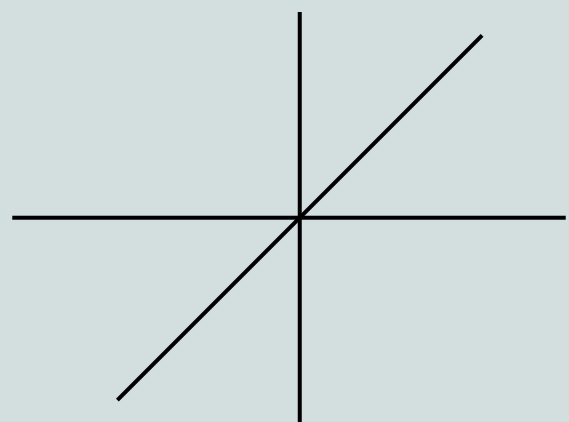


Перестановки в алгебре: порядок и количество вариантов

Считаем все возможные порядки одних и тех же объектов.

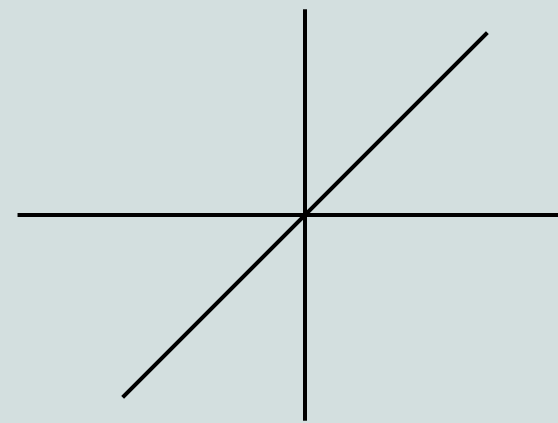


Где порядок действительно важен



Перестановки помогают точно считать варианты в очереди, расписании, кодах и других задачах, где один и тот же набор элементов можно расположить по-разному.

Для трёх объектов достаточно
поменять их местами, чтобы
получить новый вариант; каждое
изменение порядка даёт
отдельную перестановку.



6

различных порядков можно составить
из трёх разных букв.

Как находят число перестановок

Схема основана на правиле умножения и последовательном выборе мест для разных объектов.

Факториал как удобная запись

Короткая запись



Факториал обозначают $n!$ и читают как «эн факториал». Эта запись удобна, когда нужно быстро показать произведение всех натуральных чисел от 1 до n без длинного перечисления.

Как считается



Чтобы найти факториал, последовательно перемножают все числа от 1 до n . Например, $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$, а $6! = 720$.

Зачем нужен



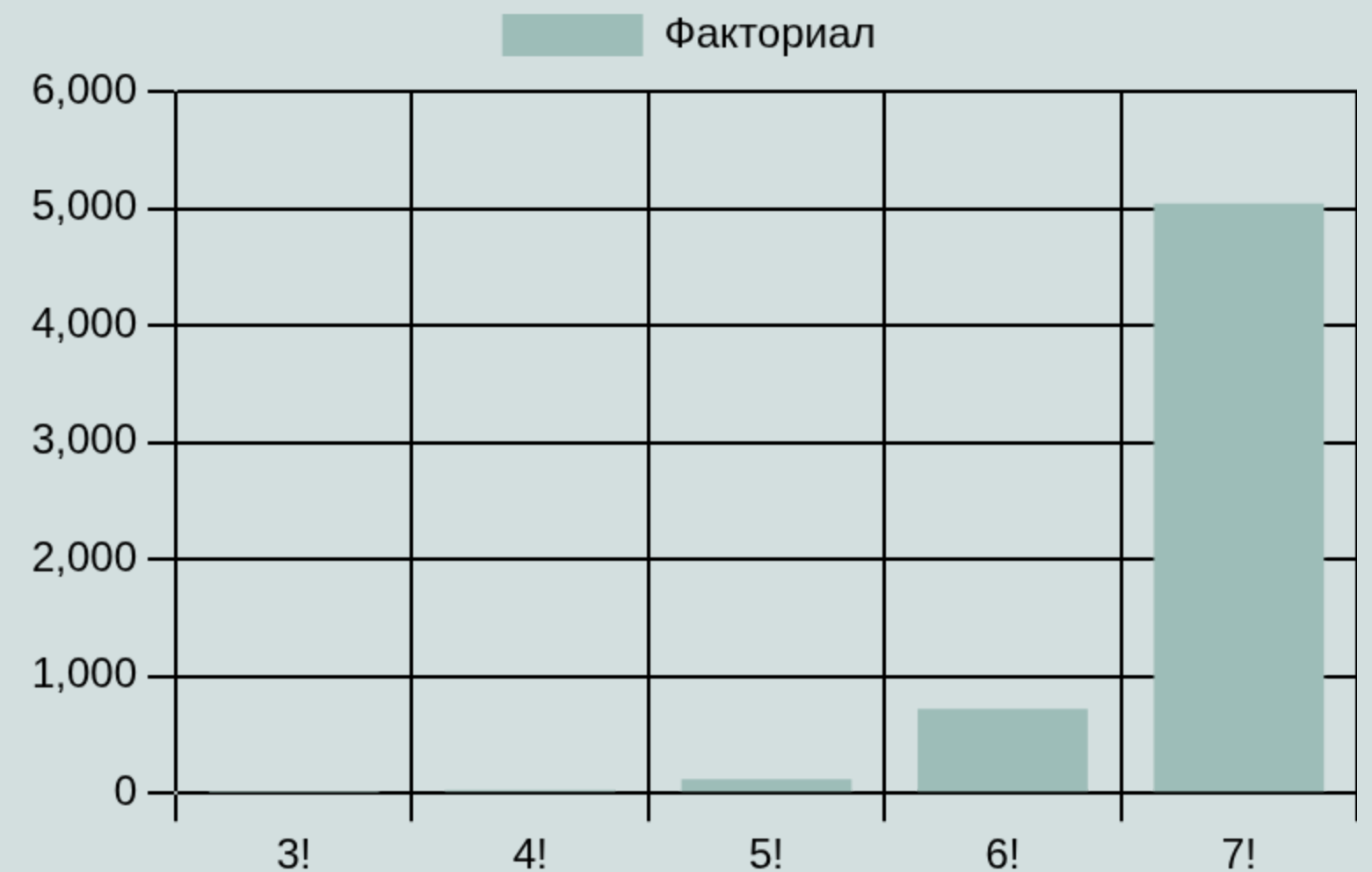
Факториал помогает описывать число перестановок одной формулой. Вместо длинного подсчёта вариантов достаточно вычислить произведение, а затем использовать его в ответе задачи.



Как быстро растет число перестановок

Даже добавление одного объекта резко увеличивает число возможных порядков.

Рост факториала очень быстрый: каждый следующий шаг увеличивает результат гораздо сильнее, чем простое прибавление.



Перестановки из 3 и 4 объектов

Четыре объекта

Для четырёх разных объектов получается уже 24 перестановки. Здесь особенно заметно, как быстро растёт число вариантов, если на каждое новое место выбирать из оставшихся элементов.

Три объекта

Если объектов три, то вариантов всего 6. Их легко перечислить вручную и проверить, не пропущен ли какой-нибудь порядок, особенно при первом знакомстве с темой.

Проверка через дерево

Для небольшого набора удобно строить дерево вариантов. Оно помогает увидеть все ветви, применить правило умножения и убедиться, что каждый порядок посчитан ровно один раз.

Значения факториала для небольших чисел

Таблица показывает, как быстро растёт факториал на малых значениях n .

Даже на небольших n значение факториала увеличивается очень быстро, поэтому число перестановок резко возрастает.

n	n!	Перестановок
1	1	1
2	2	2
3	6	6
4	24	24

Перестановки с повторяющимися буквами

Одинаковые элементы



Если среди объектов есть повторяющиеся элементы, не все перестановки будут различными. Некоторые записи совпадают, поэтому реальное число вариантов оказывается меньше, чем для полностью разных объектов.

Пример слова



В слове МАМА буква М встречается дважды, как и буква А. Поэтому часть перестановок повторяется, а одинаковые записи не нужно считать как отдельные варианты.

Наглядное сравнение



Удобно показывать одинаковые и разные записи рядом: так видно, какие варианты совпадают. Это помогает понять, почему при повторях число различных перестановок уменьшается.



Формула для перестановок с повторами

01

Сначала считаем все

варианты

Если бы все объекты были разными, число перестановок было бы равно $n!$. Это исходный результат, от которого удобно отталкиваться при появлении повторов.

02

Потом убираем совпадения

Повторяющиеся элементы создают одинаковые перестановки, поэтому их нужно исключить из подсчёта. Для этого делят на факториалы количеств одинаковых объектов.

03

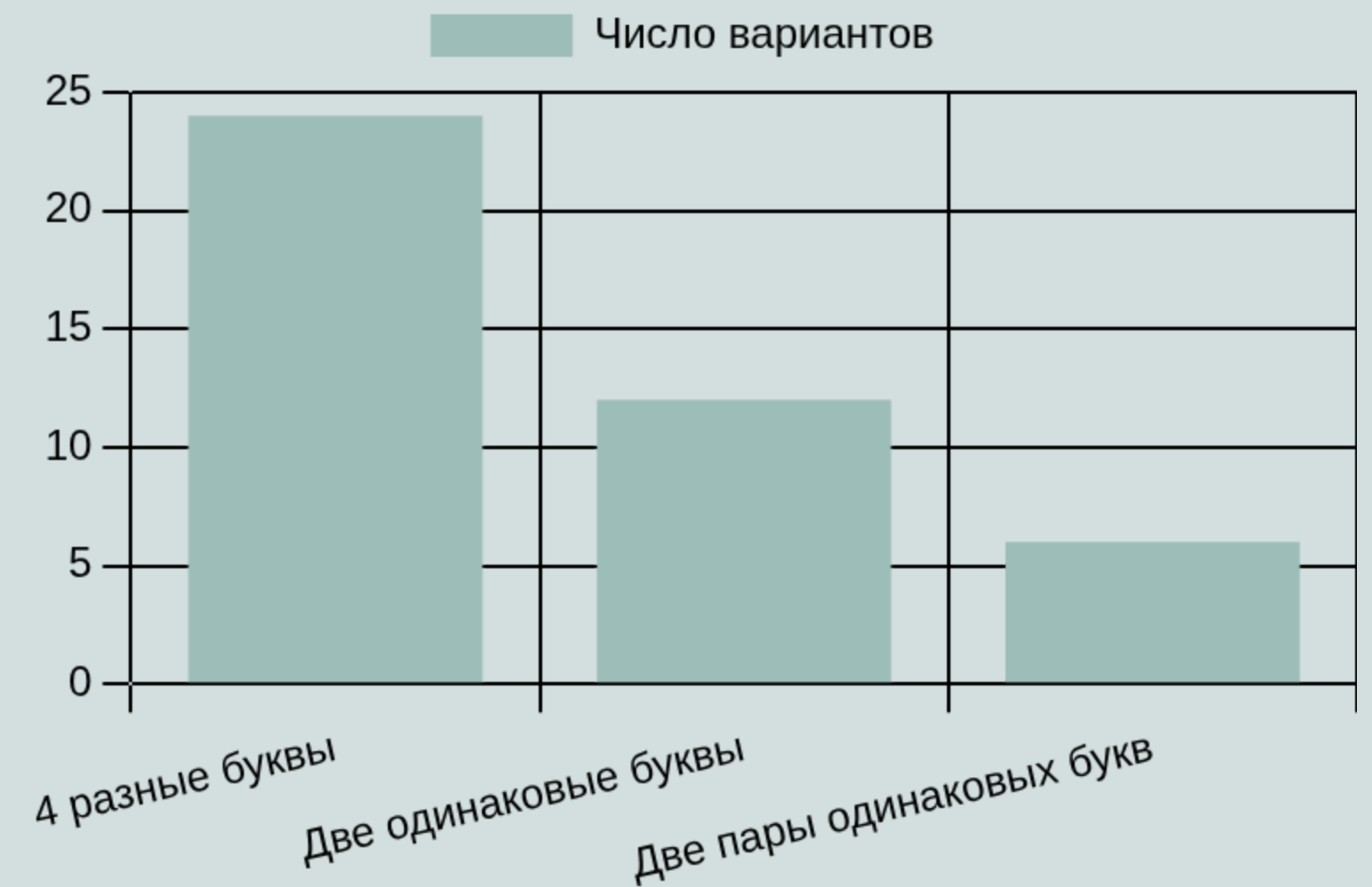
Итоговая формула

Для слова МАМА получаем $4! / (2! \cdot 2!) = 6$. Такое деление убирает повторяющиеся записи и оставляет только различные перестановки.

Как повторы уменьшают число вариантов

Повторы сокращают число уникальных записей: часть перестановок начинает совпадать и больше не считается отдельно.

Чем больше одинаковых элементов, тем сильнее уменьшается число различных перестановок.



Примеры из жизни и школьных ситуаций



Очередь

Если два ученика поменяются местами в очереди, порядок станет другим. Для задачи важно не только кто стоит рядом, но и на каком месте каждый находится.



Расписание уроков

В расписании порядок уроков меняет весь день. Те же предметы, расположенные иначе, дают уже новый вариант, поэтому здесь тоже работает идея перестановки.



Книги на полке

При расстановке книг на полке важен каждый сдвиг. Даже если набор книг одинаковый, новая последовательность полки считается отдельным вариантом.



Коды доступа

В кодах и паролях порядок символов обязателен: 1234 и 4321 — разные записи. Поэтому перестановки помогают понять, почему смена мест букв или цифр меняет ответ.

Как решать задачи на перестановки

Последовательность действий помогает выбрать правильную формулу и не перепутать разные случаи.

Типичные ошибки в задачах

Посчитали повторы отдельно

Когда в наборе есть одинаковые элементы, часть перестановок совпадает. Если не учесть это, число вариантов окажется завышенным, потому что одинаковые записи будут посчитаны несколько раз.

Не заметили порядок

Иногда задача кажется простой, но ответ зависит именно от расположения элементов. Если поменять два объекта местами, получится новый вариант, и его нельзя пропускать при подсчете.

Путают с сочетаниями

В сочетаниях порядок не влияет на ответ, а в перестановках влияет всегда. Из-за этого важно сначала понять смысл задачи, а уже потом выбирать формулу.

Сравнение трех понятий

Понятие	Элементы	Порядок	Смысл
Перестановки	все	важен	все места
Сочетания	часть	не важен	выбор
Размещения	часть	важен	выбор и порядок

Перед решением задачи полезно определить, все ли элементы используются и влияет ли порядок на результат.

Главный вопрос один: меняет ли перестановка мест ответ задачи. Если да, применяют перестановки или размещения; если нет, используют сочетания.

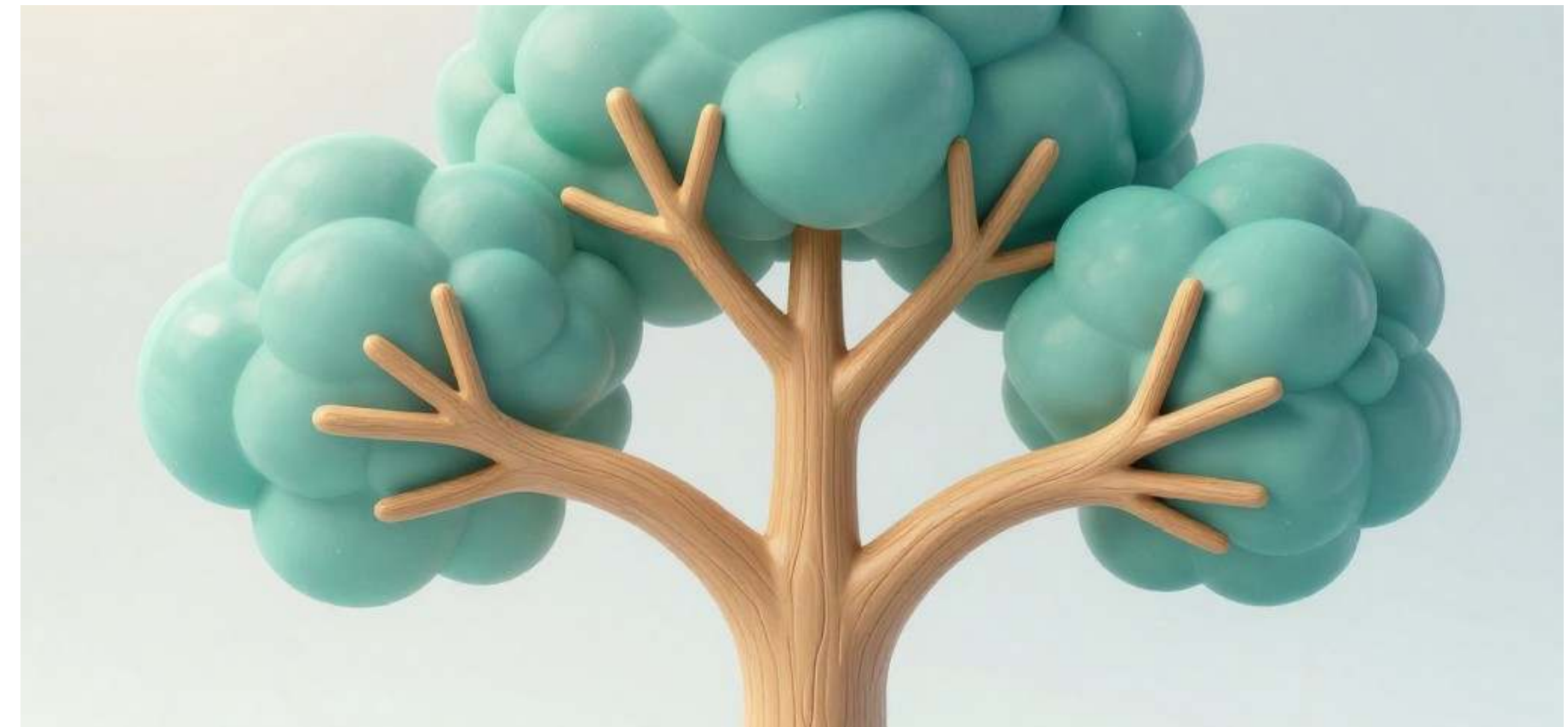
Как выглядит дерево вариантов



01

Три буквы — первый разворот

Сначала есть один старт, а затем из него расходятся несколько ветвей. Для трех букв каждая новая линия показывает отдельный выбор места, и ни один вариант не теряется. Так удобно видеть, как из одного начала быстро появляется полный список перестановок.



02

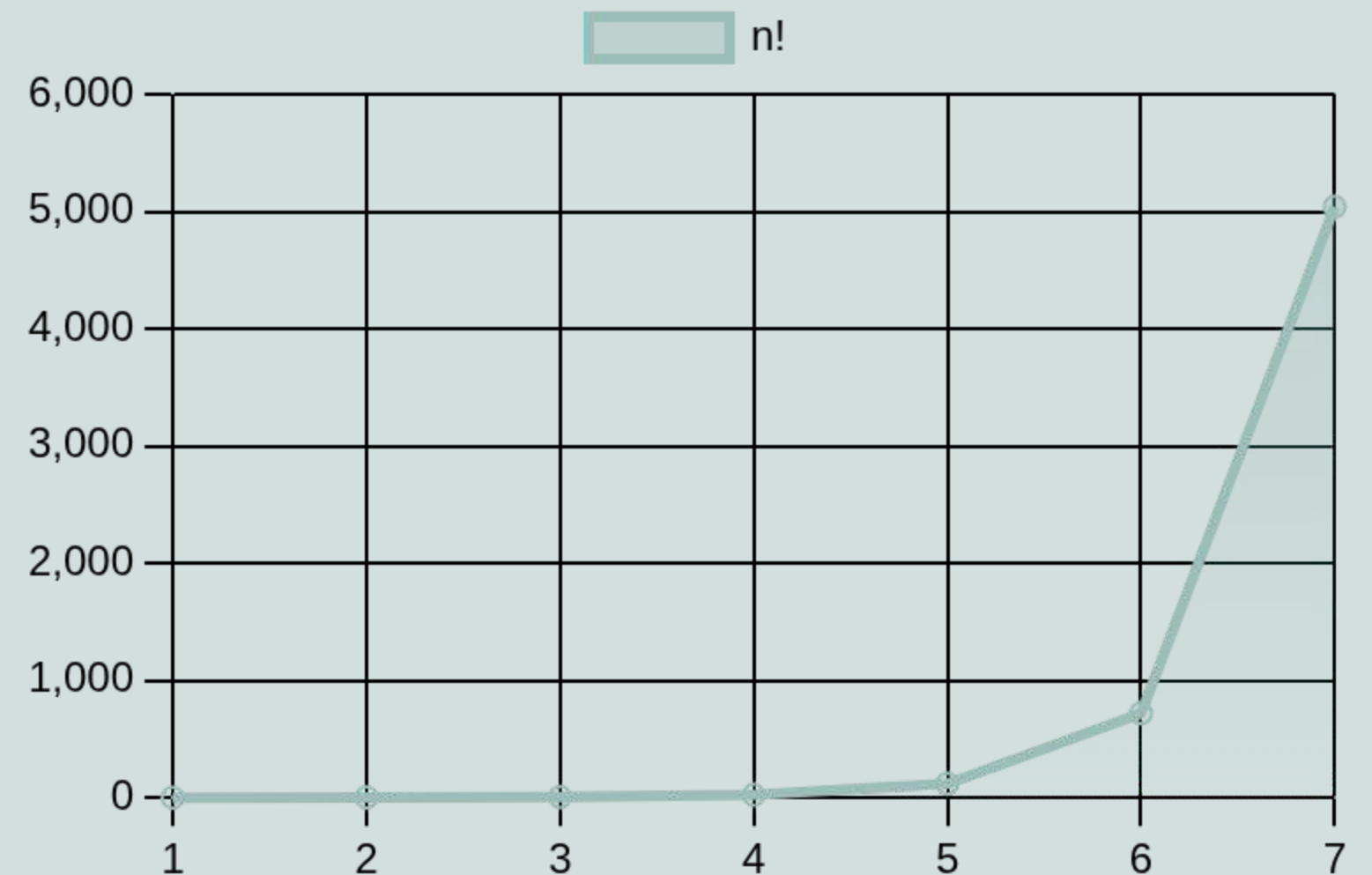
Четыре объекта — уже больше ветвей

Когда объектов становится четыре, дерево заметно разрастается. Каждая следующая ступень повторяет правило выбора: сначала одна ветвь, потом несколько, потом еще больше. По рисунку легко понять, почему даже небольшой набор дает много различных порядков.

Изменение числа перестановок при росте n

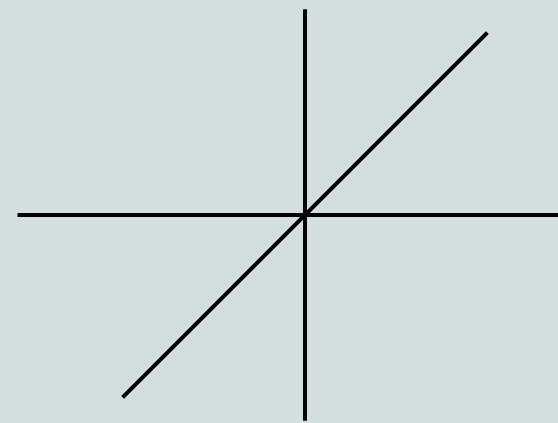
Каждое новое значение получается умножением на следующее натуральное число, поэтому кривая быстро идет вверх.

Рост факториала очень быстрый: уже при небольшом увеличении n число вариантов становится огромным.



Стандартные значения факториала для n от 1 до 7.

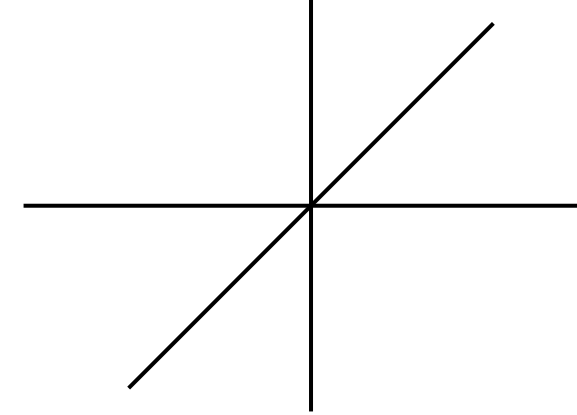
Такое число показывает,
как быстро растет количество
перестановок даже
при небольшом наборе объектов.



120

вариантов бывает у очереди из пяти
учеников.

Связь с другими темами математики



01

Счет и умножение

Перестановки опираются на правило умножения: для каждого места есть свое число вариантов. Поэтому тема тренирует аккуратный счет и помогает уверенно работать с произведениями.

02

Вероятность и перебор

При решении вероятностных задач нужно перечислить все возможные исходы. Перестановки дают удобный способ сделать это без пропусков и понять, сколько всего вариантов существует.

03

Шифры и алгоритмы

В старших классах перестановки встречаются в шифровании, поиске и анализе алгоритмов. Везде важны порядок, точность записи и умение быстро оценивать число возможностей.

Перестановки: порядок решает



Перестановки учат внимательно смотреть на порядок объектов и точно считать все варианты. Для разных элементов подходит факториал, а повторы уменьшают ответ по специальной формуле.