

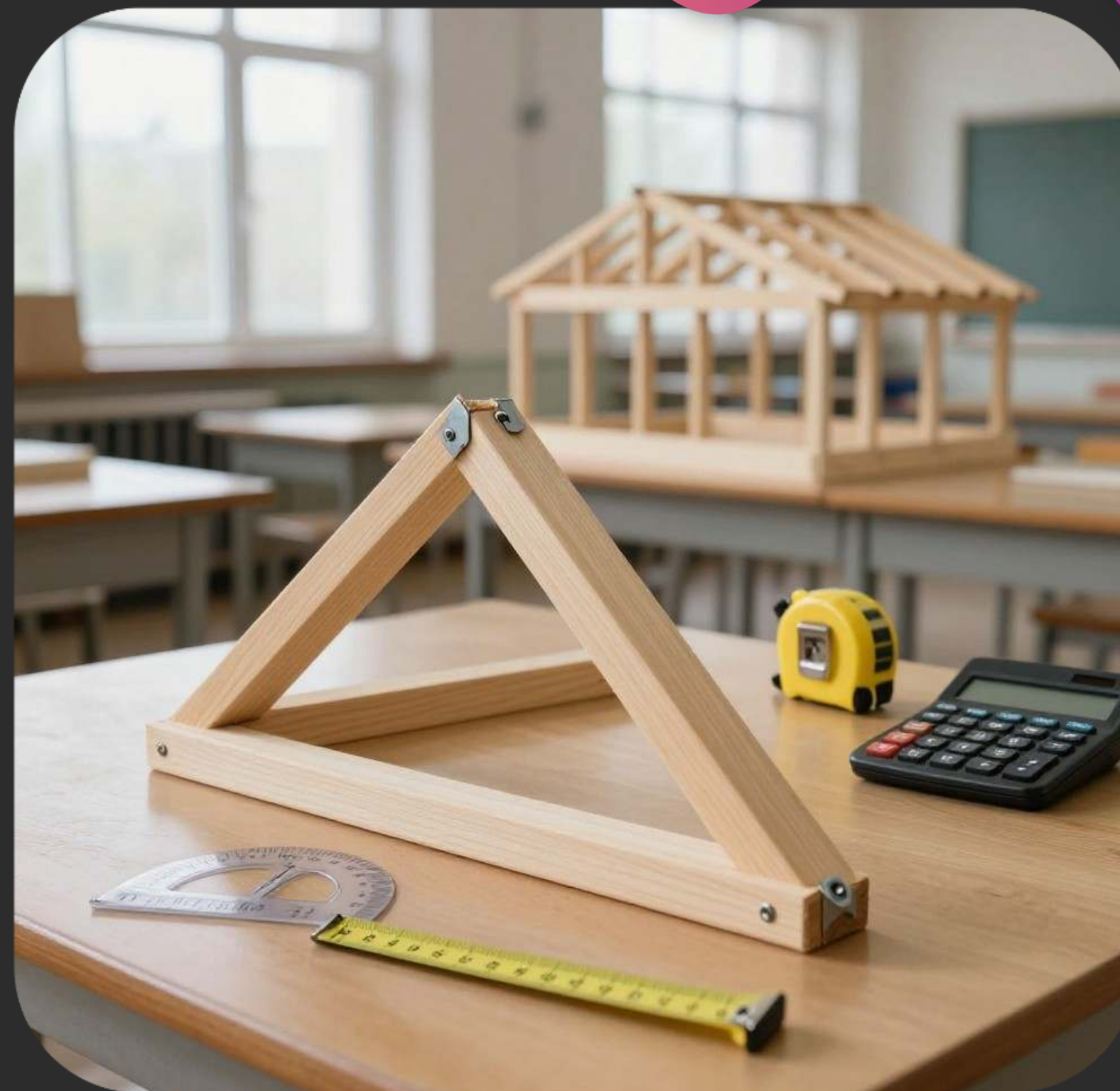
# Решение треугольников: теорема косинусов

Научимся находить стороны и углы любого  
треугольника.



# Почему эта теорема важна

Теорема косинусов помогает решать треугольники, когда известны две стороны и угол между ними или все три стороны. Она особенно полезна для произвольных треугольников и дополняет уже знакомые правила геометрии в 7 классе.



# Что нужно знать перед началом

## Обозначения сторон

Стороны треугольника обычно обозначают буквами  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , а противолежащие им углы —  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Важно не путать сторону и угол, когда выбирается формула.

## Сумма углов

В любом треугольнике сумма внутренних углов равна  $180^\circ$ . Это свойство помогает проверять ответ после вычислений и находить неизвестные углы, если уже известны два других.

## Где нужен косинус

В формулах теоремы используется косинус угла между сторонами. Поэтому нужно точно понимать, какой угол стоит в условии и какая сторона ему противолежит.

## Что известно и что искать

Перед решением полезно сразу выделить известные данные и неизвестную величину. Тогда проще выбрать нужную запись теоремы и не ошибиться в подстановке чисел.

# Связь сторон и углов в треугольнике

## Третья сторона

Если известны две стороны и угол между ними, теорема косинусов позволяет найти третью сторону. В формуле она стоит слева от знака равенства.

## Зависимость от угла

Длина стороны определяется не только самими отрезками, но и углом между ними. При одном и том же наборе сторон результат меняется, если меняется угол.

## Обобщение Пифагора

Когда угол между сторонами равен  $90^\circ$ , косинус становится равным нулю. Тогда формула превращается в теорему Пифагора и даёт знакомое правило для прямоугольного треугольника.

## Любой треугольник

Эта связь работает не только для прямоугольных фигур, а для любого треугольника. Поэтому теорема косинусов особенно удобна в общих задачах геометрии.



# Основные формулы теоремы косинусов

| Формула                        | Находит |
|--------------------------------|---------|
| $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ | c       |
| $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ | a       |
| $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ | b       |

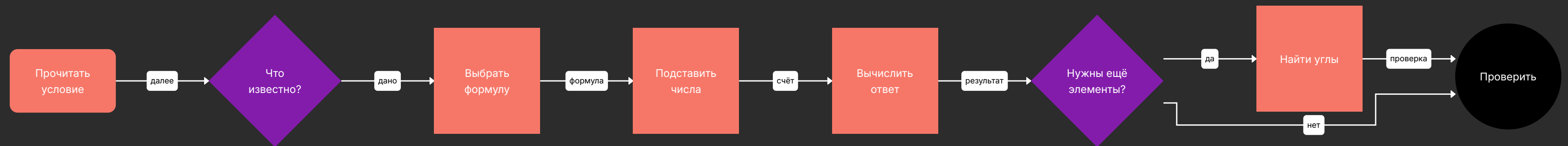
Школьный курс геометрии

Три записи одной и той же теоремы помогают находить нужную сторону в зависимости от данных задачи.

Выбор формулы зависит от неизвестной стороны. При угле  $90^\circ$  косинус равен 0, и получается теорема Пифагора.

# Как решают треугольник по теореме косинусов

Алгоритм решения задачи по данным условия и проверке результата.



# Случай 1: известны две стороны и угол между ними



## Есть все данные для старта

Если известны две стороны и угол между ними, можно сразу подставить числа в формулу и найти третью сторону без дополнительных построений и догадок.



## Находим третью сторону

Именно эта сторона обычно вычисляется первой, потому что она находится напротив известного угла. После этого треугольник становится проще для дальнейших вычислений.



## Переходим к углам

Когда третья сторона уже найдена, остальные углы можно вычислить по теореме косинусов или использовать сумму углов треугольника, если это удобнее.



## Подходит для многих задач

Такой способ особенно полезен в задачах без прямого угла, где теорема Пифагора не помогает сразу. Он даёт точный и понятный ход решения.

# Как меняется третья сторона при изменении угла



При фиксированных сторонах  $a$  и  $b$  рост угла делает противоположную сторону длиннее. Это хорошо видно по вычисленным значениям для нескольких стандартных углов.

Чем больше угол между известными сторонами, тем больше третья сторона. Самое заметное увеличение происходит при тупых углах.

Учебный пример по теореме косинусов; расчёт выполнен для  $a = 7$ ,  $b = 9$

# Случай 2: известны три стороны

## 1. Найти нужный угол

Если заданы все три стороны, теорема косинусов позволяет вычислить угол, например  $A$ , по формуле  $\cos A = (b^2 + c^2 - a^2) / 2bc$ . Это удобно, когда стороны известны, а углы нет.

## 2. Вычислить значение

После подстановки чисел находят косинус угла, а затем сам угол с помощью обратной функции или таблицы. Важно следить, чтобы ответ был в допустимых пределах от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ .

## 3. Проверить остальные углы

Когда один угол найден, можно вычислить другие по тем же правилам или использовать сумму углов треугольника. Так результат быстрее проверяется и уточняется.

## 4. Использовать в задачах

Этот случай часто встречается в упражнениях, где известны все стороны, но требуется узнать форму треугольника. Теорема косинусов делает такую задачу полностью решаемой.

# Теорема косинусов и теорема Пифагора

| Случай                    | Формула                        | Где применяется   |
|---------------------------|--------------------------------|-------------------|
| Прямоугольный треугольник | $a^2 + b^2 = c^2$              | Только $90^\circ$ |
| Произвольный треугольник  | $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ | Любой угол        |

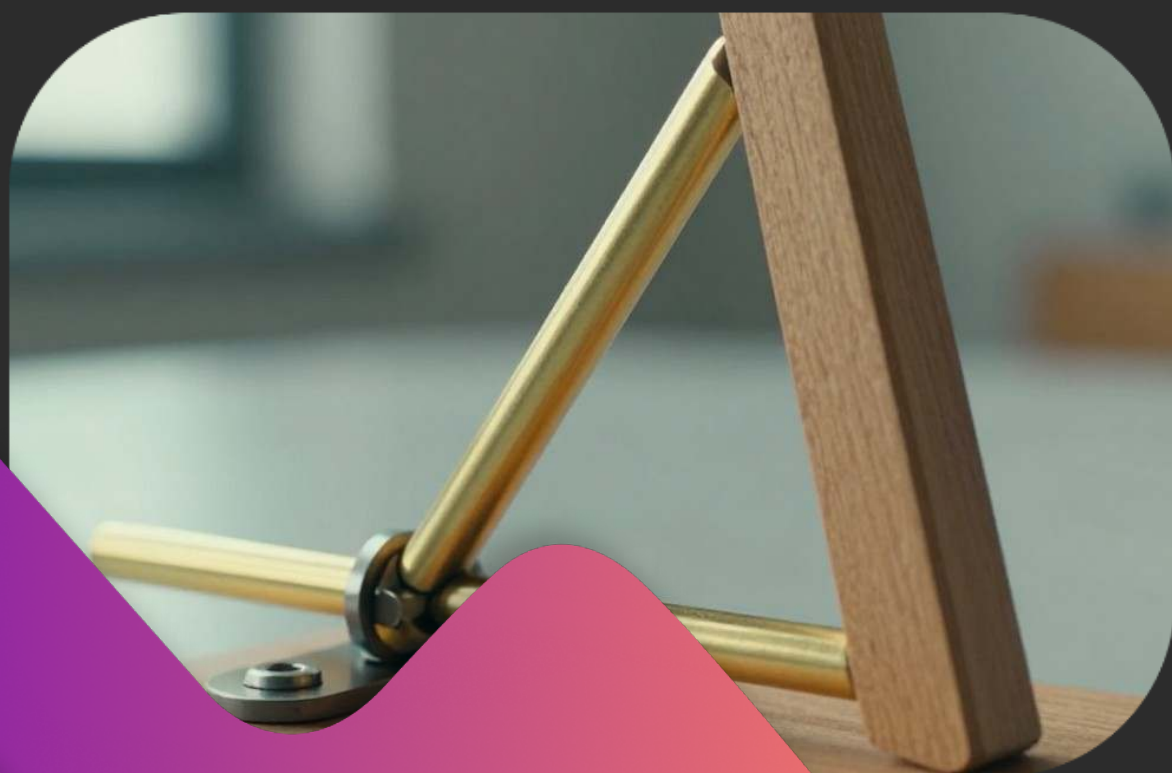
Сравнение показывает, что теорема Пифагора является частным случаем более общей теоремы косинусов.

Теорема Пифагора работает только для прямого угла, а теорема косинусов — для любого треугольника. При  $90^\circ$  формулы совпадают.

# Геометрический смысл формулы

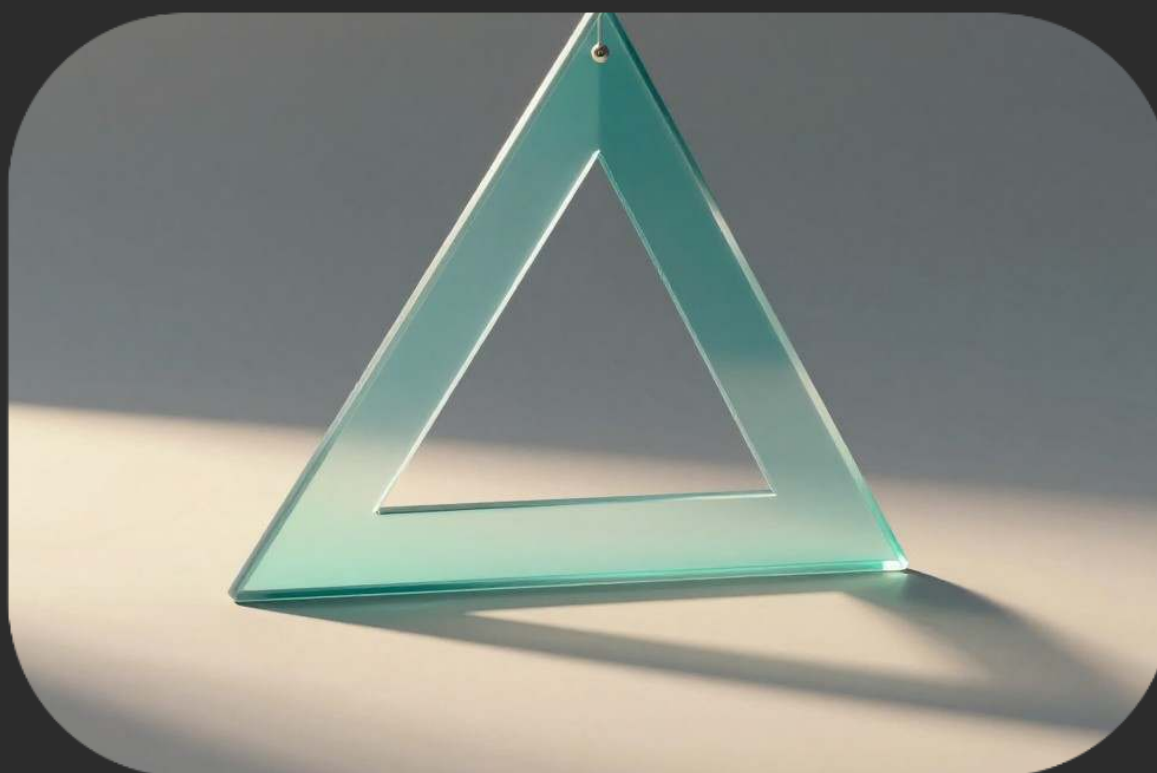
## Угол открывает сторону

Чем больше угол между двумя сторонами, тем дальше расходятся их концы и тем длиннее получается противоположная сторона. Формула теоремы косинусов точно описывает эту зависимость и показывает, как меняется размер треугольника при изменении формы.



## Острый и тупой случаи

Если угол острый, противоположная ему сторона выходит короче, потому что стороны «сближаются». Когда угол становится тупым, треугольник как будто растягивается, и противоположная сторона заметно увеличивается. Это хорошо видно на чертеже.



## Форма и размер вместе

Теорема косинусов связывает не только длины сторон, но и общий вид треугольника. Поэтому по одной формуле можно понять, как угол влияет на размер фигуры и почему одинаковые стороны дают разные результаты при разных углах.



# Почему формула работает

## Разложение стороны

Одну из сторон мысленно раскладывают на две части: вдоль другой стороны и перпендикулярно ей. Так становится понятнее, откуда в формуле берётся связь между сторонами и углом.

## Роль косинуса

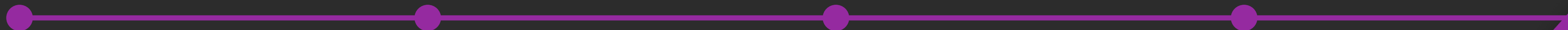
Косинус показывает, какая часть стороны направлена вдоль другой стороны. Именно поэтому он связан с длиной проекции и появляется в вычислении.

## Сборка квадрата длины

Из двух частей складывается итоговая длина, а затем в записи появляются квадраты сторон. Произведение двух сторон с косинусом отвечает за влияние угла.

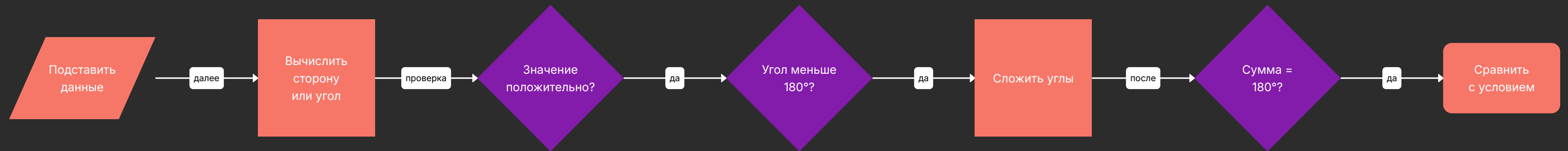
## Общий результат

В результате получается формула, которая работает для любого треугольника. Она объединяет геометрический смысл и точный расчёт в одном выражении.

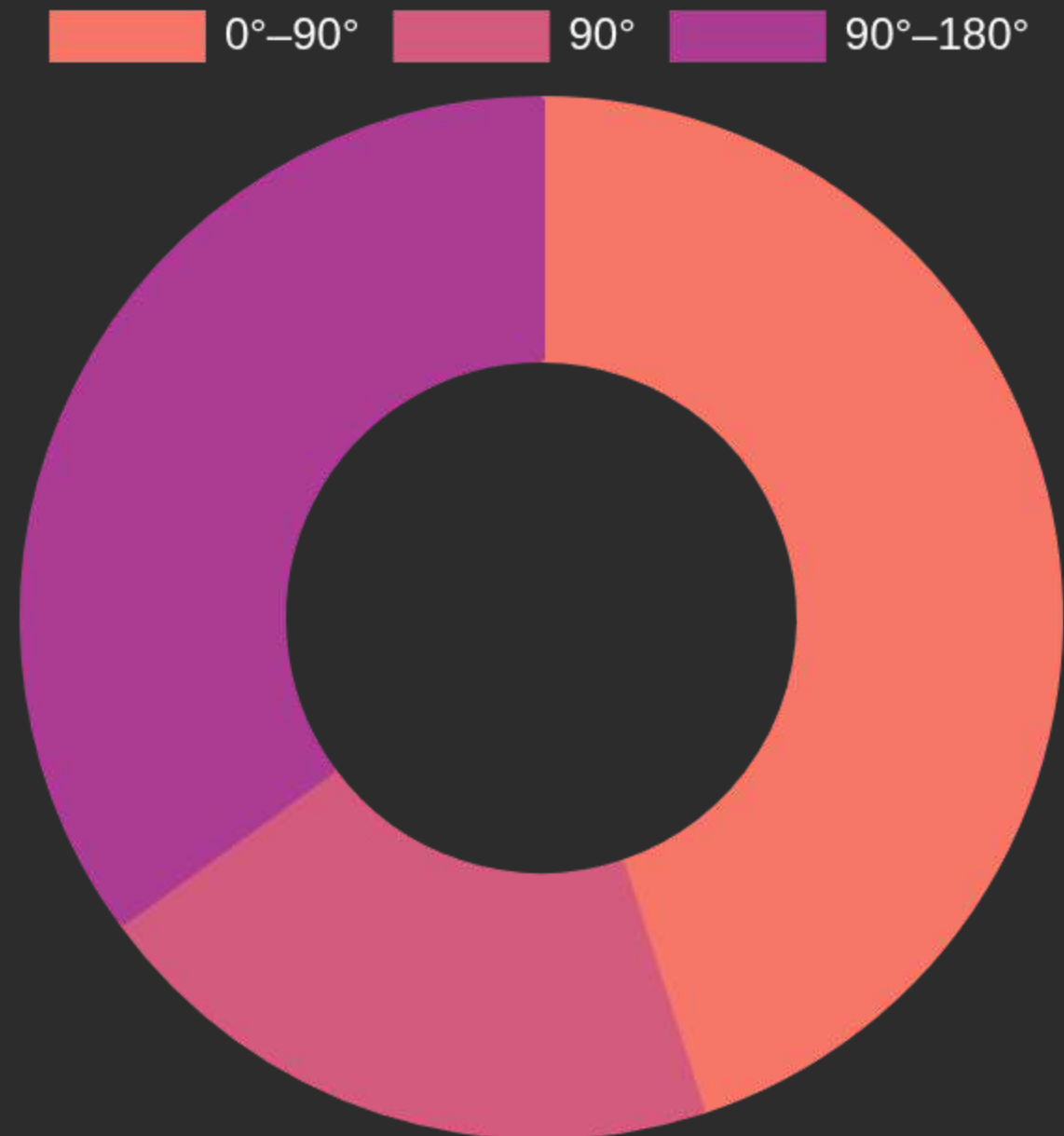


# Проверка ответа после вычислений

Алгоритм проверки результата после применения теоремы косинусов



# Знаки косинуса и тип треугольника



Знак косинуса помогает заранее понять, каким будет вклад угла в формулу и почему тупой треугольник даёт больший вычитаемый член.

Положительный косинус соответствует острым углам, ноль — прямому, отрицательный — тупому. Это влияет на длину стороны в формуле.

# Типичные ошибки при решении

1.

## Путают угол и сторону

Часто берут не тот угол или забывают, что в формуле нужен именно угол напротив искомой стороны. Из-за такой подмены весь расчёт становится неверным уже на первом шаге.

2.

## Неверно записывают выражение

Ошибки появляются при пропуске скобок, неправильном знаке или записи косинуса не того угла. Перед вычислением стоит ещё раз сверить формулу с рисунком и обозначениями.

3.

## Считают в неправильном режиме

Если калькулятор работает в градусах, а введён радианный режим, ответ получится неверным. Особенно важно проверять режим перед вычислением косинуса, чтобы избежать скрытой ошибки.

4.

## Забывают проверить ответ

После вычислений нужно убедиться, что длина положительна, а сумма углов равна  $180^\circ$ . Такая проверка быстро показывает, если результат не подходит по смыслу задачи.



# Пример вычислений с числами

| Дано              | Вычисление                                    | Результат                 |
|-------------------|-----------------------------------------------|---------------------------|
| $a = 7\text{ см}$ | $c^2 = 49 + 81 - 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 0,5$ | $c^2 = 67$                |
| $b = 9\text{ см}$ | $c = \sqrt{67}$                               | $c \approx 8,2\text{ см}$ |
| $C = 60^\circ$    | —                                             | —                         |

Учебный пример для 7 класса

Показан образец применения формулы теоремы косинусов для нахождения третьей стороны треугольника.

При угле  $60^\circ$  третья сторона оказалась меньше суммы двух данных сторон. Это подтверждает корректность результата и показывает удобство формулы для вычислений.

# Связь с теоремой синусов



## Сначала — косинусы

Теорема косинусов удобна, когда известны две стороны и угол между ними или все три стороны. Она помогает получить первый точный результат, с которого начинается дальнейшее решение.



## Потом — синусы

Когда одна сторона или один угол уже найдены, теорема синусов помогает вычислить остальные элементы треугольника. Она особенно удобна для продолжения решения без лишних преобразований.



## Две теоремы вместе

Эти формулы не заменяют, а дополняют друг друга. Вместе они позволяют решать треугольник по разным наборам данных и выбирать самый удобный путь вычислений.

# Применение в реальных задачах

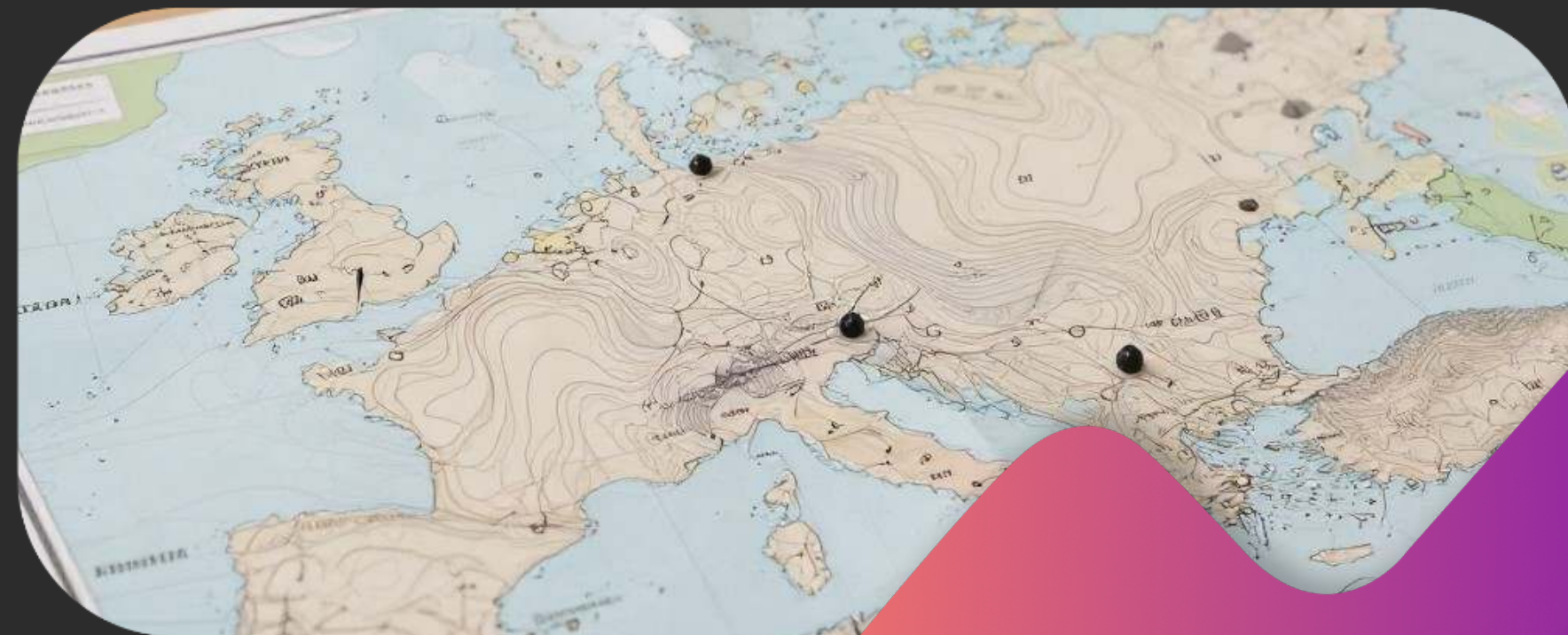
## Строительная разметка

На стройке часто нужно узнать длину диагонали или расстояние между двумя точками, когда измерить их напрямую неудобно. Теорема косинусов помогает выполнить такой расчёт по двум сторонам и углу между ними. Это делает геометрию полезным инструментом для планирования и проверки чертежей.



## Карта и маршрут

В географии и навигации формула помогает оценить расстояние между объектами, если известны направления и промежуточные точки. На карте это удобно для прокладки маршрута, когда путь не идёт по прямой линии. Такой пример показывает связь школьной темы с практическими измерениями.



# Что важно запомнить

## 1. Выбирай нужный случай

Теорема косинусов применяется, когда известны две стороны и угол между ними или все три стороны. Сначала определяют, что дано в задаче, и только потом выбирают формулу.

## 2. Связь с Пифагором

Если угол равен  $90^\circ$ , формула превращается в теорему Пифагора. Значит, теорема косинусов работает шире и охватывает не только прямоугольные, но и любые треугольники.

## 3. Считай аккуратно

Важно правильно подставлять стороны и угол, не путать обозначения и не забывать скобки. Небольшая ошибка в записи легко меняет весь результат вычислений.

## 4. Проверь ответ

После вычислений убедись, что длина стороны положительна, а сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ . Такая проверка помогает заметить неточность ещё до записи окончательного ответа.

# Теорема косинусов — ключ к любому треугольнику

Она связывает стороны и углы, помогает находить неизвестные элементы и проверять вычисления. Для решения треугольников это одна из самых важных формул, потому что работает в общем случае.