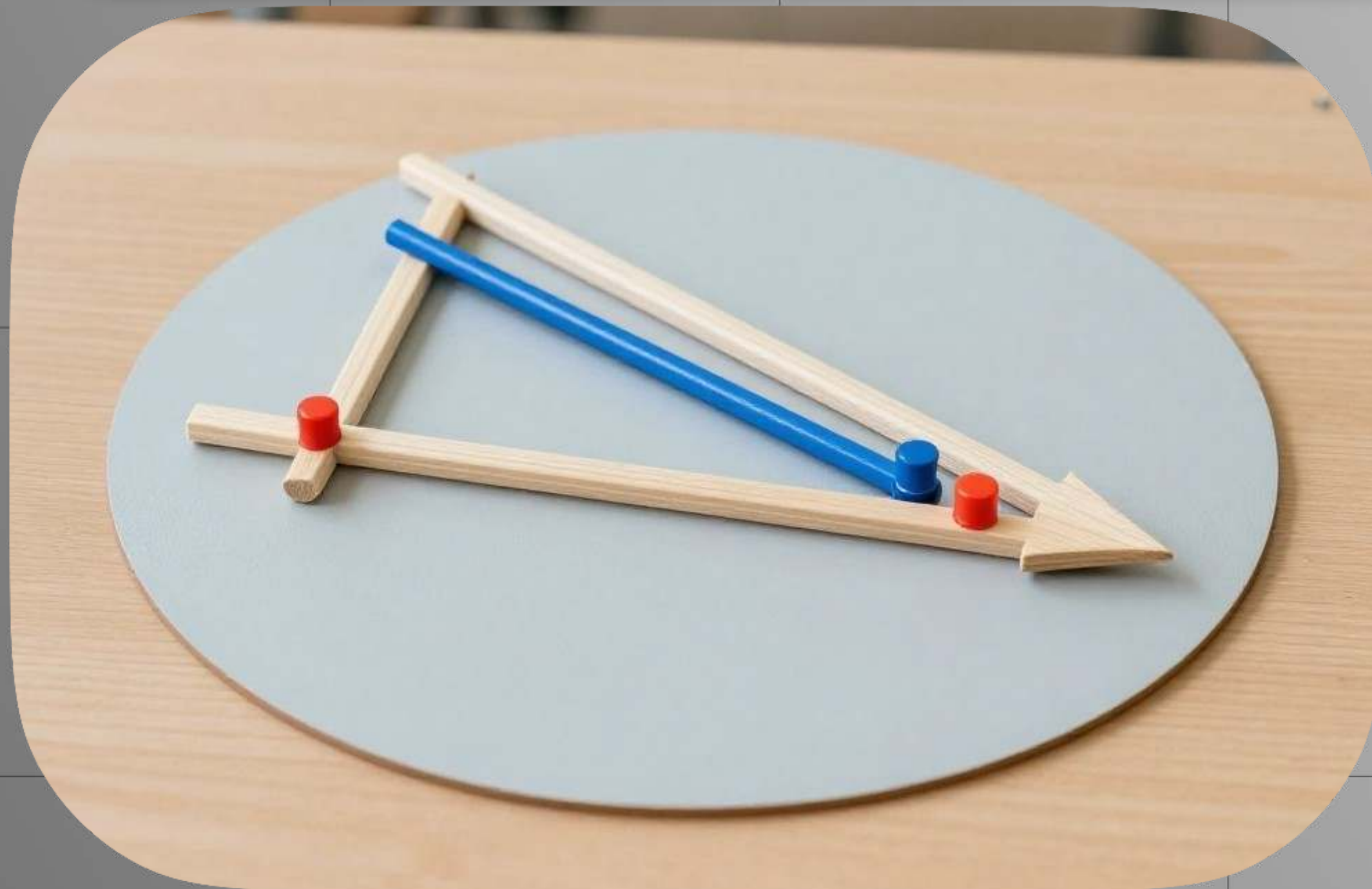
Равные векторы имеют одинаковую длину и одно направление. При этом их можно переносить по чертежу в разные места, и от этого они не перестают быть равными.

Нулевой вектор

Нулевой вектор имеет длину 0 и не указывает никакого направления. Его удобно использовать как особый случай, когда результат сложения полностью взаимно компенсируется.



Правило треугольника для сложения векторов



Перенос второго вектора

Сначала откладывают первый вектор, а затем ко его концу переносят второй, не меняя длину и направление. Так выстраивается цепочка последовательных действий или перемещений.

Построение суммы

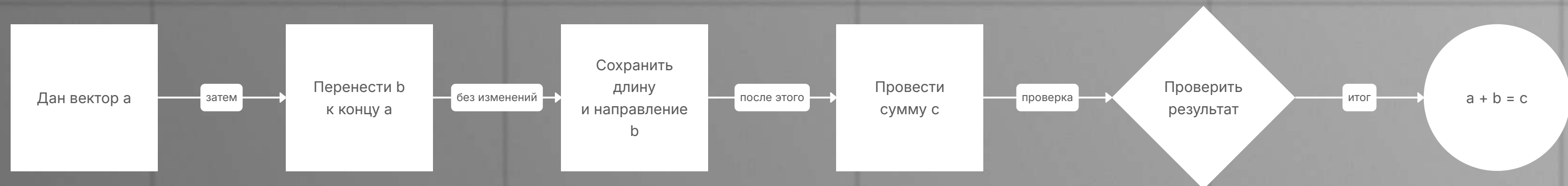
Результирующий вектор проводят от начала первого вектора к концу второго. Он показывает общий итог двух векторов и наглядно связывает их в одно действие.

Когда применять

Это правило особенно удобно в задачах на последовательные перемещения и при геометрических построениях, где важно видеть не отдельные шаги, а конечный результат.

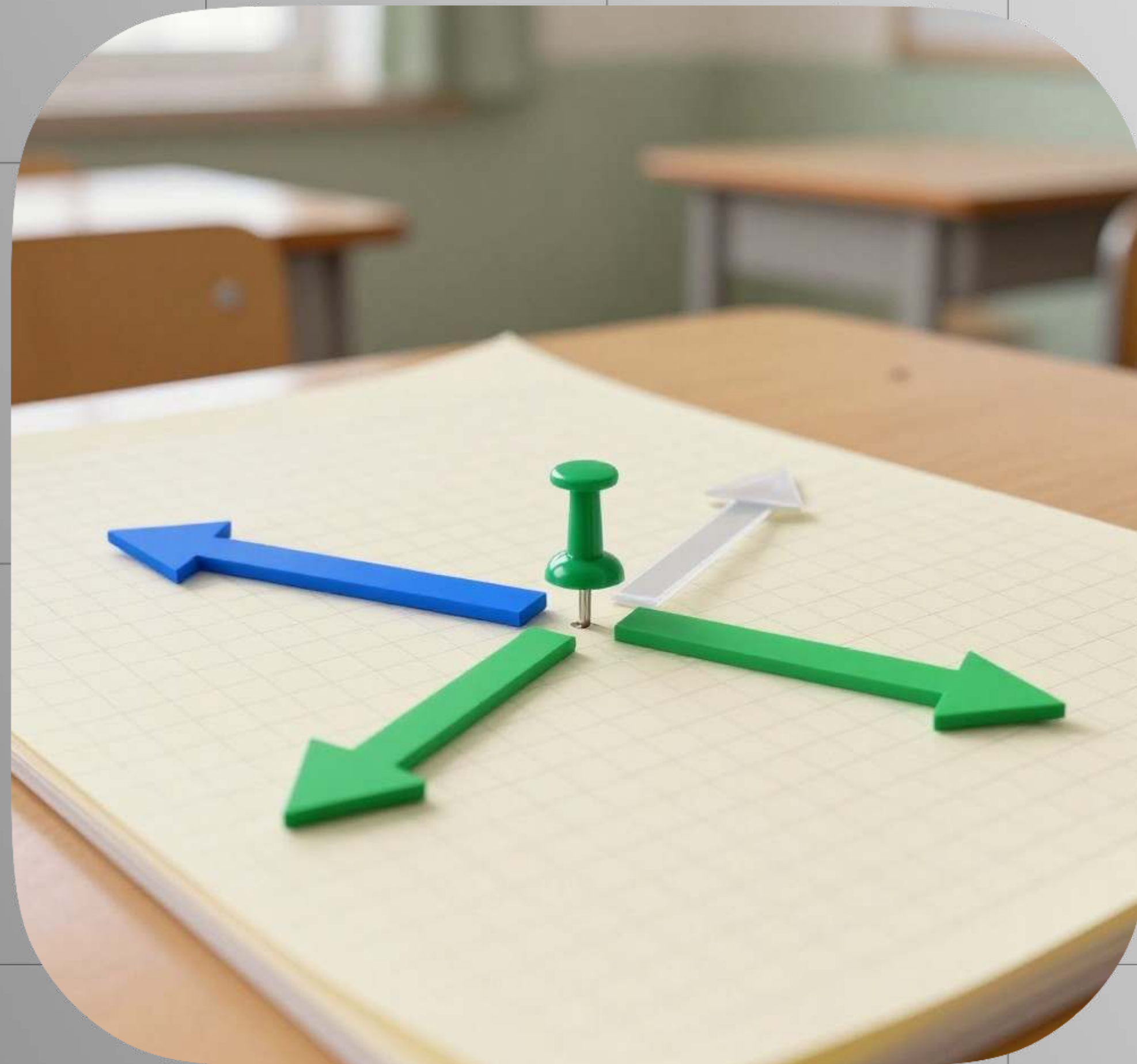
Как сложить векторы по правилу треугольника

Последовательность построения суммы двух векторов на чертеже

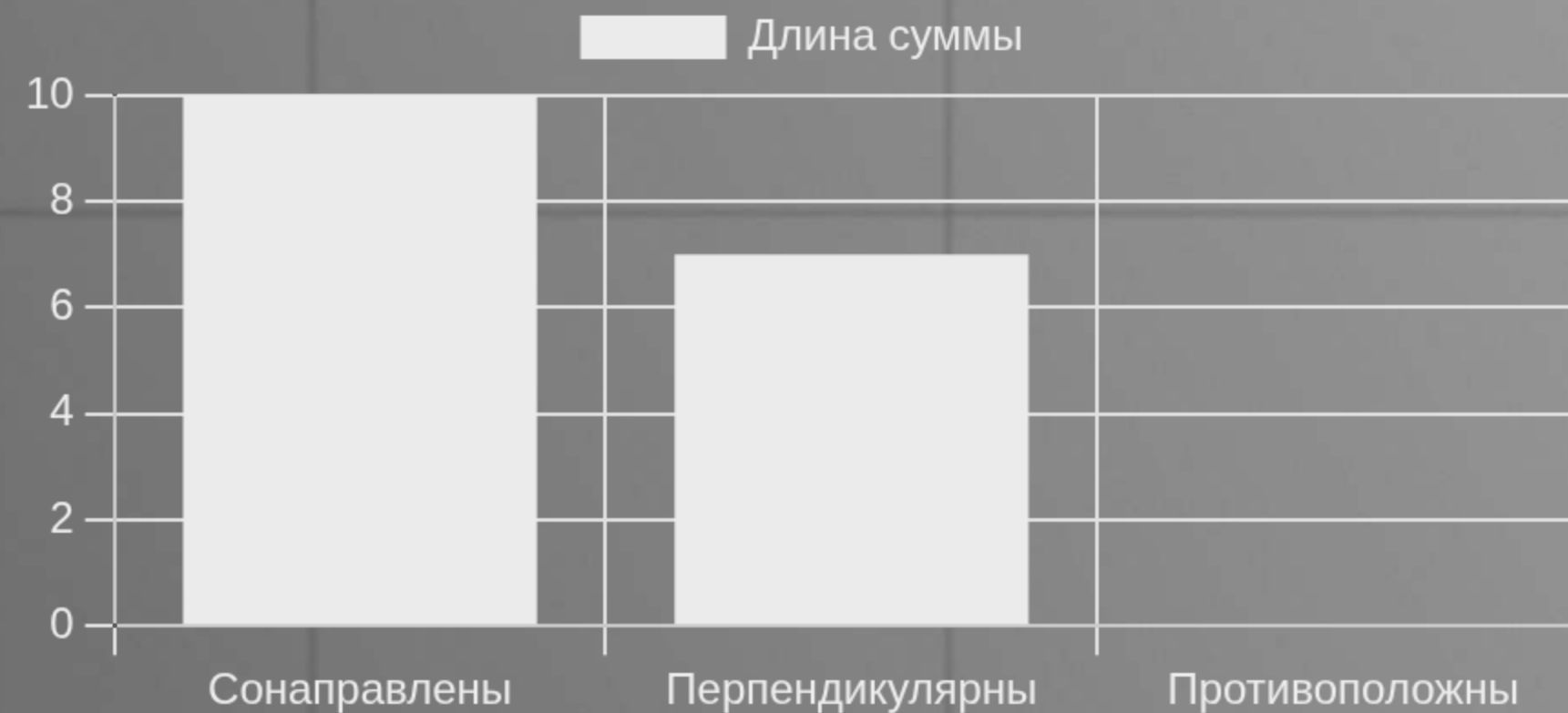


Правило параллелограмма

- 1 Начало из одной точки**
Оба вектора откладывают из одной и той же точки. Это позволяет сравнить их направление и длину, а затем построить фигуру, в которой они станут соседними сторонами.
- 2 Параллельные стороны**
Через концы векторов проводят прямые, параллельные друг другу. В результате получается параллелограмм, где каждый вектор сохраняет свои свойства, а фигура помогает увидеть сумму.
- 3 Диагональ как сумма**
Диагональ, выходящая из общей точки начала, и есть искомая сумма. Такой способ особенно полезен, когда два действия происходят одновременно, например две силы или два движения.



Как меняется длина суммы



Учебная схема по теме «Сложение векторов»

На рисунке показаны три характерных случая. Для наглядности значения выбраны условно: они сравнивают не конкретные измерения, а тип поведения суммы векторов.

Чем ближе направления векторов, тем больше их сумма; при противоположных направлениях она может исчезать.

Основные свойства сложения векторов

Свойство	Формула	Смысл
Переместительное	$a+b=b+a$	Порядок не важен
Сочетательное	$(a+b)+c=a+(b+c)$	Скобки можно менять
Нулевой вектор	$a+0=a$	Результат не меняется
Противоположные	$a+(-a)=0$	Сумма равна нулю

В таблице собраны главные свойства и их смысл в короткой форме.

Эти свойства позволяют выбирать удобный способ вычислений и упрощают построение суммы.

Переместительное свойство сложения

Порядок не влияет

Если поменять местами два слагаемых, сумма не изменится: $a+b=b+a$. Это значит, что векторный результат остаётся тем же, даже если действия выполнить в другом порядке.

Построение на чертеже

На рисунке можно сначала отложить один вектор, а затем второй, или наоборот. В обоих случаях получится один и тот же итоговый вектор, если длина и направление сохранены.

Польза для проверки

Свойство помогает быстро проверять решения: если два способа дают разные ответы, значит, где-то допущена ошибка. Поэтому оно удобно и в построениях, и в вычислениях.



Сочетательное свойство сложения

1 Скобки можно менять

При сложении трёх и более векторов можно группировать их по-разному: $(a+b)+c=a+(b+c)$. Итоговая сумма остаётся той же, меняется только порядок промежуточных действий.

2 Удобство в задачах

Это свойство особенно полезно, когда движение, сила или скорость складываются по этапам. Тогда можно сначала объединить часть векторов, а затем прибавить остальные.

3 Быстрый расчёт

Благодаря этому правилу решения становятся короче и понятнее. Ученику легче выбрать удобную последовательность вычислений и не потерять смысл всего действия.



Нулевой и противоположный векторы

Вектор без длины

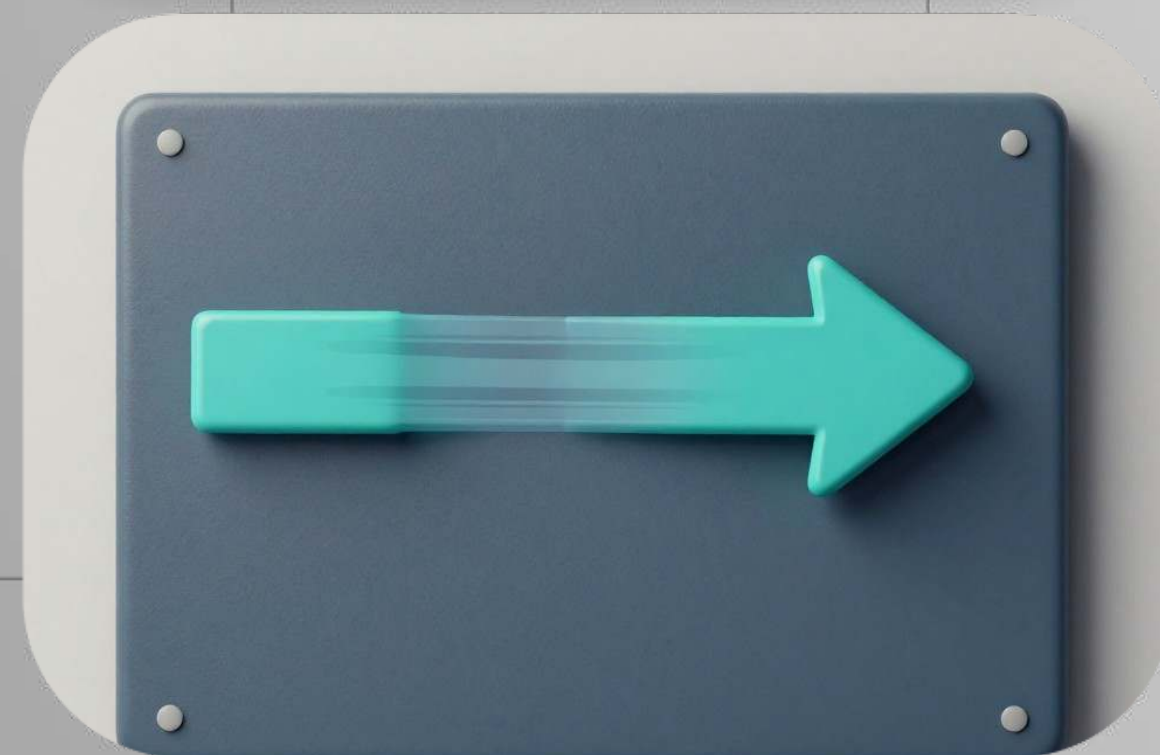
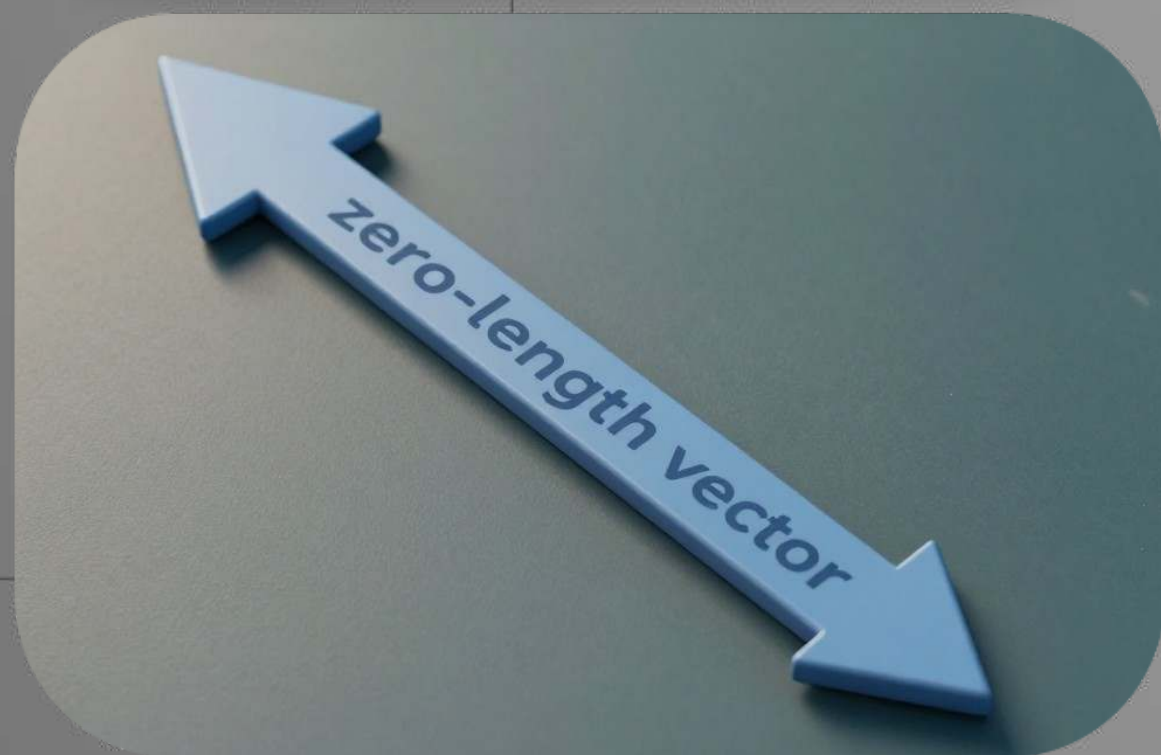
Нулевой вектор похож на стрелку, у которой начало и конец совпали в одной точке. У него длина равна нулю, поэтому направление не задаётся. На чертеже его часто отмечают как маленький знак у начальной точки, чтобы показать отсутствие смещения.

Две равные стрелки

Противоположные векторы удобно представить как две одинаковые по длине стрелки, направленные в разные стороны. Одна из них как будто «отменяет» другую. Если их приложить последовательно, итоговый результат снова окажется в начальной точке.

Сумма, которая исчезает

Когда к вектору прибавляют противоположный, получается нулевой вектор. Это видно и на рисунке, и в вычислениях: одинаковые по модулю части взаимно компенсируются. Такой пример помогает понять, что в векторах важно не только число, но и направление.



Сложение векторов на координатной плоскости



Учебная схема по теме «Сложение векторов»; данные: $a=(2; 1)$, $b=(1; 3)$, $c=(3; 4)$.

На схеме видно, что сумма получается по двум независимым осям: горизонтальной и вертикальной. Это делает построение на координатной сетке особенно наглядным.

Координаты вектора суммы равны суммам соответствующих координат слагаемых, поэтому точка конца смещается сразу по двум направлениям.

Сложение векторов по координатам

Записать координаты

1

Сначала определяют координаты обоих векторов и внимательно выписывают их в нужном порядке. Это помогает не перепутать ось x с осью y и избежать ошибок при дальнейшем сложении.

Сложить по частям

2

Затем складывают первые координаты между собой и отдельно вторые координаты. В результате получают новый вектор, у которого каждая координата отражает итоговое смещение по своей оси.

Проверить ответ

3

После вычисления полезно сравнить результат с рисунком или прикидкой по направлению. Если одна координата стала нулевой, а другая сохранилась, это означает движение только вдоль одной оси.

Примеры сложения векторов по координатам

a	b	a+b
(3; 2)	(1; 4)	(4; 6)
(5; 0)	(-2; 1)	(3; 1)
(2; -3)	(-2; 3)	(0; 0)

Учебные примеры по теме «Сложение векторов по координатам».

В таблице показано, как складываются координаты и каким бывает результат после взаимной компенсации отдельных компонент.

Складываются не целые векторы «целиком», а их координаты по отдельности; иногда сумма полностью обращается в нулевой вектор.

Сложение векторов в задачах на движение



Шаг на восток

Первое перемещение задаёт начальный вектор маршрута. На схеме он показывает, куда и на сколько сместился объект, а не какой путь он прошёл по дороге.



Поворот на север

Второй вектор добавляется к первому без изменения длины и направления. Если движения взаимно перпендикулярны, итоговое смещение удобно находить по теореме Пифагора.



Диагональ маршрута

Общий результат изображают диагональю прямоугольника или квадрата. Она соединяет начальную и конечную точки и показывает именно перемещение, а не сумму пройденных участков.



Путь и перемещение

Пройденный путь может быть длиннее итогового смещения. В задачах важно различать эти понятия: вектор отвечает за конечную точку, а не за все повороты на маршруте.

Равнодействующая сил как сумма векторов



Условная схема для иллюстрации правил сложения векторов; значения приведены схематически.

Схема показывает только характер изменения результата: он зависит от направления сил, даже если их величины одинаковы.

Если силы направлены одинаково, результат растёт; если противоположно — может исчезнуть; при угле между ними равнодействующая находится как сумма векторов.

Типичные ошибки при сложении векторов

1

Складывают только числа

Иногда ученик складывает лишь модули векторов и забывает про направление. Тогда ответ получается неверным, потому что вектор определяется не только длиной, но и тем, куда он направлен.

2

Нарушают перенос

При построении важно переносить вектор без поворота и без изменения длины. Если стрелка стала короче или изменила направление, сумма уже не соответствует исходным данным задачи.

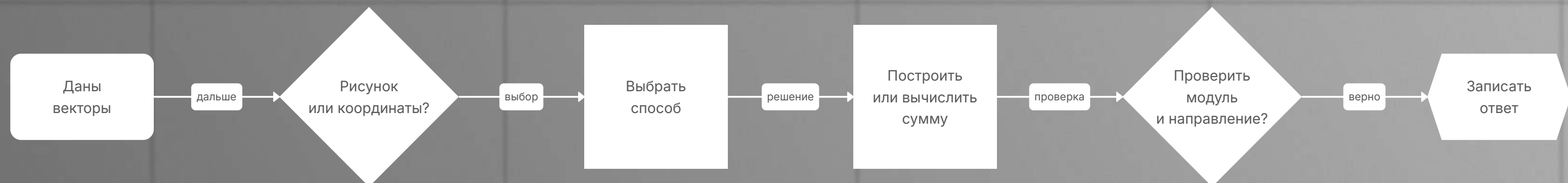
3

Путают координаты

Ещё одна ошибка — смешивать координаты самого вектора с координатами его конца на рисунке. Проверка по клеткам и повторное вычисление помогают быстро заметить такое несоответствие.

Алгоритм решения задач на сложение векторов

Последовательность действий для построения и вычисления суммы векторов



Маршрут и итоговое перемещение

Два шага по карте

Представим, что человек прошёл 2 км на восток, а затем ещё 2 км на север. На схеме его путь образует угол, а начальная и конечная точки оказываются в соседних вершинах квадрата со стороной 2 км.



Диагональ вместо дороги

Итоговое перемещение изображают диагональю этого квадрата. Оно показывает не весь пройденный путь, а только то, насколько далеко и в каком направлении оказалась конечная точка относительно начала.



Что нужно запомнить о сложении векторов

Сложение векторов учитывает и длину, и направление, поэтому его нельзя сводить к обычному сложению чисел. Правила треугольника и параллелограмма помогают строить сумму, а координатный способ делает вычисления быстрыми и точными.