

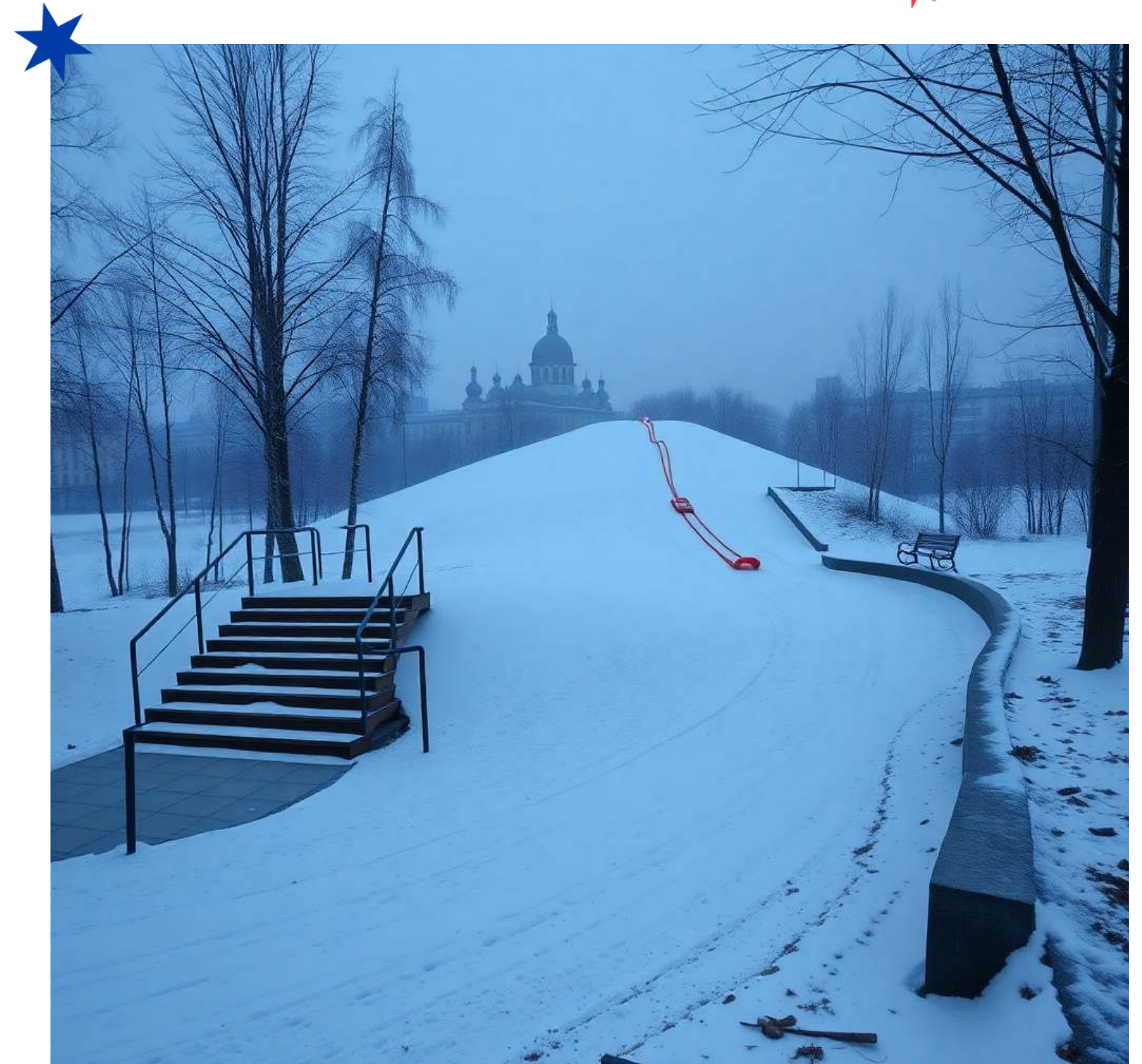
Возрастание и убывание функций

Как меняется функция при движении по оси x слева направо



Зачем понимать, как меняется функция

Эти понятия помогают быстро читать графики, сравнивать значения без лишних вычислений и решать задачи по алгебре. Они описывают реальные процессы: температуру, скорость, расход воды, число подписчиков и другие изменения во времени.



Функция и ее график

Одна x — одно y

Функция задает соответствие, при котором каждому значению x отвечает только одно значение y . Это правило можно записать формулой, таблицей или показать на графике.

Что показывает график

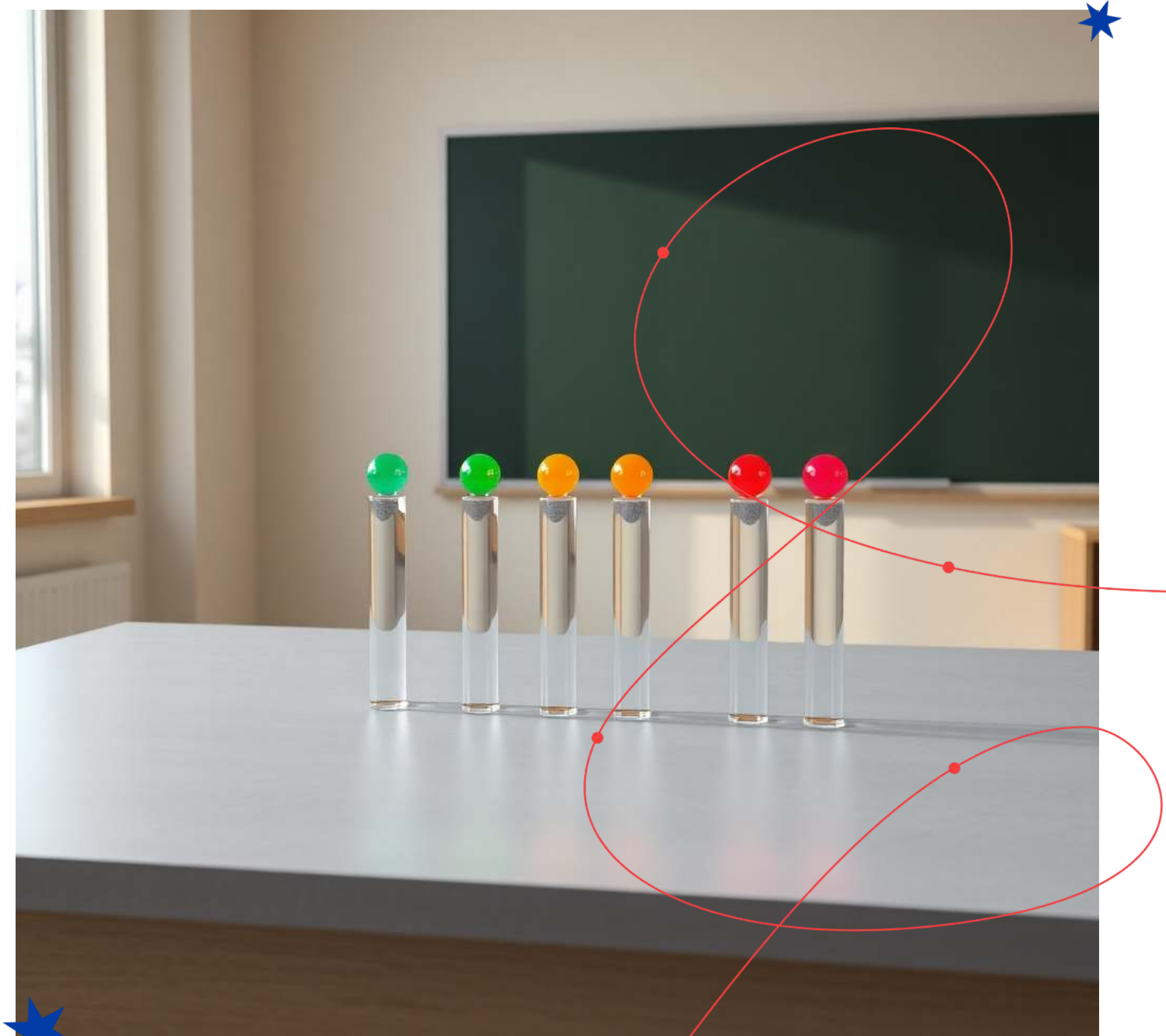
График функции состоит из всех точек с координатами $(x; y)$, которые удовлетворяют заданному правилу. По его виду удобно замечать, где значения растут, падают или не меняются.

Движение слева направо

Если смотреть на график слева направо, видно, как ведет себя y при увеличении x . Именно так определяют возрастание, убывание и постоянство функции.

Область и значения

У каждой функции есть область определения — все допустимые x , и множество значений — все получающиеся y . Эти множества помогают понимать, на каком участке можно исследовать поведение функции.



Определения возрастающей, убывающей и постоянной функции

1. Возрастает

Функция называется возрастающей на промежутке, если при увеличении x соответствующие значения y тоже увеличиваются. Чем правее точка, тем выше она расположена на графике.

2. Убывает

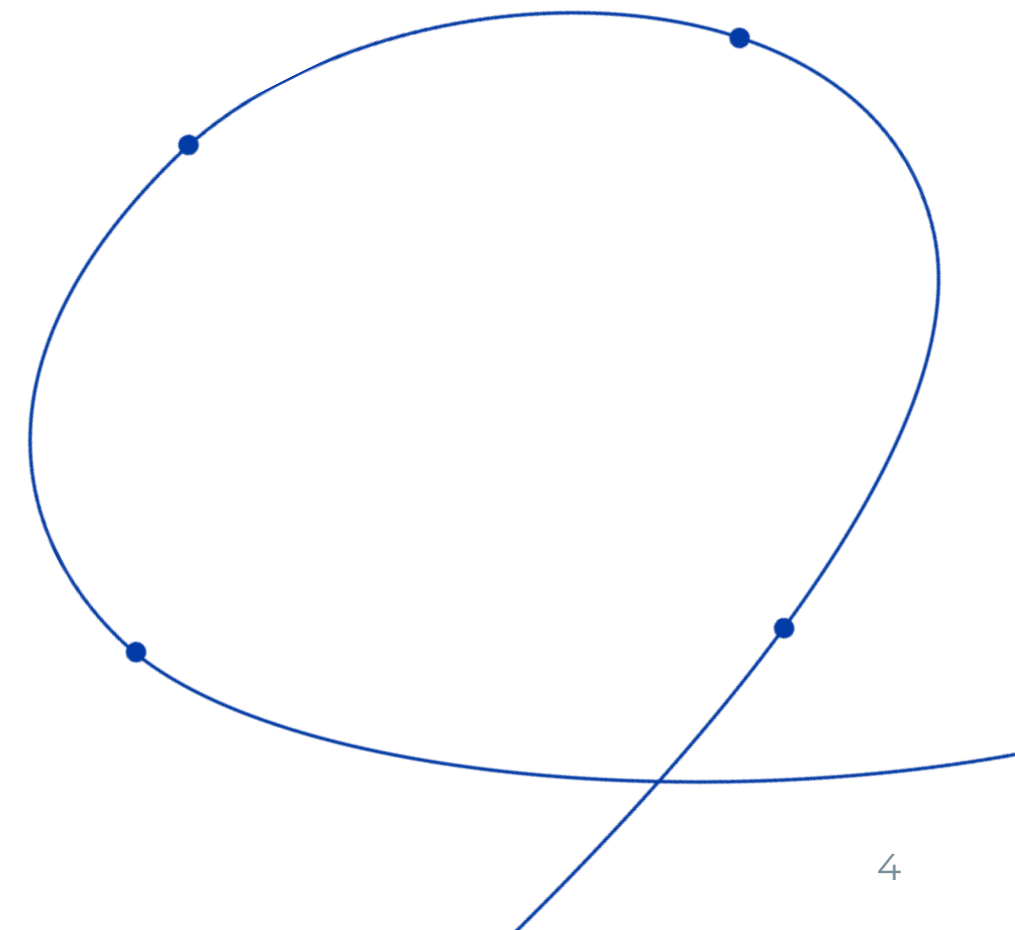
Функция называется убывающей на промежутке, если при увеличении x значения y уменьшаются. На графике это выглядит как движение вниз вправо.

3. Постоянна

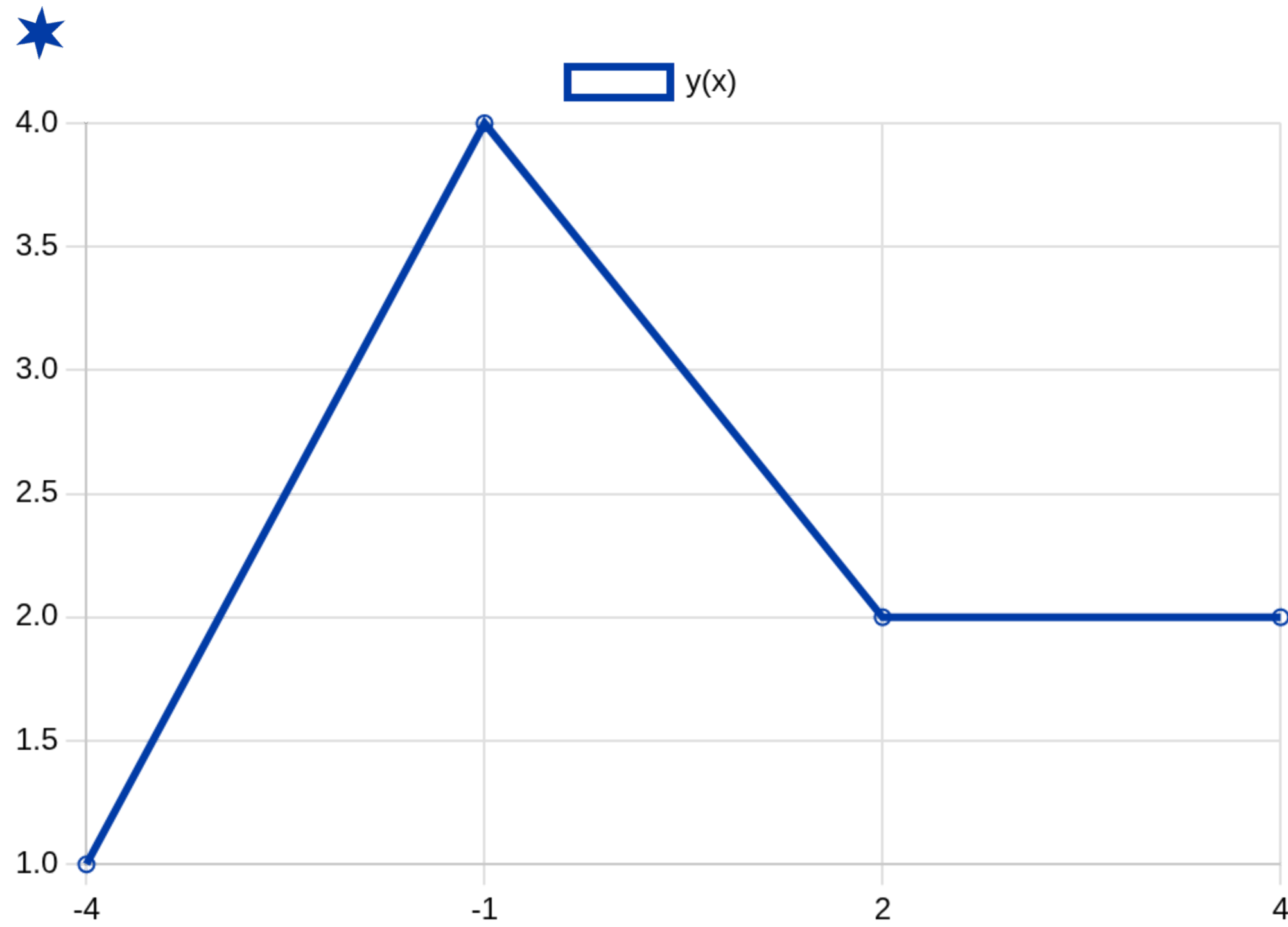
Функция является постоянной, если при любых x из выбранного промежутка значение y остается одним и тем же. Ее график образует горизонтальную линию.

4. Только на промежутке

Эти свойства обычно рассматривают не для всей функции сразу, а для отдельного участка. На разных промежутках одна и та же функция может вести себя по-разному.



Три вида поведения функции на одном графике



Ломаная показывает, что один и тот же график может менять направление несколько раз. Границы участков выделяют переходы между разными свойствами функции.

Отрезки графика позволяют сразу увидеть: сначала функция возрастает, затем убывает, а потом остается постоянной.

Учебная иллюстрация по теме «Возрастание и убывание функций»

Определение поведения функции по графику

Последовательность анализа графика на выбранном промежутке

Как узнать поведение функции по разным способам задания



Один и тот же вывод можно получить по графику, таблице или формуле. Способ зависит от того, как задана функция.

Разные формы записи ведут к одному результату: поведение функции можно определить несколькими способами.

Способ	Что смотрим	Вывод
График	Направление	Рост/спад
Таблица	Сравнение y	По x
Формула	Знак a	Правило

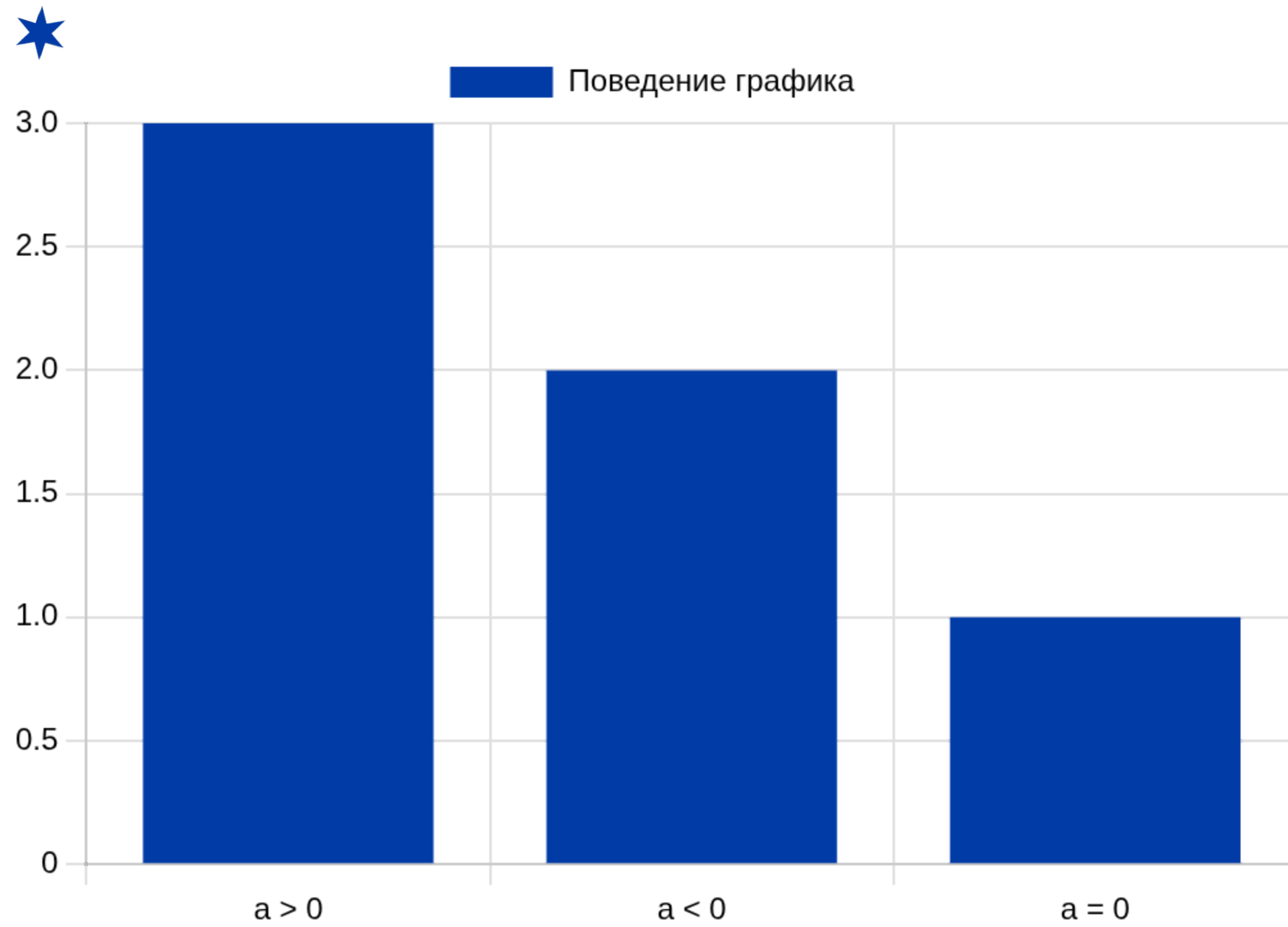


3

**случая важны для знака
коэффициента a :
положительный,
отрицательный
и нулевой.**

Для линейной функции достаточно посмотреть на знак a . Он сразу показывает, возрастает прямая, убывает она или остается горизонтальной.

Знак коэффициента a и направление графика



По виду прямой легко понять, как меняется функция. Чем больше наклон, тем заметнее рост или спад графика.

Положительный коэффициент ведет к возрастанию, отрицательный — к убыванию, нулевой — к постоянству.

Примеры из реальной жизни

Температура в течение дня

Утром воздух часто постепенно нагревается, а к вечеру начинает остывать. На графике это выглядит как участок возрастания, а затем участок убывания. По такому рисунку легко увидеть, в какие часы изменения были самыми заметными.



Счетчик воды

Показания счетчика обычно не уменьшаются: они растут только тогда, когда вода расходуется. Если на графике есть короткие ровные отрезки, это значит, что в эти моменты расхода не было, и значение оставалось постоянным.



Рост растения

Высота растения увеличивается неравномерно: после полива и света оно растет быстрее, а в некоторые дни почти не меняется. Такой пример показывает, что на одном графике могут чередоваться возрастание и почти горизонтальные участки.



Как не перепутать рост и убывание



1.

Сначала сравнивают x

Порядок точек по оси x важнее их высоты на рисунке. Сначала определяют, какое значение x больше, а затем смотрят, как изменилось соответствующее значение y .

2.

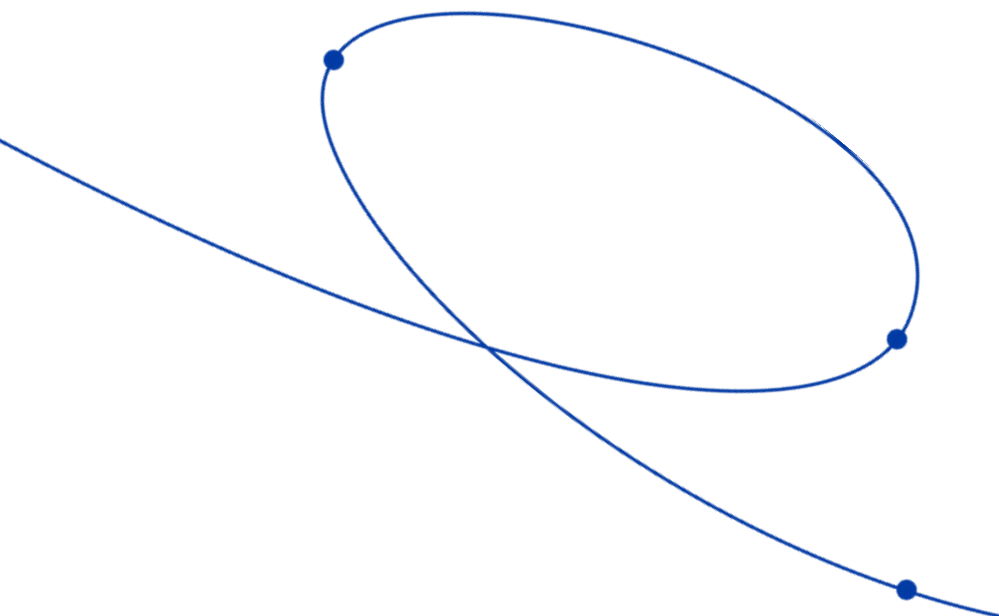
Смотрят направление движения

Если двигаться по графику слева направо и точки поднимаются, функция возрастает. Если линия опускается, функция убывает; горизонтальный участок означает постоянство.

3.

Проверяют вывод по парам

Для двух точек удобно записать сравнение: при $x_2 > x_1$ у возрастающей функции $y_2 > y_1$, а у убывающей — $y_2 < y_1$. Это помогает избежать ошибок.



Сравнение значений функции на примерах

По нескольким последовательным точкам видно, как ведёт себя функция при увеличении x .

Если при увеличении x значения y растут, функция возрастает; если уменьшаются — убывает; если не меняются — постоянна.

x	y	Вывод
$1 \rightarrow 2$	$3 \rightarrow 5$	возрастает
$1 \rightarrow 2$	$5 \rightarrow 3$	убывает
$1 \rightarrow 2$	$4 \rightarrow 4$	постоянна

Учебные примеры для иллюстрации трёх случаев поведения функции.

Алгоритм исследования функции

Последовательность действий при анализе графика, таблицы или формулы.

Промежутки возрастания и убывания



Начало анализа

Сначала определяют, на каких участках функция задана. Затем выбирают промежуток и смотрят, как меняются значения при движении слева направо.



Смена поведения

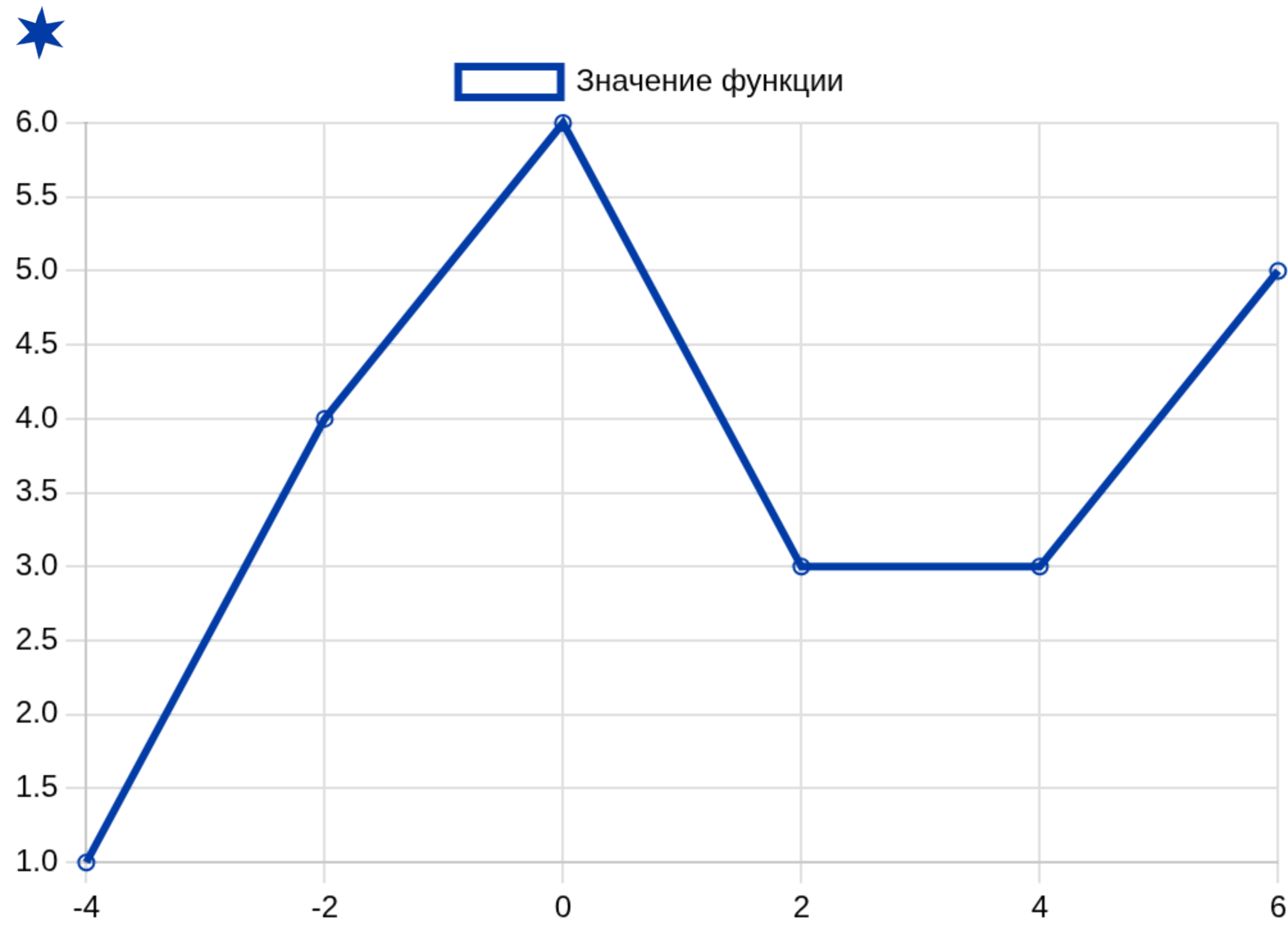
На одном участке график может подниматься, а на другом — опускаться. В точках максимума, минимума или перегиба направление часто меняется.

Запись ответа

Промежутки монотонности записывают отдельно, чтобы точно указать, где функция возрастает, убывает или сохраняет постоянное значение.



График с максимумом и минимумом



Ключевые точки помогают увидеть, где поведение меняется. По ним удобно выделять участки роста, спада и постоянства.

На графике есть локальный максимум и минимум, поэтому функция меняет направление несколько раз и имеет разные промежутки монотонности.

Иллюстративные данные для учебного графика, без привязки к реальному измерению.

Главное о постоянной функции



Одинаковые значения

Если при любых значениях x получается одно и то же y , функция не изменяется. Это означает, что на всём выбранном промежутке она постоянна.



Горизонтальный график

График постоянной функции — прямая, параллельная оси x . По ней легко увидеть, что высота точек не меняется, а значит, рост и убывание отсутствуют.



Отдельный случай

Постоянную функцию не относят ни к возрастающим, ни к убывающим. В задачах она часто описывает величину, которая некоторое время остаётся неизменной.



Словесная и математическая запись свойств функции



Три формы записи помогают связать привычные слова с алгебраическими обозначениями.

Одно и то же свойство можно описать словами, формулой и кратким смыслом, поэтому важно уверенно читать все три записи.

Свойство	Запись	Смысл
Возрастает	$x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 > y_1$	у растёт
Убывает	$x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 < y_1$	у падает
Постоянна	$x_1, x_2 \rightarrow y_1 = y_2$	у не меняется



Стандартные определения монотонности функции из школьного курса алгебры.

Типичные ошибки при определении промежутков

1. Путают левую и правую часть

Иногда смотрят только на высоту точек и не замечают, что по оси x нужно двигаться слева направо. Из-за этого рост принимают за убывание.

2. Не учитывают разрывы

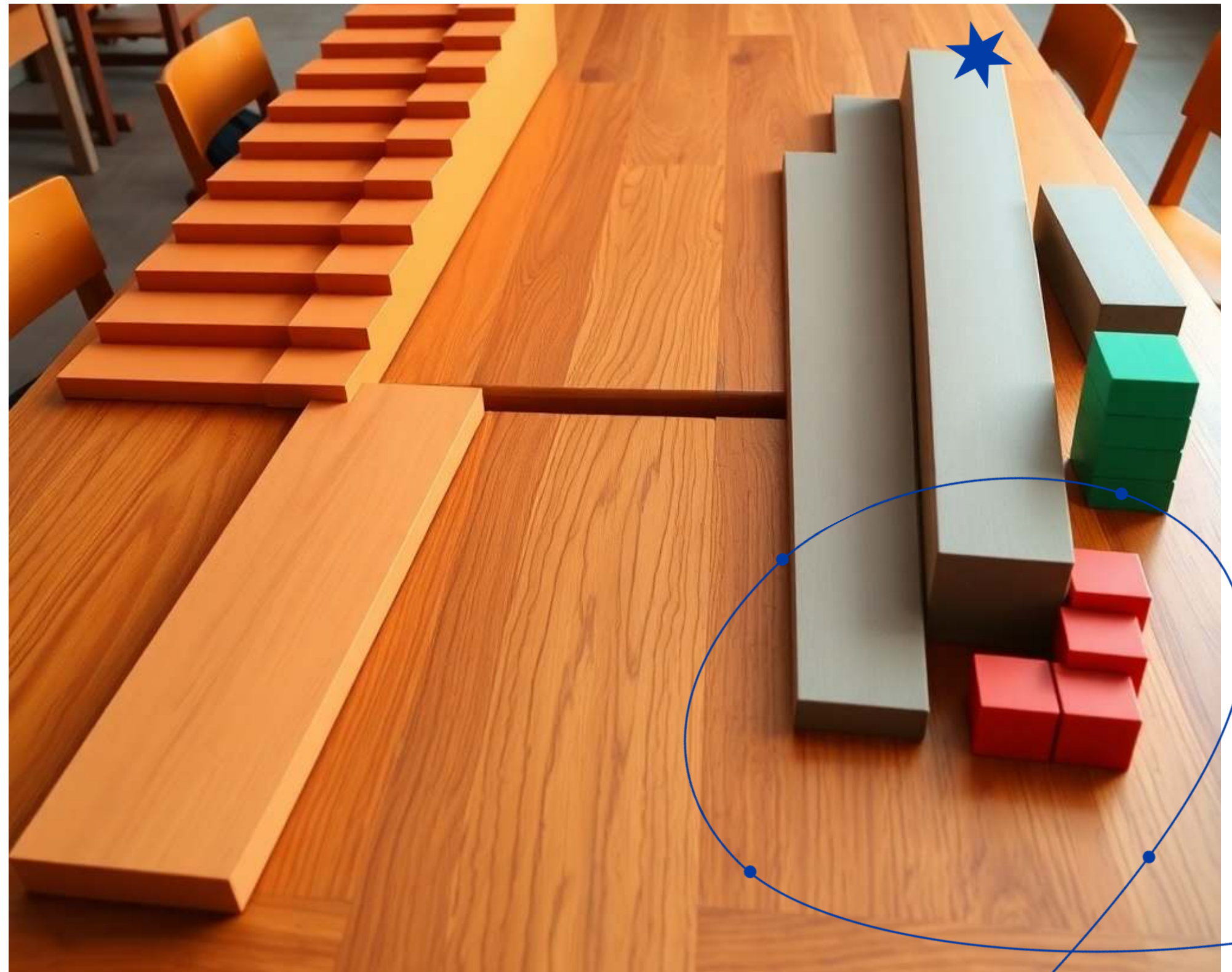
Если график имеет разрыв или отдельные участки, их нельзя объединять в один промежуток. Каждый фрагмент функции анализируют отдельно, иначе ответ будет неточным.

3. Смешивают всю функцию и участок

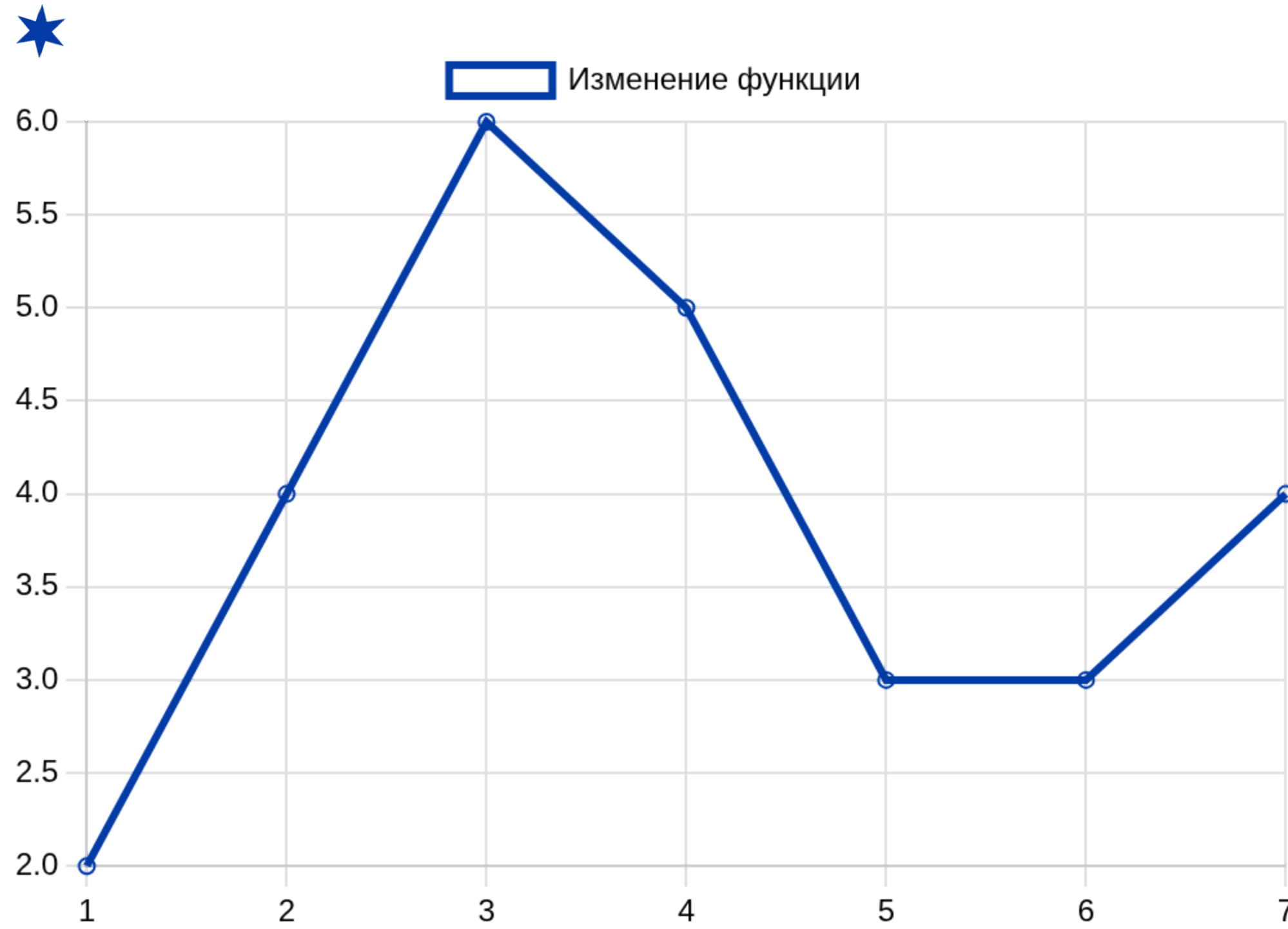
Функция может быть возрастающей только на части графика. Нельзя делать вывод по одному короткому отрезку и переносить его на всю область определения.

4. Горизонталь считают спадом

Нередко ровный участок ошибочно называют убывающим. Если значения у не меняются, это постоянный промежуток, а не спад и не рост.



Проверка на одном графике



По форме линии легко увидеть, где функция меняет направление. Отдельные подписи помогают быстро сопоставить участок графика и свойство функции.

Рост, спад и постоянный отрезок на одном рисунке показывают, что поведение функции нужно анализировать по промежуткам, а не по всему графику сразу.

Иллюстративный учебный график, составленный для демонстрации трёх типов поведения функции.

Что важно запомнить

Возрастание, убывание и постоянство показывают, как меняются значения функции при движении по оси x . Эти свойства удобно определять по графику, таблице и формуле, а затем записывать по промежуткам.

