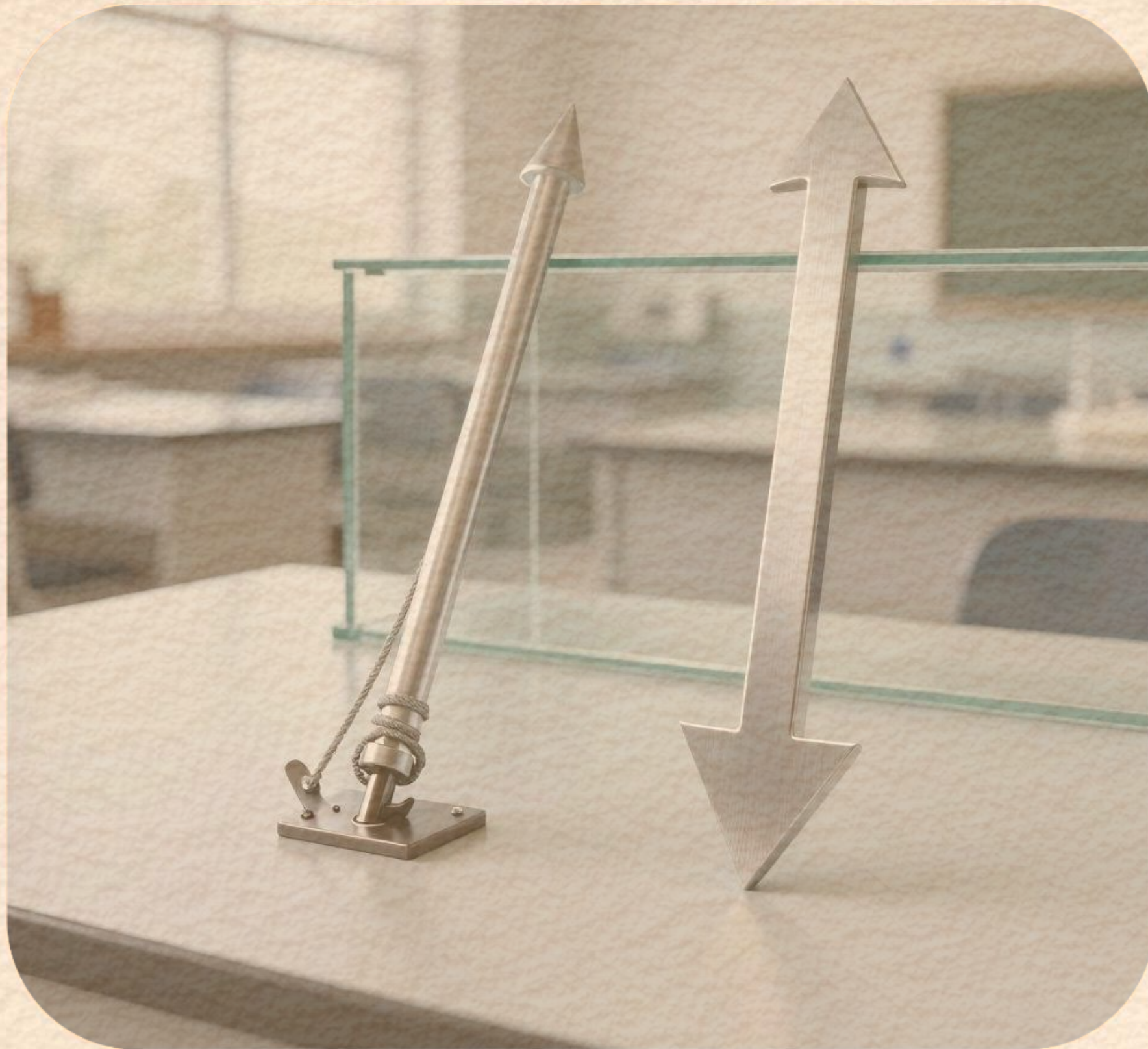


Свободные векторы: геометрия, координаты и применения

Свободные векторы связывают геометрию и вычисления: длина, направление и перенос.

Почему «свободный» важнее «привязанного»



Вектор появился как модель перемещения, силы и скорости. В школе свободный вектор рассматривают не по точке приложения, а по длине и направлению — так проще сравнивать, переносить и считать в координатах.

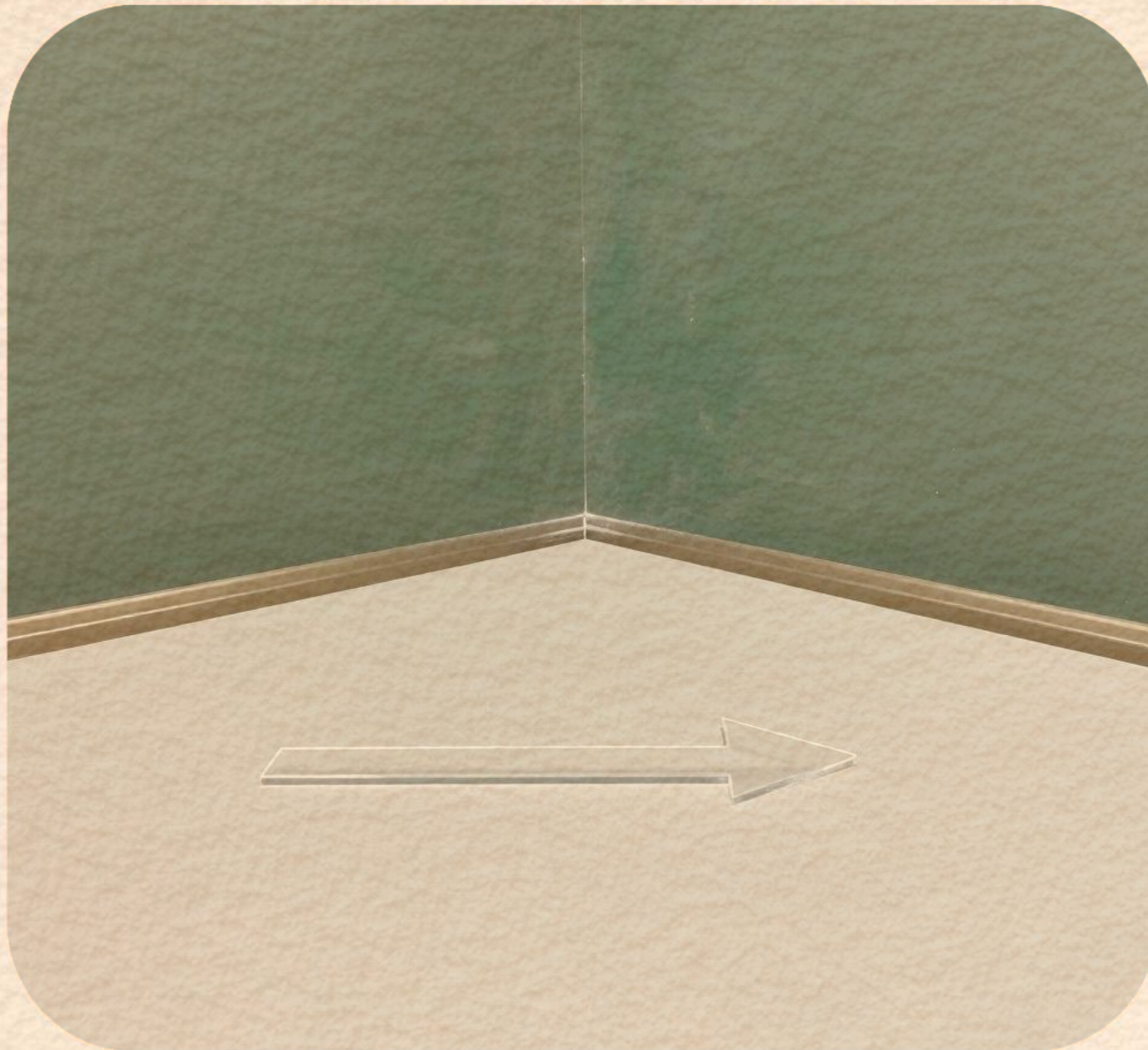
Определение свободного вектора

Свободный вектор — это класс равных направленных отрезков. Два вектора равны, если их длины совпадают и они сонаправлены.

Начальная точка при таком определении не является существенной характеристикой: один и тот же вектор можно «перенести» на любой рисунок.

Нулевой вектор имеет длину 0 и направления не задаёт. Он равен только самому себе. Обозначения: α , $\vec{AB}$, $|\alpha|$.

Как изображают свободный вектор



Направленный отрезок

На чертеже свободный вектор обычно изображают направленным отрезком со стрелкой. Стрелка показывает направление, а длина отрезка соответствует модулю вектора.

Перенос без изменения свойств

Один и тот же свободный вектор можно перенести параллельно в другую точку плоскости или пространства. При этом сохраняются модуль и направление, меняется только место на рисунке.

Основные характеристики векторов

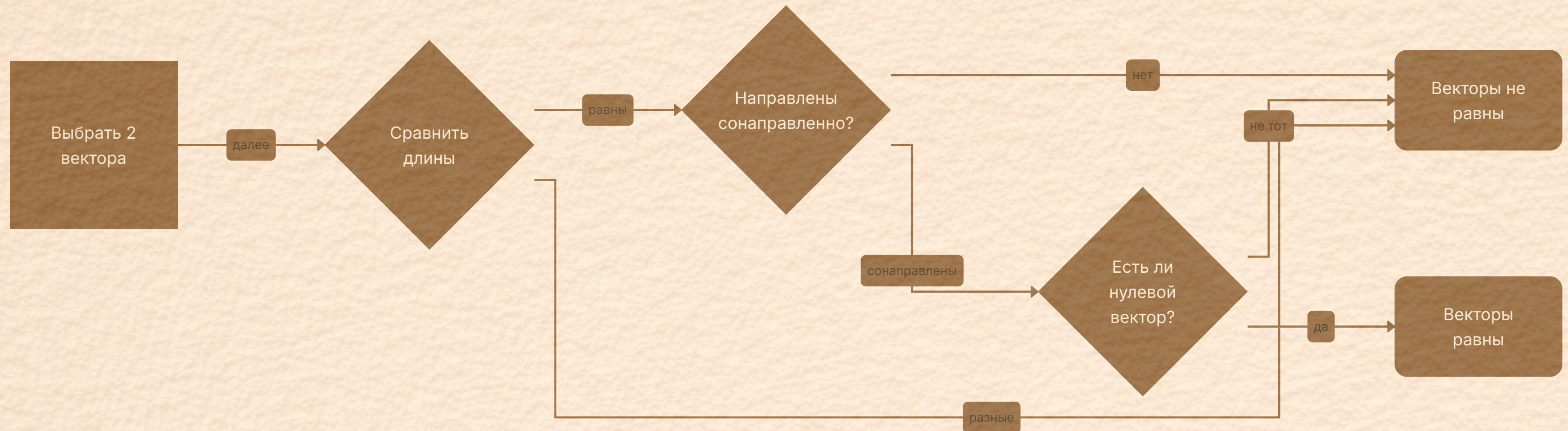
Сравните, что именно сохраняется при переносе: для свободного вектора достаточно длины и направления, а для связанного дополнительно важна фиксированная точка.

Равенство свободных векторов не зависит от их положения на чертеже: перенос не меняет их «содержания».

Признак	Свободный	Связанный
Длина	важна	важна
Направление	важно	важно
Точка приложения	несущественна	фиксирована
Перенос	возможен	ограничен

Проверка равенства двух векторов

Логика проверки равенства: длина и направление, особый случай — нулевой вектор.

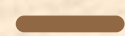


Основные операции с векторами



Сложение (треугольник/ параллелограмм)

Чтобы сложить два вектора, их откладывают так, как удобно: по правилу треугольника или параллелограмма. В результате получают вектор результирующего перемещения.



Вычитание через противоположность

Вычитание сводится к сложению противоположного вектора: $a - b = a + (-b)$. Так легче выполнять вычисления и находить результат по геометрии.



Умножение на число

При умножении вектора на число k его длина меняется в $|k|$ раз. Если $k < 0$, направление становится противоположным, а при $k = 0$ получается нулевой вектор.



Роль нуля в операциях

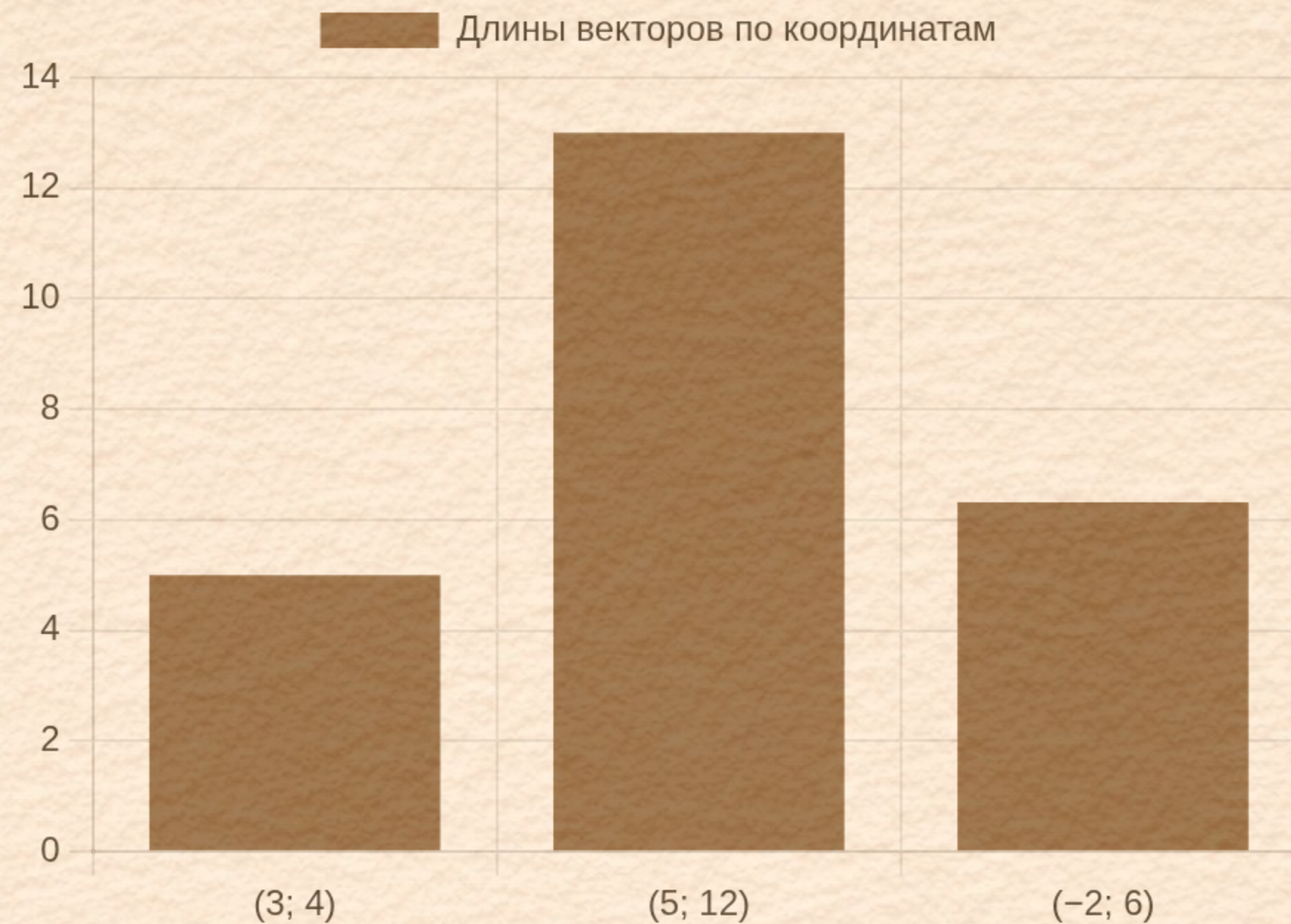
Нулевой вектор ведёт себя как нейтральный элемент сложения: $a + 0 = a$. Поэтому выражения с коэффициентом 0 сразу упрощаются до исходного вектора.

Координаты и компоненты вектора

Каждая координата отвечает за смещение по своей оси: x – по горизонтали, y – по вертикали. Длина растёт вместе с «разбросом» компонент.

Сравнение показывает, что направление влияет на знаки координат, а модуль определяется формулой $\sqrt{x^2 + y^2}$. Поэтому длины можно находить без рисунка.

Собранные значения из примеров: длины вычислены по $|a| = \sqrt{x^2 + y^2}$



Формулы в координатах

Если $a = (x; y)$, то модуль $|a|$ вычисляется по теореме Пифагора: $|a| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Это связывает длину с координатами без необходимости измерений.

Разность записывают аналогично: $a - b = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$. Затем модуль можно найти через $\sqrt{x^2 + y^2}$, если требуется численный ответ.

Сумма векторов в координатах находится покомпонентно: $a + b = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$. При таком подходе удобно контролировать результат проверкой по формулам.

При умножении на число k выполняется масштабирование компонент: $k(x; y) = (kx; ky)$. Эти формулы позволяют считать точно и быстрее чертежа.

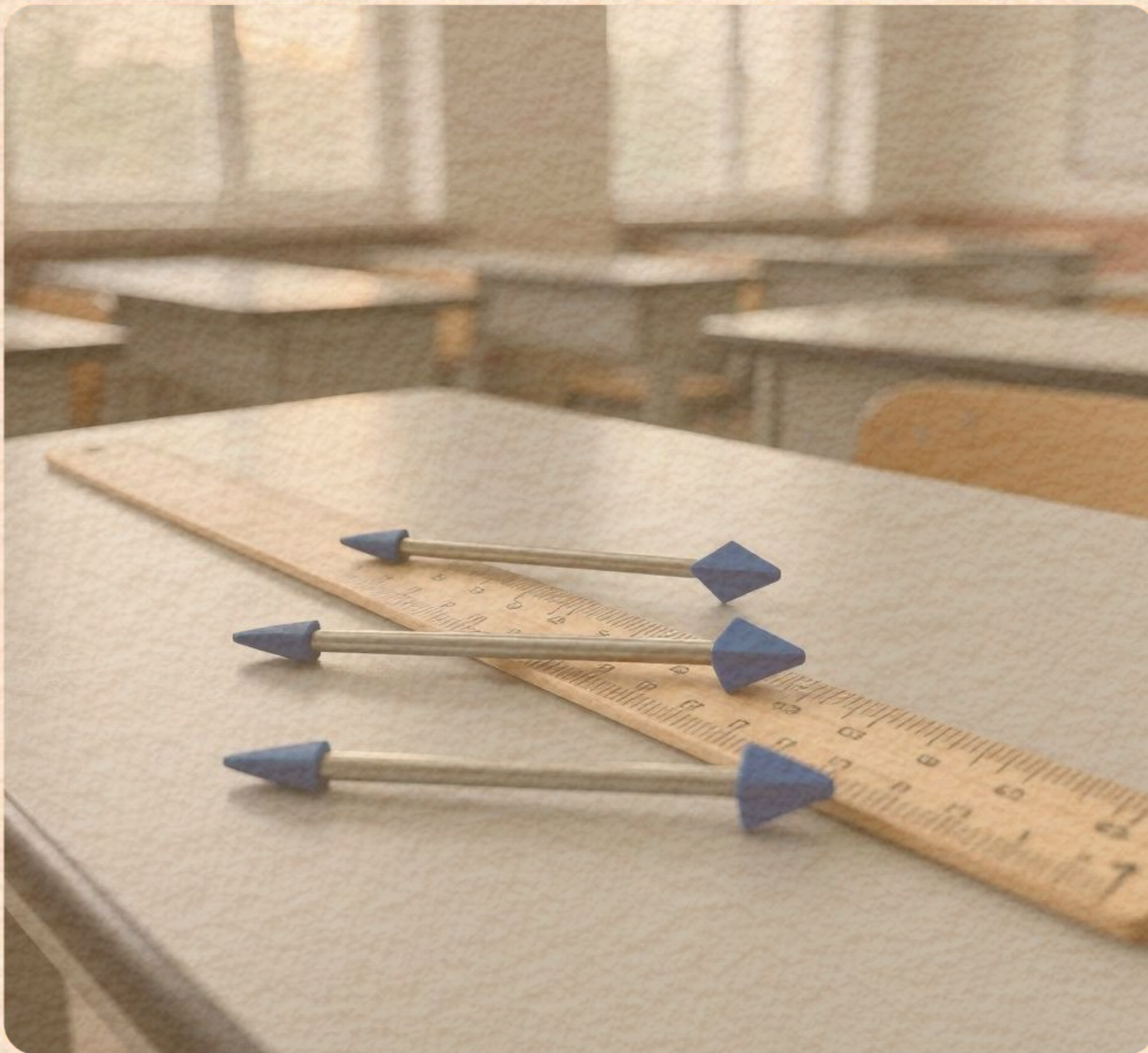
Примеры координатных вычислений

Вектор/операция	Результат	Проверка длины
$a=(2;1), b=(-3;4)$	$a+b=(-1;5)$	$ a+b =\sqrt{26}$
$a=(2;1)$	$ a =\sqrt{5}$	совпало с $\sqrt{(2^2+1^2)}$
$c=(6;8)$	$ c =10$	$\sqrt{(6^2+8^2)}=10$
$2b$	$2b=(-6;8)$	длина по $\sqrt{((-6)^2+8^2)}$

Проверим формулы на конкретных векторах: найдём сумму, длину, а также результат умножения на число. Таблица фиксирует исходные координаты и итоги для каждого случая.

В каждом примере вычисления согласуются с покомпонентными правилами суммы/умножения и с формулой модуля по координатам на плоскости.

Коллинеарные и противоположно направленные векторы

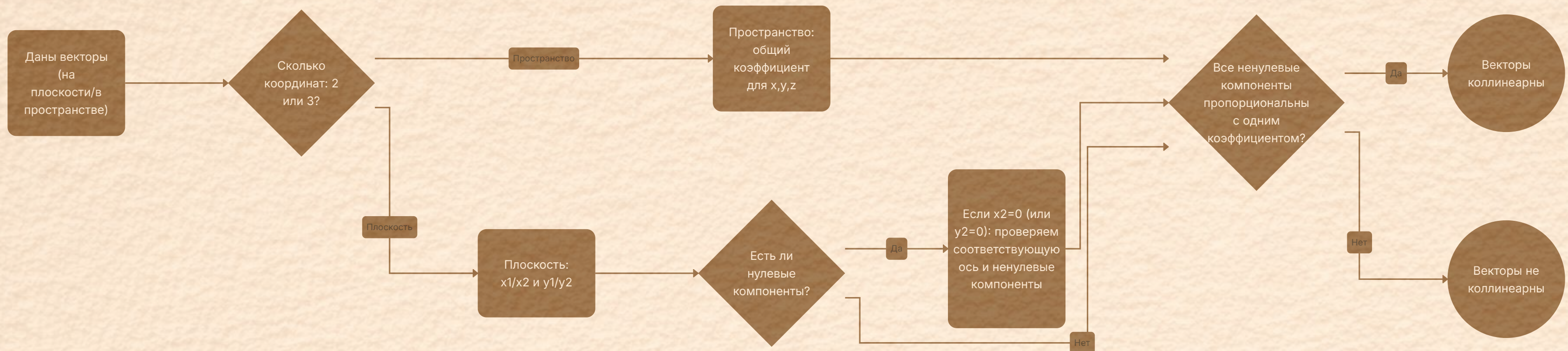


Коллинеарные векторы лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Если они сонаправлены, то их направления совпадают; если направления противоположны — векторы противоположно направлены.

Для векторов a и $2a$ коэффициент пропорциональности положителен, поэтому направления одинаковые. Для a и $-a$ коэффициент отрицателен, и направление меняется на противоположное; на рисунке это удобно сравнивать рядом.

Критерий коллинеарности по координатам

Алгоритм основан на проверке пропорциональности координат вектора (через общий коэффициент для всех ненулевых компонент).



Сложение как путь и диагональ

Геометрически сумма двух векторов соответствует результирующему перемещению. Если сначала выполнить движение по одному вектору, а затем по второму, итоговый вектор соединяет начальную и конечную точки всего пути.

В задачах на движение этот подход описывает общий эффект последовательных перемещений: скорости и перемещения можно складывать, чтобы получить результирующий характер движения без «усреднений на глаз».

В физике сумма сил трактуется как равнодействующая. Она задаёт одно эквивалентное воздействие нескольких векторных сил, которое вызывает тот же эффект изменения скорости, что и их совместное действие.

Правило параллелограмма в действии

Модуль $|a+b|$ связан с углом ϕ между векторами: при переходе от 0° к 180° он убывает и обращается в ноль при противоположных направлениях.

Диаграмма показывает тренд: чем ближе векторы к сонаправленности, тем больше результирующая. При увеличении угла эффект компенсируется, а при 180° происходит полная компенсация.

Смоделированные значения по формуле $|a+b| = 2|a|\cos(\phi/2)$ для $|a|=1$; углы указаны для наглядности.



Нулевой вектор и противоположный вектор

01.

Нулевой вектор — нейтральный элемент сложения: для любого вектора a выполняется равенство $a + 0 = a$. Он имеет длину 0 и не задаёт направления, поэтому «не меняет» вектор.

02.

Противоположный вектор $-a$ имеет ту же длину, что и a , но направлен строго в противоположную сторону. Поэтому он «возвращает» смещение назад по той же прямой, образуя симметрию направлений.

03.

Если сложить a и $-a$, получаем нулевой вектор: $a + (-a) = 0$. Эти свойства помогают упрощать выражения и решать уравнения, где неизвестный вектор входит в сумму.

Вектор на плоскости и в пространстве

Сравните две формы записи: $a = (x; y)$ в плоскости и $a = (x; y; z)$ в пространстве. Отличается число координат, а геометрический смысл сохраняется: длина считается по квадратам координат.

Переход к пространству добавляет третью компоненту; операции и свойства свободных векторов сохраняются, а формула длины расширяется на одну координату.

Плоскость	Пространство	Длина	Запись
Две координаты	Три координаты	$\sqrt{x^2+y^2}$	$a=(x;y)$
—	—	$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	$a=(x;y;z)$

Школьный курс геометрии (аналитическая геометрия).

Применения в физике и геометрии



Силы и резльтирующий эффект

Векторные силы удобно складывать: вместо нескольких воздействий можно использовать одну равнодействующую, которая задаёт итоговое действие. Это помогает анализировать движение и равновесие систем.



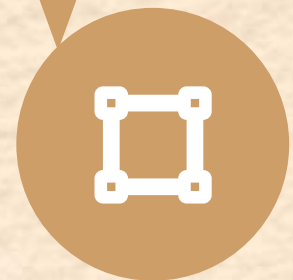
Перемещение и скорость

Скорость и перемещение в школьных задачах рассматривают как векторы. Тогда последовательно заданные движения объединяются в одну результирующую траекторию без потери направления и смысла.



Геометрические доказательства

Векторы помогают доказывать параллельность прямых и находить свойства фигур через направления и равенства отрезков. Особенно это удобно, когда нужно обосновать геометрические связи кратко и строго.



Координаты вершин и коллинеарность

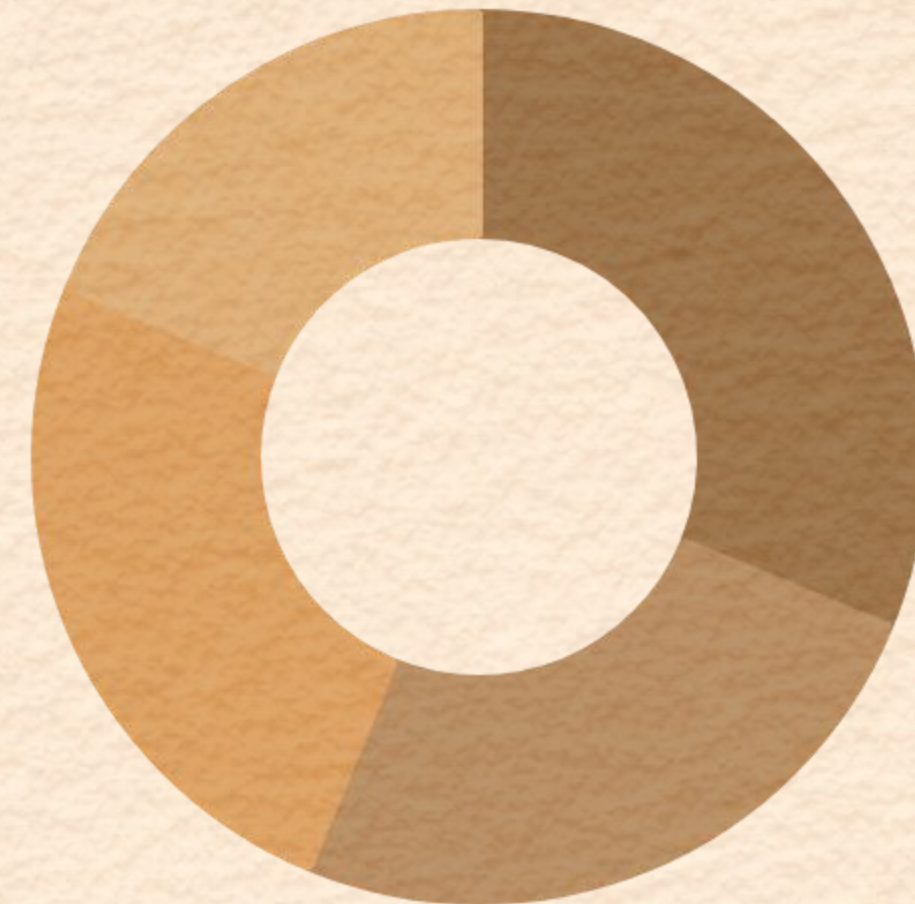
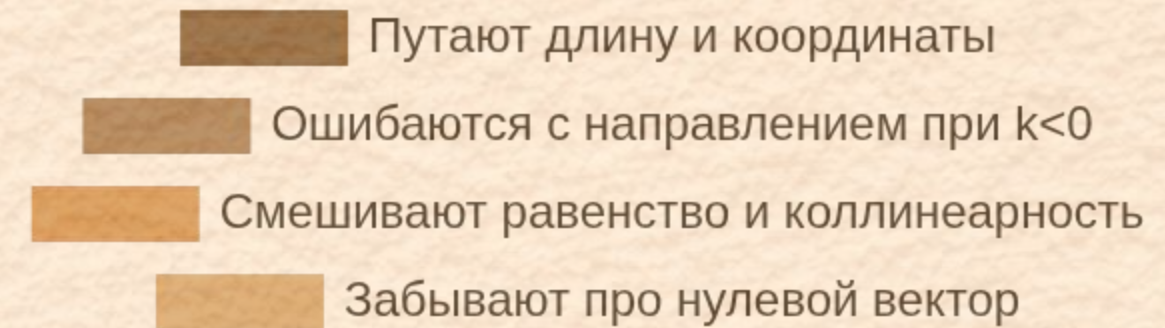
При решении задач координаты вершин задают векторы направления. Коллинеарность проверяют через пропорциональность компонентов, а равенство — через длину и совпадение направлений.

Типичные ошибки при работе со свободными векторами

Даже при правильных формулах ученики часто «ломают» решение на интерпретации: координаты не равны длине, а знак множителя определяет направление, а не абсолютную величину.

Диаграмма подчёркивает, что ошибки концентрируются вокруг двух идей: различие длины и координат и внимательное отслеживание направления и особого случая нулевого вектора.

Обобщение типичных затруднений по результатам школьной практики обучения векторной алгебре (оценочно, без статистической выборки).



Практический алгоритм решения задач

1) Уточните данные

01.

Выделите векторы из условия, запишите их обозначения и направление, при необходимости уточните, что требуется найти: равенство, коллинеарность, длину или результат операции.

2) Переведите в координаты

02.

Если даны точки, выражайте векторы через координаты. Затем приведите всё к единому виду (на плоскости: $(x;y)$, в пространстве: $(x;y;z)$).

3) Выполните вычисления

03.

Вычислите длины и проверьте отношения координат при коллинеарности. Для операций используйте формулы сложения, вычитания и умножения на число.

4) Сверьте результат

04.

Интерпретируйте полученный ответ геометрически: согласуется ли направление и величина с рисунком и условиями. При необходимости перепроверьте знаки и случай нулевого вектора.

Вектор, который не «привязан» к точке

Свободный вектор соединяет геометрию и алгебру: одно понятие описывает направление, длину и перемещение. Оно облегчает построения, координатные вычисления и доказательства в задачах 11 класса, а далее помогает в аналитической геометрии и моделях физики.