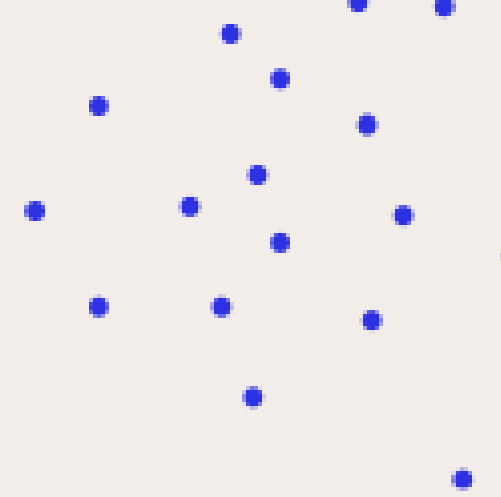
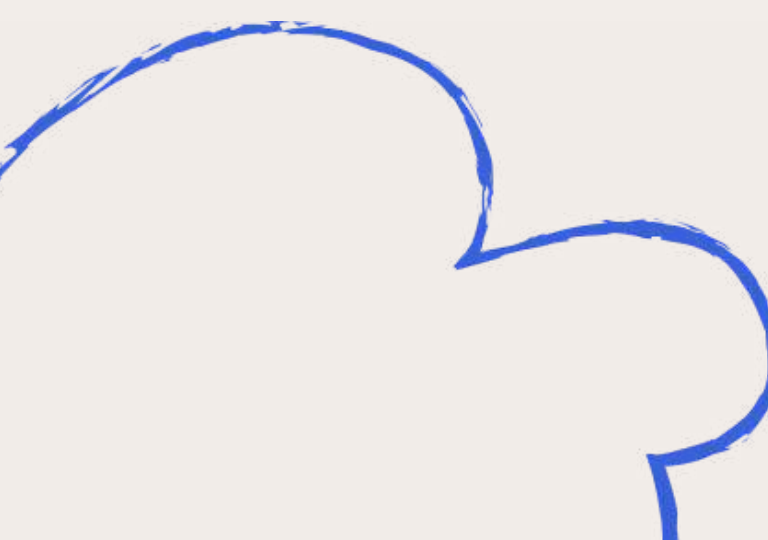




Рациональные выражения и дробные уравнения



Дробные уравнения требуют точности на каждом шаге.

- Где возникает эта тема и зачем она нужна



Рациональные выражения встречаются в формулах, задачах на движение и преобразованиях дробей. Чтобы решать их без ошибок, важно сразу учитывать ОДЗ, общий знаменатель и проверку корней.



• Что такое рациональные выражения

Запись дроби

Рациональное выражение записывают как дробь с многочленами в числителе и знаменателе. Главное условие — знаменатель не должен обращаться в ноль, иначе значение не определено.

Разные формы

Такие выражения могут выглядеть по-разному: от простых линейных дробей до выражений с квадратами и несколькими множителями. Внешний вид не меняет основной принцип работы с ними.

Ограничения значения

Переменная в знаменателе сразу создаёт ограничения. Поэтому перед преобразованиями нужно определить, при каких значениях выражение имеет смысл, а при каких — запрещено.

• Область допустимых значений

1

Проверяем знаменатель

Сначала смотрят на знаменатель: каждое значение, при котором он обращается в ноль, исключают из рассмотрения. Это и есть основа области допустимых значений.

2

Учитываем все множители

Если знаменатель состоит из нескольких множителей, запрещённым становится любое значение, обнуляющее хотя бы один из них. Проверять нужно каждый множитель отдельно.

3

Фиксируем заранее

ОДЗ записывают до сокращений и приведения дробей к общему виду. Это помогает не потерять ограничения и не принять неверный ответ за допустимый.

• Сокращение и общий знаменатель

2. Сокращение без изменения ОДЗ

После сокращения область допустимых значений остаётся прежней. Исключённые значения не возвращаются, даже если дробь внешне стала проще.

1. Проверка на общий множитель

Ищут одинаковые множители в числителе и знаменателе. Сокращать можно только множители, но не отдельные слагаемые, иначе преобразование станет неверным.

3. Общий знаменатель

Для сложения, сравнения и решения уравнений дроби приводят к общему знаменателю. Это позволяет объединить выражения в одну запись и работать с ней дальше.

- Главные ошибки, которых нужно избегать



Нельзя сокращать слагаемые

Сокращение выполняют только по множителям. Если убрать часть суммы, а не общий множитель, выражение изменится и приведёт к неверному результату.



Потеря ОДЗ

Игнорирование ограничений приводит к ответам, которые не подходят по смыслу. ОДЗ нужно выписывать до преобразований и сохранять до конца решения.



Неверный общий знаменатель

Ошибки в знаменателе дают неверный общий множитель и искажают всё уравнение. Особенно важно не пропустить ни один фактор при приведении к общему виду.

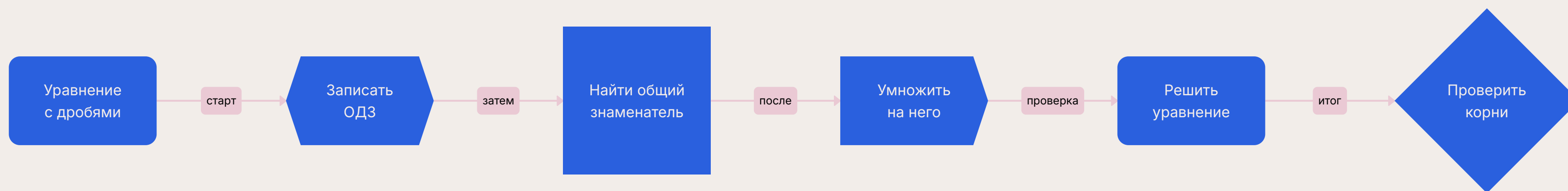


Нет проверки корней

После алгебраических преобразований найденный корень обязательно проверяют. Если он нарушает исходное уравнение или обращает знаменатель в ноль, его исключают.

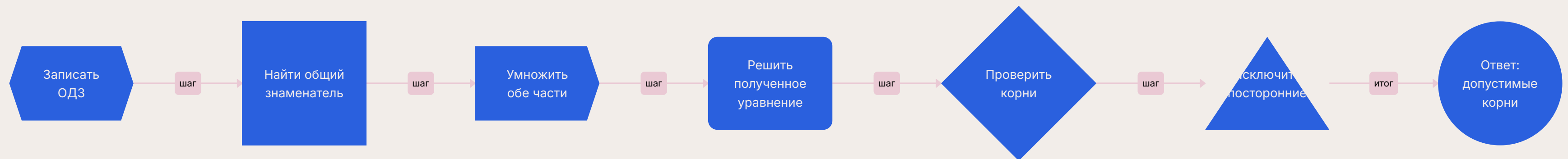
• Как сводят уравнение к общему знаменателю

Последовательность шагов показывает переход от дробного уравнения к ответу без знаменателей.



Алгоритм решения дробного уравнения

Алгоритм применяют последовательно: от ограничений и преобразований к проверке и итоговому множеству решений.



• Разбор уравнения по шагам

1 1. ОДЗ

Сначала записывают область допустимых значений: x не равен 2 и x не равен -2. Это сразу исключает значения, при которых исходные дроби не определены.

3 3. Получаем корни

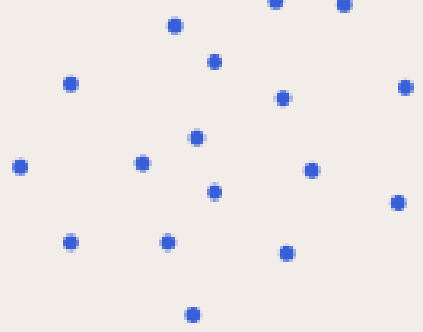
После преобразования получают квадратное уравнение $x^2 - 4x - 4 = 0$. На этом этапе важно не забыть, что полученные корни ещё не являются ответом.

2 2. Убираем знаменатели

Затем умножают обе части на общий знаменатель $2(x-2)(x+2)$. Дроби исчезают, и уравнение приводят к виду $4x = x^2 - 4$.

4 4. Проверка и ответ

Далее выполняют проверку по ОДЗ. Из найденных решений оставляют только те, которые не обращают знаменатель в ноль и удовлетворяют исходному уравнению.



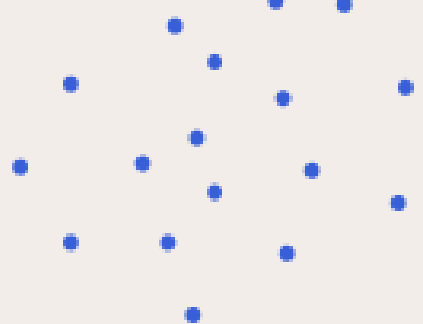
1

примерно одно значение может
сразу превратиться в посторонний
корень без проверки

Пример из условия

Даже один найденный корень может
оказаться недопустимым,
если он обнуляет знаменатель. Поэтому
проверка по ОДЗ обязательна всегда.





ОДЗ

задаёт допустимые значения
и исключает ошибки ещё до начала
вычислений.

Правило работы с рациональными выражениями
в школьной алгебре.

ОДЗ определяют до преобразований:
именно она сразу показывает, какие
значения переменной нельзя
использовать в решении.



● Критические точки и таблица знаков



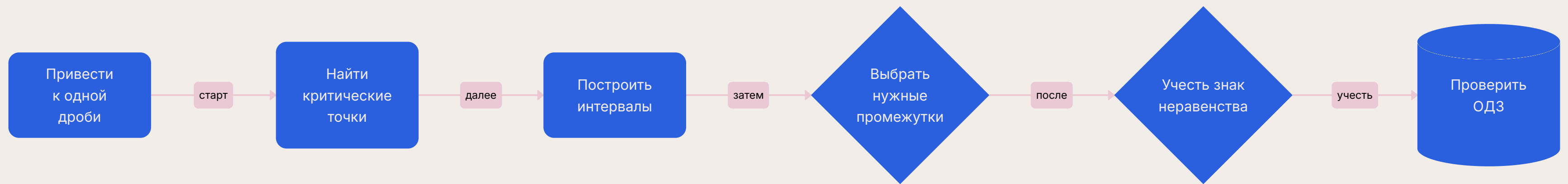
Критические точки удобно отмечать на числовой прямой до выбора ответов: так сразу видно, где дробь может менять знак.

Знак сохраняется внутри интервала и меняется только в критических точках; точки разрыва и нули числителя рассматривают отдельно.

Схема знаков для дроби $(x-3)/(x+1)$ на числовой прямой.

• Алгоритм решения неравенства

Последовательность действий при решении дробно-рационального неравенства с одной переменной.



- Как работает метод интервалов



Две опорные точки

На числовой прямой отмечают две особые точки: $x = -1$ и $x = 3$. Они разбивают ось на три промежутка, и на каждом нужно проверить знак дроби отдельно.



Ответ по интервалам

После исследования знаков остаются только те промежутки, где значение дроби неотрицательно. Точка $x = -1$ исключается как запрещённая, а $x = 3$ входит в ответ, потому что обращает дробь в ноль.

• Факторизация в рациональных неравенствах

1

Зачем раскладывать

Разложение на множители делает выражение прозрачным: сразу видны точки, где числитель или знаменатель обращается в ноль. Это сокращает число вычислений и помогает не пропустить критические значения.

2

Как это выглядит

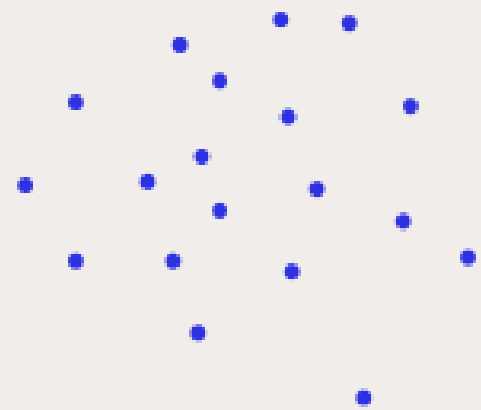
Пример $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ показывает, что одна формула скрывает две важные точки. Для $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ ситуация аналогична: обе скобки дают границы интервалов.

3

Польза для решения

После факторизации таблица знаков строится быстрее: каждый множитель анализируют отдельно, а затем объединяют результаты. Такой приём особенно полезен в неравенствах с несколькими квадратными выражениями.

● Когда меняется знак выражения



Ноль числителя

Если ноль принадлежит числителю, дробь может перейти через него из «плюса» в «минус» или наоборот. Это зависит от кратности соответствующего множителя.

Ноль знаменателя

Если ноль принадлежит знаменателю, выражение не определено, поэтому на графике или прямой возникает разрыв. Такая точка никогда не включается в ответ.

Кратность важна

Для нечётной кратности множителя знак обычно меняется, а для чётной — остаётся прежним. Поэтому перед выбором ответа важно смотреть не только на точку, но и на степень.

Проверка интервалов

После каждого критического значения проверяют хотя бы один тестовый пункт внутри интервала. Это позволяет уверенно определить знак и избежать случайной ошибки в таблице.

- Как собрать выражение в одну дробь

Если в неравенстве несколько дробей, их удобно сначала свести к общему знаменателю. Затем остаётся один рациональный дробный вид, с которым работают методом интервалов.

Сведение к одной дроби упрощает исследование знаков и делает дальнейшее решение единообразным.

Шаг	Что делаем	Результат
1	Общий знаменатель	Одна дробь
2	Объединение числителей	Вид P/Q

Стандартный приём преобразования суммы рациональных выражений в школьной алгебре.

• Как оформлять решение

1 Начать с ограничений

Сначала фиксируют ОДЗ: все значения, при которых знаменатели не обращаются в ноль. Это защищает решение от лишних ответов ещё до вычислений.

2 Построить основу

Далее находят критические точки и отмечают их на прямой: нули числителя — это возможные границы ответа, а нули знаменателя — точки разрыва.

3 Оформить ответ

В конце записывают ответ в виде промежутков, проверяя, включается ли граница. Выколотые точки не попадают в итог, даже если алгебраически подходят.

● Частые ошибки в уравнениях и неравенствах

Неверное сокращение

Частая ошибка — сокращать не множители, а слагаемые. Такое преобразование меняет исходное выражение и может полностью исказить ответ в уравнении или неравенстве.

Потеря ограничений

Ещё одна проблема — забыть про ОДЗ или включить запрещённую точку в ответ. Особенно это опасно, когда найденный корень делает знаменатель равным нулю.

Ошибка знака

При методе интервалов легко ошибиться со знаком на участке, особенно после точки разрыва. Поэтому каждую критическую точку нужно проверять отдельно, а границы читать внимательно.

Границы ответа

Для нестрогих и строгих неравенств правила разные: нули числителя можно включать только при знаках $\geq$ или $\leq$. Точки разрыва, напротив, всегда исключаются.

- Главное правило: проверять каждый шаг



Рациональные выражения решаются надёжно только тогда, когда ОДЗ, общий знаменатель и знак выражения проверяются на каждом шаге. Для уравнений важна проверка корней, для неравенств — метод интервалов.

