

Умножение вектора на число

Как длина и направление меняются при умножении?



Что можно узнать из этой операции

Умножение вектора на число помогает понять, как меняются длина, направление и координаты. Эта операция нужна в геометрии, на координатной плоскости и при описании движения в задачах по физике.

Понятие вектора в школьной геометрии

■ Запись вектора

Вектор обычно обозначают стрелкой и записывают как $\vec{a}$ или $\overrightarrow{AB}$. Такая запись показывает не только объект, но и его направление на чертеже.

■ Два признака вектора

У каждого вектора есть длина и направление. Эти два свойства полностью определяют его в школьной геометрии и позволяют сравнивать разные векторы.

■ Равные векторы

Равные векторы имеют одинаковую длину и направление, даже если расположены в разных местах рисунка. Их можно переносить параллельно без изменения смысла.

■ Нулевой вектор

Нулевой вектор имеет длину 0 и не имеет направления. Он появляется, когда вектор умножают на ноль, поэтому его удобно выделять отдельно.

Геометрический смысл умножения на число

Изменение длины

При умножении на число вектор становится длиннее или короче. Во сколько раз изменится длина, показывает модуль коэффициента $|k|$.

Положительный коэффициент

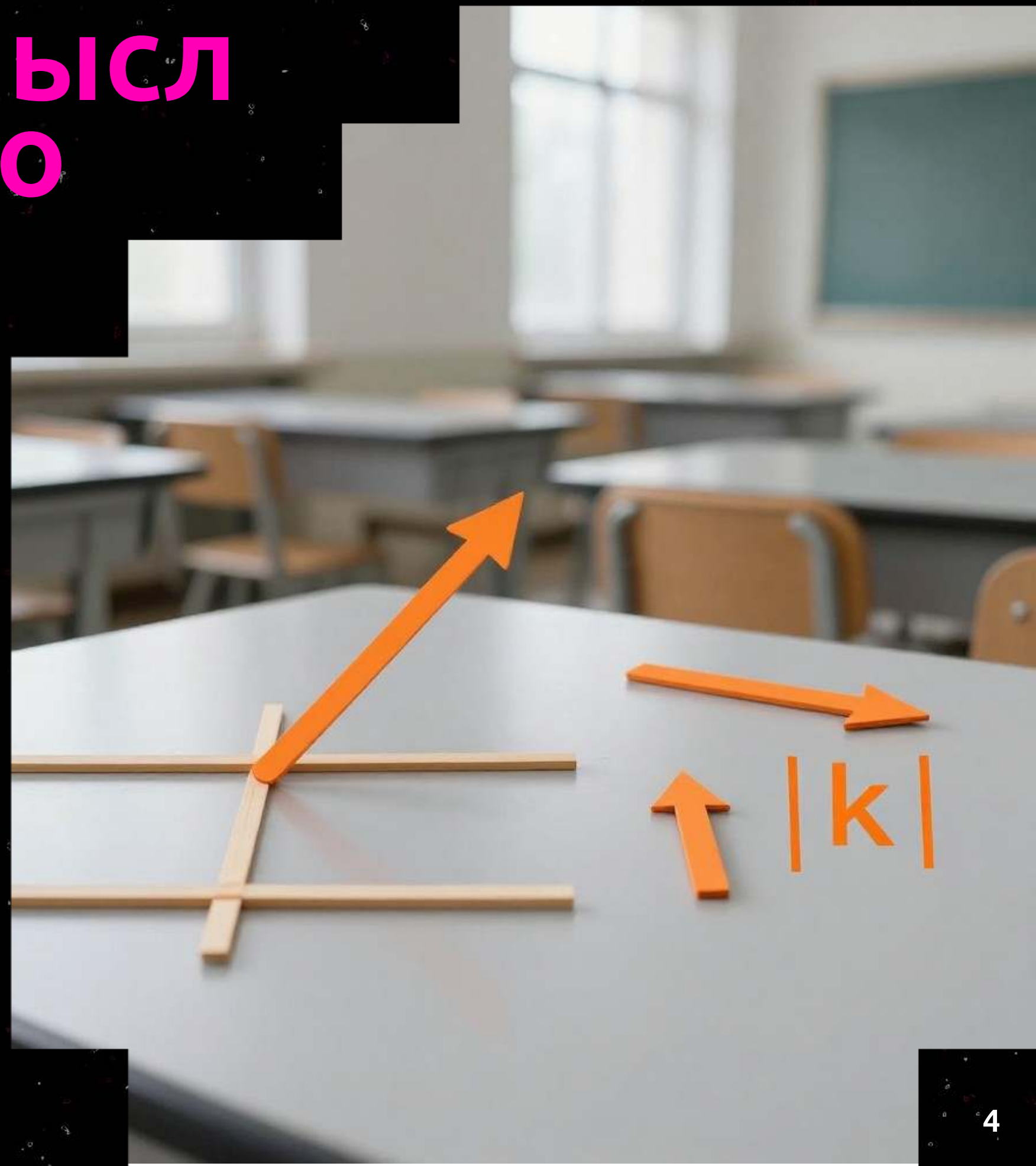
Если k больше нуля, стрелка сохраняет прежнее направление. Меняется только длина: вектор растягивается, если $|k|$ больше 1, или сжимается, если $|k|$ меньше 1.

Отрицательный коэффициент

Если k меньше нуля, вектор разворачивается в противоположную сторону. При этом длина всё равно определяется модулем числа, а не его знаком.

Нулевой коэффициент

Когда k равно 0, получается нулевой вектор. Это особый случай: длина становится равной нулю, а направление исчезает полностью.



Как значение коэффициента k влияет на вектор

Сравним основные случаи и увидим, как коэффициент меняет длину и направление результата.

Модуль коэффициента отвечает за длину, а знак — за направление. При $k = 0$ получается нулевой вектор.

Значение k	Длина	Направление
$k > 1$	увеличивается	сохраняется
$0 < k < 1$	уменьшается	сохраняется
$k = 1$	не меняется	сохраняется
$k = -1$	не меняется	меняется
$k = 0$	0	нет

Свойства умножения вектора на число

Правило для координат вектора

1

Запиши координаты

Сначала представь вектор в виде $a = (x; y)$. Это удобно, потому что координаты сразу показывают положение вектора на плоскости.

2

Умножь каждую координату

Чтобы найти $k \cdot a$, нужно умножить на k обе координаты: $k \cdot (x; y) = (kx; ky)$. Изменять только одну координату нельзя.

3

Сравни с исходным вектором

После вычисления можно увидеть, стал ли вектор длиннее или короче. Если коэффициент положительный, направление сохраняется, если отрицательный — меняется.

4

Проверь на примере

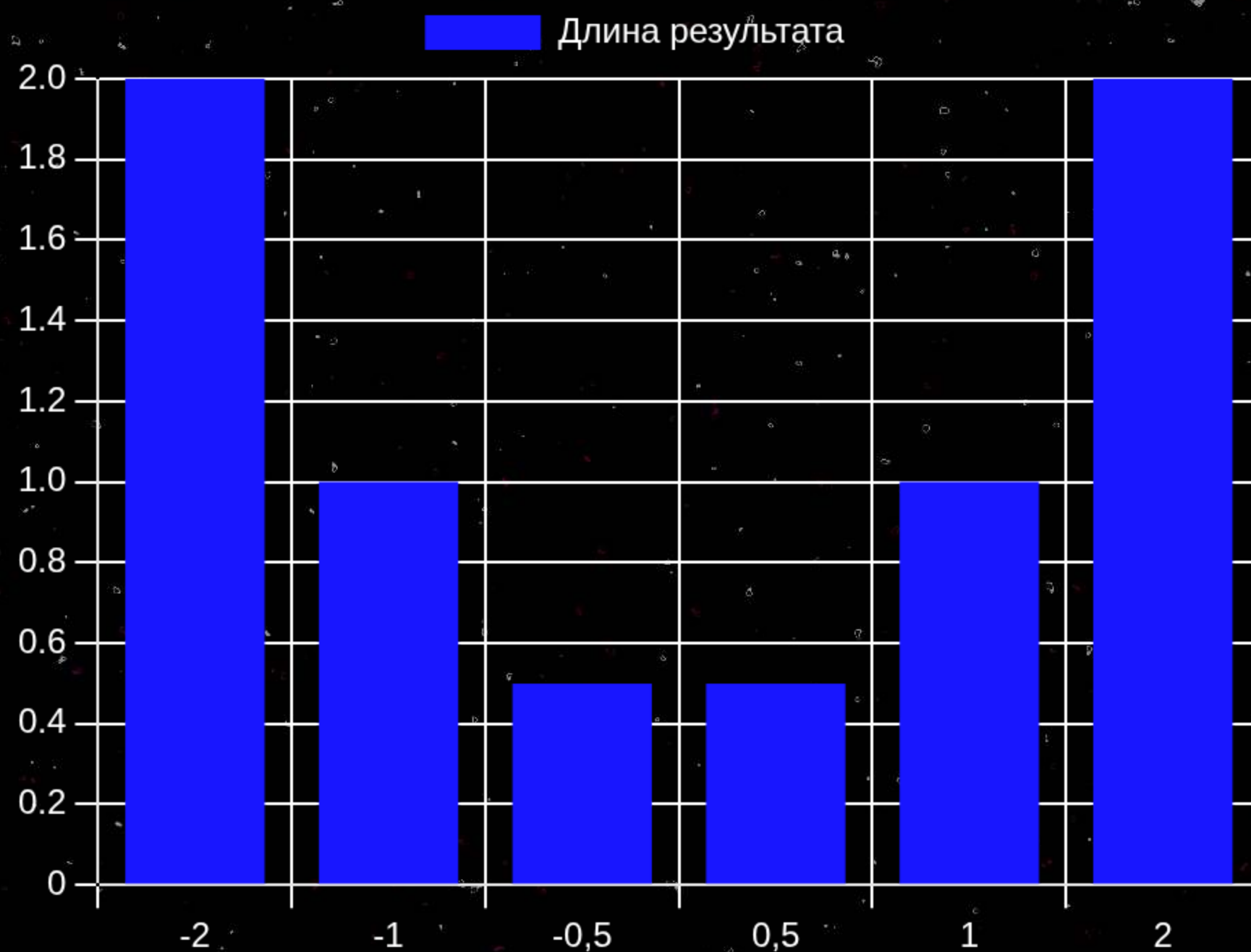
Например, $4 \cdot (2; -3) = (8; -12)$. Здесь обе координаты умножены на 4, а результат стал в 4 раза длиннее.

5

Используй для быстрых решений

Это правило помогает решать задачи без чертежа. Достаточно аккуратно считать координаты и не забывать про знак коэффициента.

Как меняется длина результата при разных k



На графике удобно сравнить, как один и тот же вектор реагирует на разные коэффициенты без построения отдельных рисунков.

Длина результата зависит от модуля коэффициента: одинаковые по модулю числа дают одинаковую длину, даже если знаки разные.

Свойство $|k|$ для умножения вектора на число

Примеры на координатной плоскости

Удвоение вектора

Для вектора $(3; 2)$ получаем $2 \cdot (3; 2) = (6; 4)$. Оба числа увеличились вдвое, значит и вектор стал вдвое длиннее.

Уменьшение вдвое

Если взять $0,5 \cdot (3; 2)$, получится $(1,5; 1)$. Такой вектор лежит в том же направлении, но его длина уменьшилась в два раза.

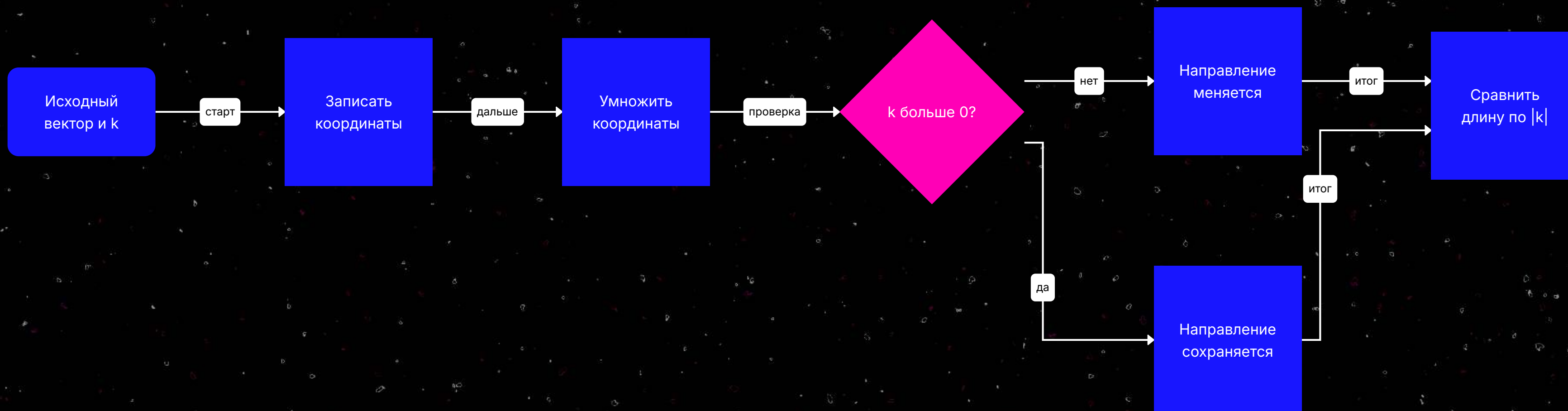
Смена направления

При $-3 \cdot (3; 2)$ получаем $(-9; -6)$. Вектор направлен противоположно исходному, а его длина увеличилась в три раза.

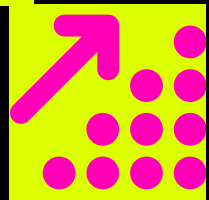


Алгоритм нахождения $k \cdot a$

Последовательность действий помогает вычислить результат и проверить его на плоскости.

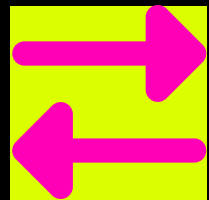


Связь с умножением чисел на прямой



Масштабирование

Как и обычное умножение чисел, эта операция меняет величину по правилу масштаба. Вектор становится больше или меньше, но делает это с учётом своей геометрической природы.



Направление стрелки

У вектора есть не только длина, но и направление. Поэтому положительное число сохраняет стрелку, а отрицательное разворачивает её в противоположную сторону.



Связь арифметики и геометрии

Умножение вектора на число объединяет два взгляда сразу: числовой и геометрический. Это помогает лучше понимать координаты, рисунки и реальные задачи о движении.

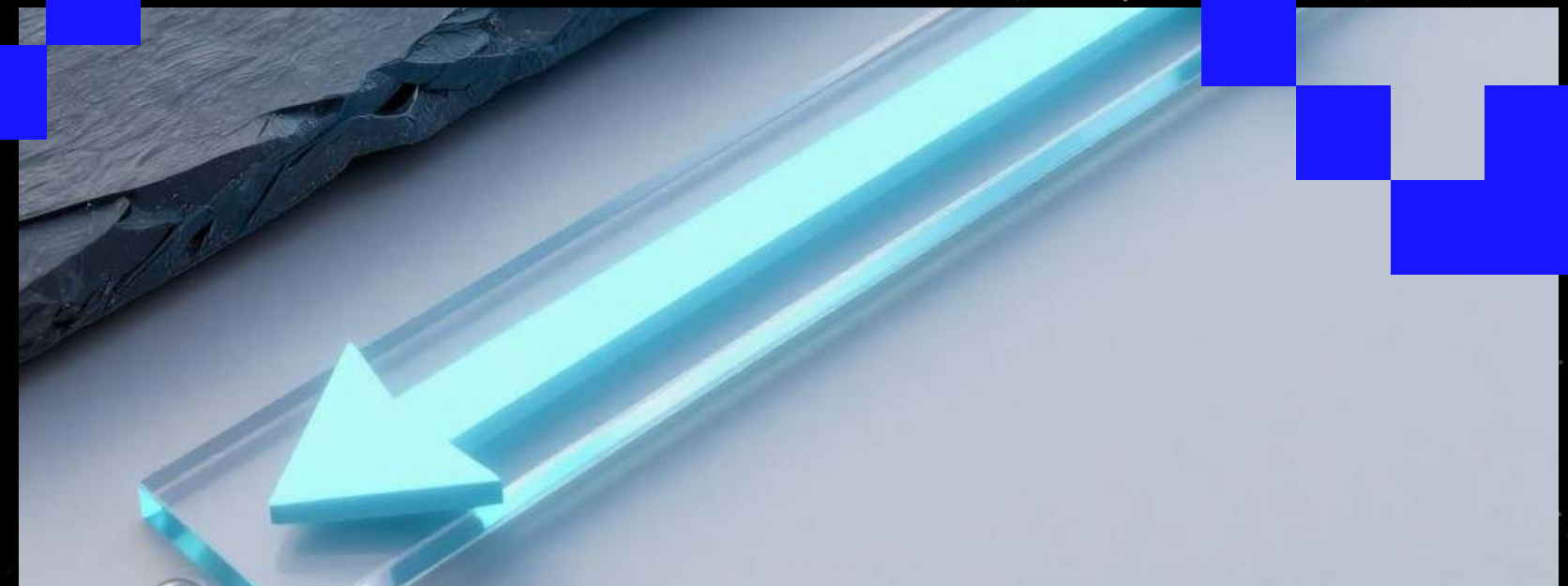
Пример на одном отрезке и одной прямой



Один вектор — три образа

На одной прямой исходный вектор можно увидеть сразу в нескольких вариантах. Удвоенный вектор показывает то же направление, но большую длину, а противоположный вектор сохраняет длину и разворачивается в обратную сторону. Так удобно сравнивать изменения на одном чертеже.

1

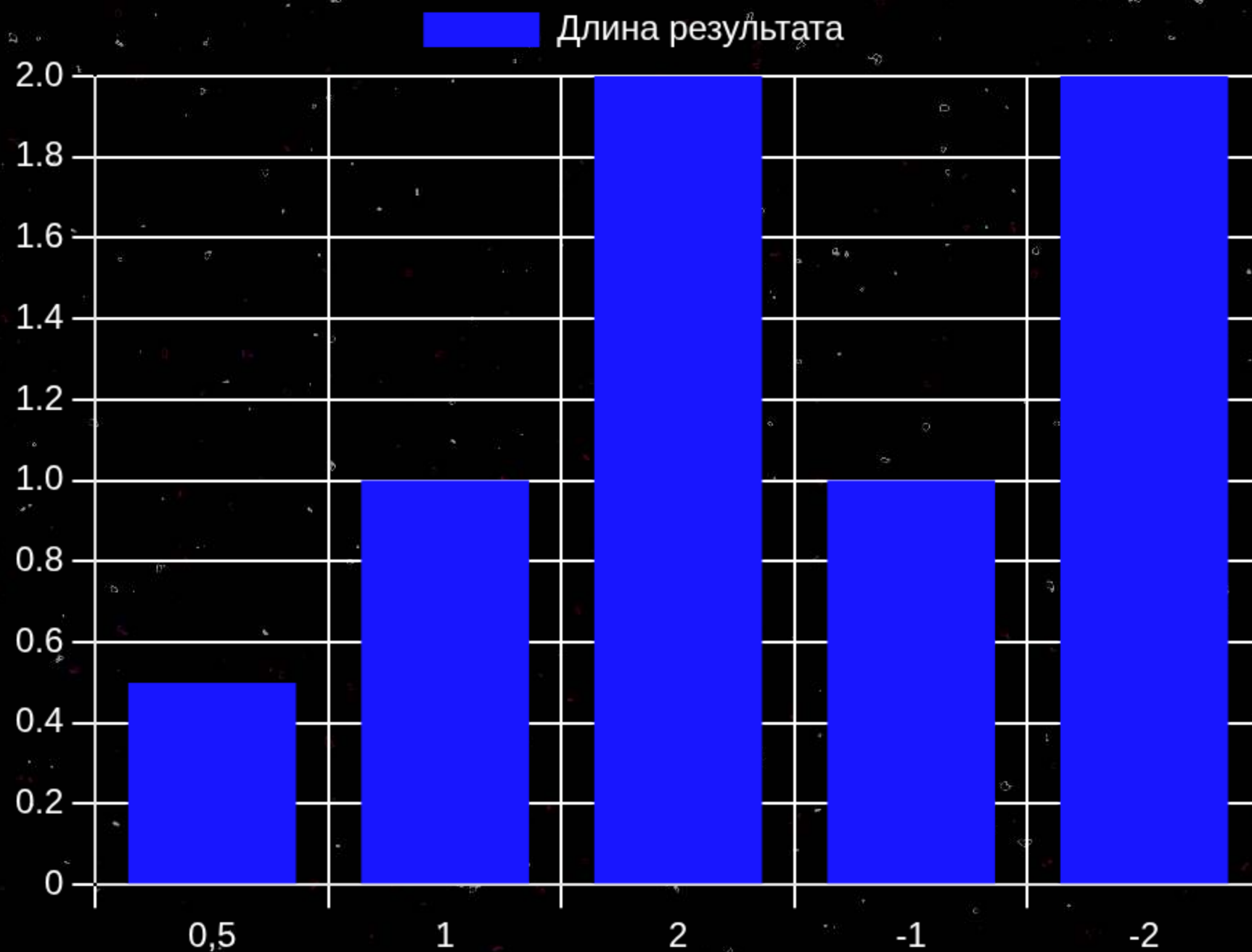


Направление читается сразу

Если стрелка на прямой смотрит от точки А к точке В, то у вектора $2 \cdot \overrightarrow{AB}$ она остаётся такой же. Вектор $-\overrightarrow{AB}$ имеет ту же длину, но стрелка направлена от В к А, поэтому знак числа виден на рисунке без вычислений.

2

Сравнение результатов при разных коэффициентах



На диаграмме показано только изменение длины, а знак коэффициента связан с направлением вектора и отдельно читается по условию.

Чем больше модуль k , тем сильнее меняется длина. Отрицательный знак не влияет на длину, но меняет ориентацию вектора.

Свойства умножения вектора на число; школьная геометрия, 9 класс

Типичные ошибки при решении задач

■ Меняют не все координаты

Иногда умножают только одну координату, например x , и забывают про y . Вектор при этом получается неверным, потому что коэффициент должен применяться к каждой координате без исключения.

■ Не учитывают знак

При отрицательном k направление вектора обязано измениться на противоположное. Если оставить стрелку прежней, ответ будет верным по длине, но ошибочным по смыслу и геометрическому изображению.

■ Путают длину и знак

Длина вектора не бывает отрицательной, поэтому нельзя писать, что она стала меньше нуля. Отрицательным может быть только коэффициент, а он влияет на направление, а не на саму длину.

■ Не проверяют ответ

Полезно после вычислений сравнить результат с условием задачи. Если координаты, длина и направление согласуются, значит, решение выполнено правильно и без пропуска важных шагов.

Проверка вычислений на конкретных примерах

Вектор	k	Результат
(1; -4)	3	(3; -12)
(1; -4)	-2	(-2; 8)
(5; 0)	0,4	(2; 0)
(5; 0)	0	(0; 0)

Сравним исходные векторы, коэффициенты и полученные результаты. В каждой строке видно, что умножаются обе координаты.

Каждая координата умножается на k . При $k = 0$ получается нулевой вектор, у которого длина равна 0 и нет направления.

Правило координатной записи результата

Связь с подобием и масштабом

1

Масштаб на чертеже

Когда изображение увеличивают или уменьшают в одном и том же отношении, сохраняются форма и взаимное расположение частей. Меняется только размер, поэтому вектор удобно использовать как модель такого преобразования.

2

Подобие фигур

Если все стороны фигуры умножить на одно число, получится фигура того же вида, но другого масштаба. Это и есть основа подобия, которое изучают в геометрии и используют в задачах на чертежах.

3

Карты и планы

На картах, планах и моделях реальные размеры переводят в уменьшенный или увеличенный вид. Коэффициент задаёт масштаб, а вектор помогает описать, насколько изменилась длина и осталась ли прежней ориентация.

4

Польза для расчётов

Такая связь делает векторную запись удобной при измерениях и построениях. Вместо длинного описания достаточно указать коэффициент, и сразу понятно, как изменится объект на рисунке или схеме.

Применение в физике и движении



Скорость как вектор

Вектор скорости показывает не только быстроту движения, но и его направление. Если умножить его на число, можно сравнить движение в разных масштабах или изменить единицы измерения, не теряя геометрического смысла стрелки.



Сила и перемещение

В физике вектор силы тоже удобно рассматривать вместе с коэффициентом. Большая стрелка означает более сильное действие, а противоположное направление показывает обратное воздействие. Так векторная запись помогает описывать реальные ситуации кратко и наглядно.

Проверка ответа в задаче на умножение вектора

Пошаговая схема контроля вычислений по координатам, длине и направлению



Три свойства умножения вектора на число

Связь со сложением

Если сначала сложить векторы, а потом умножить сумму на число, результат можно получить и по-другому: умножить каждый вектор отдельно и затем сложить. Это делает вычисления более удобными.

Сумма коэффициентов

Когда один и тот же вектор умножают на два числа, а затем складывают результаты, можно заменить это одним умножением на сумму коэффициентов. Такое правило сокращает записи и помогает быстрее решать задачи.

Последовательное умножение

Если умножить вектор сначала на одно число, а потом на другое, получится то же самое, что умножить его сразу на произведение этих чисел. Свойство показывает, что порядок здесь не меняет смысл операции.



Что сохраняется и что изменяется

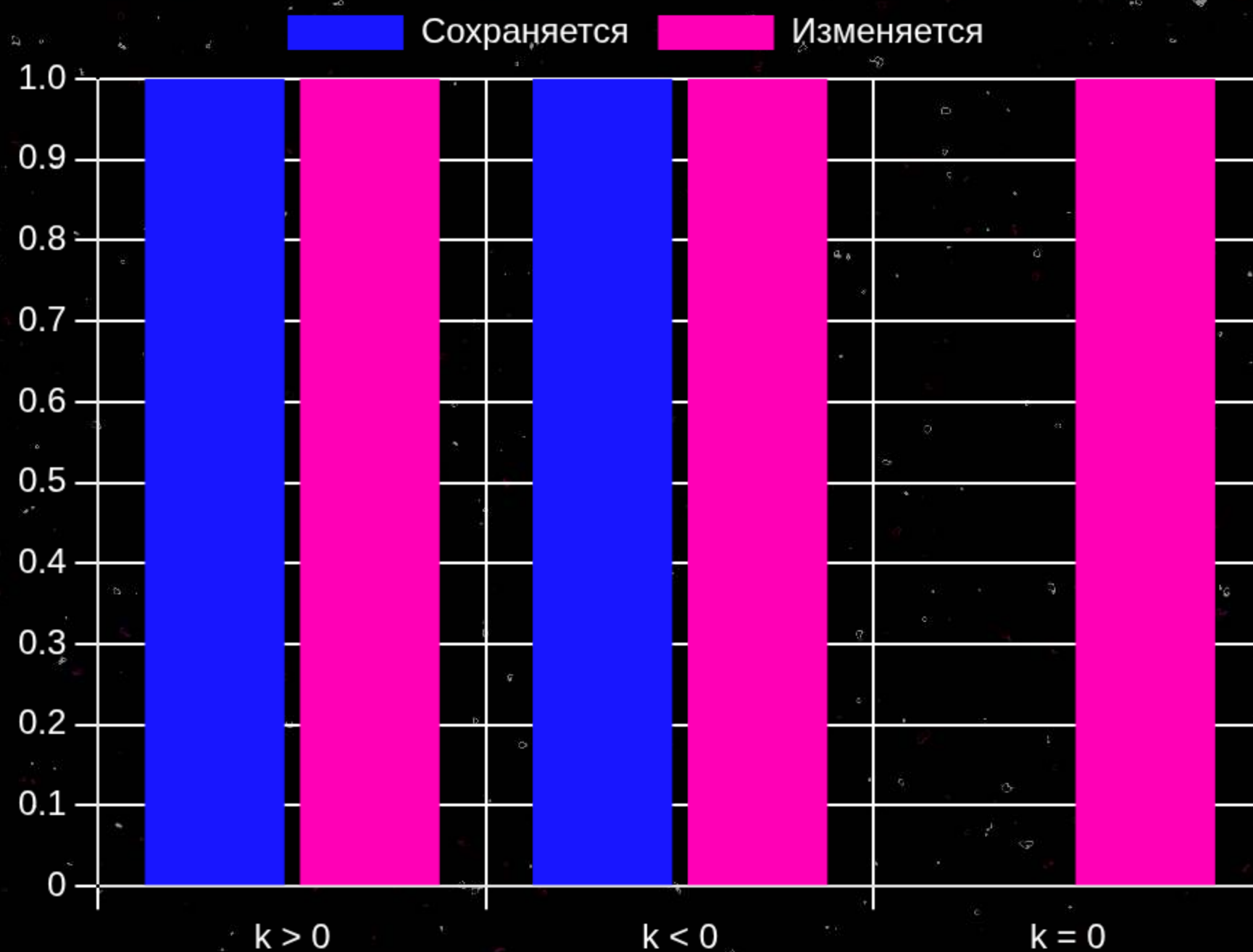


Диаграмма показывает общий характер результата: при положительном и отрицательном k вектор остаётся кратным исходному, а при нуле превращается в особый случай.

Положительное и отрицательное k сохраняют связь с исходным вектором, но меняют длину; ноль уничтожает направление и оставляет только нулевой вектор.

Свойства умножения вектора на число; школьный курс геометрии

Главное правило в одном действии

Умножение вектора на число показывает, как одна операция одновременно меняет длину и направление. Это простой способ переходить от координат к геометрии и обратно, быстро решая школьные задачи.