

Решение треугольников в курсе геометрии 7 класса

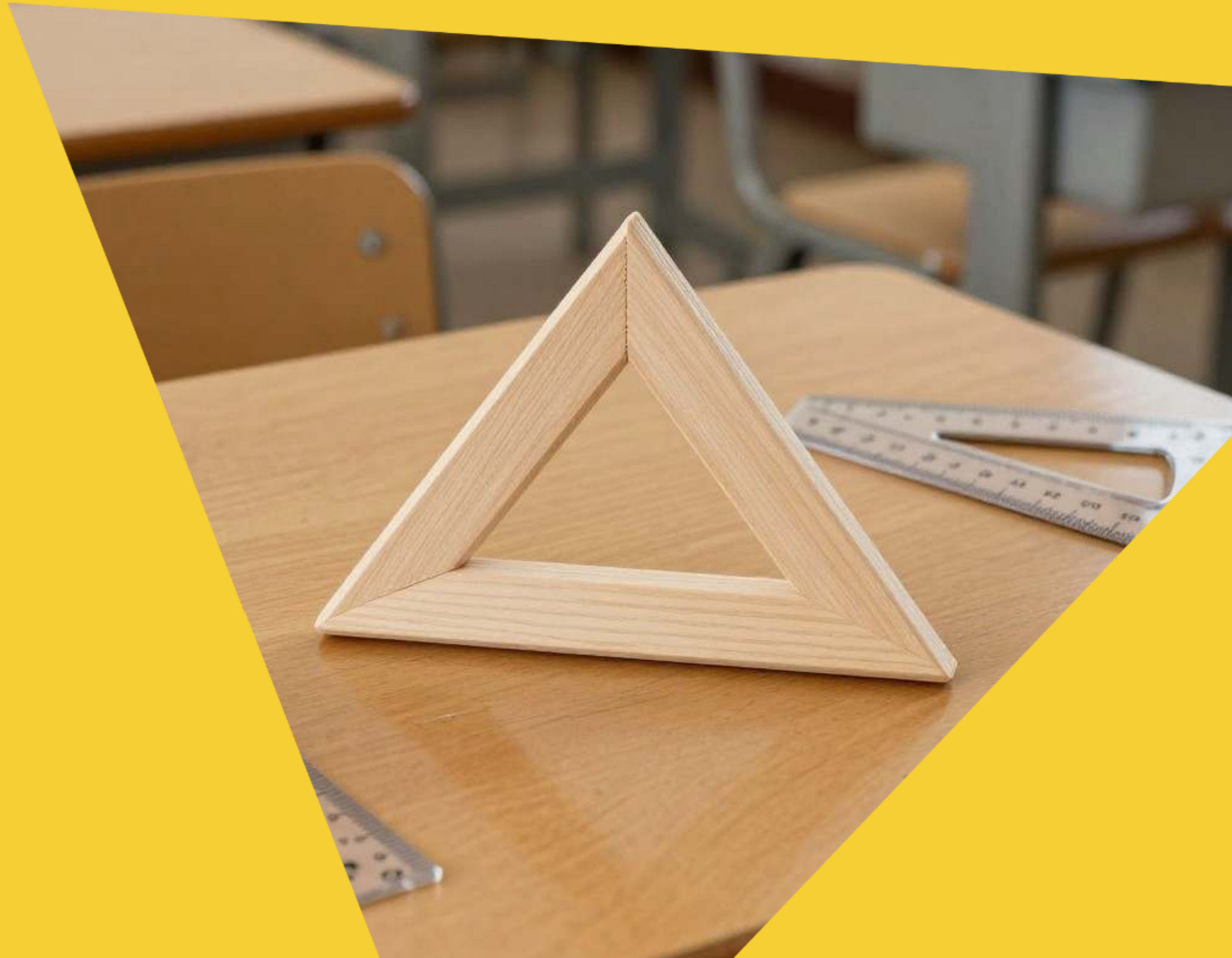


Научимся находить стороны и углы треугольника по данным условия и выбирать верные формулы вычислений.

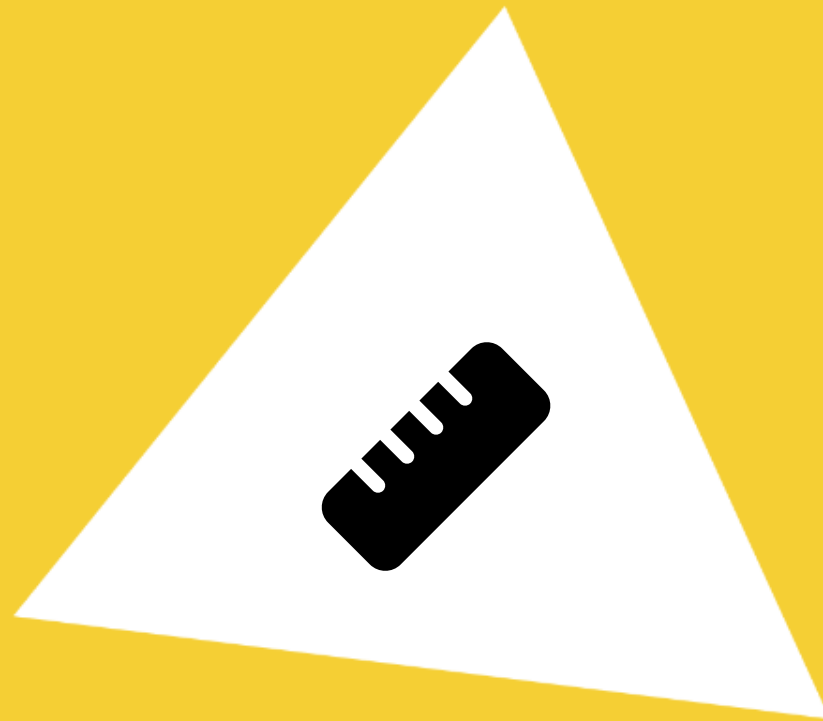
Почему это пригодится в 7 классе



Решение треугольников опирается на виды треугольников, углы, стороны и свойства равнобедренных и прямоугольных треугольников. Эта тема помогает переходить от построений к вычислению неизвестного по заданным параметрам.



Какие данные могут быть известны в задаче



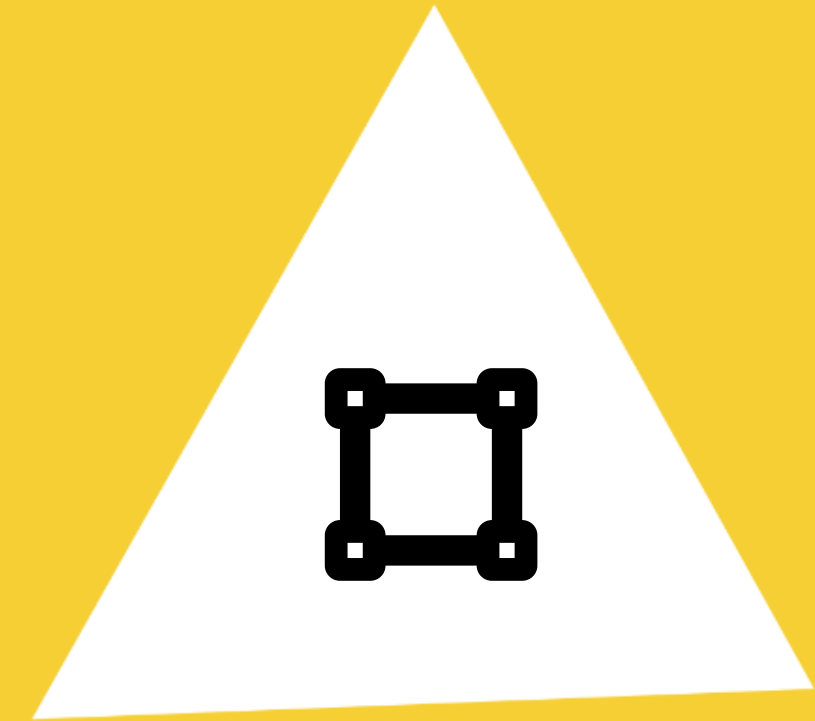
Две стороны

Часто известны две длины и требуется найти остальную сторону и углы. Обычно удобнее начинать с вычисления третьей стороны, а затем восстанавливать остальные углы.



Угол и стороны

Может быть задан один угол вместе со стороной напротив него и ещё одним углом или стороной. Тогда сначала находят третий угол, а затем остальные элементы.

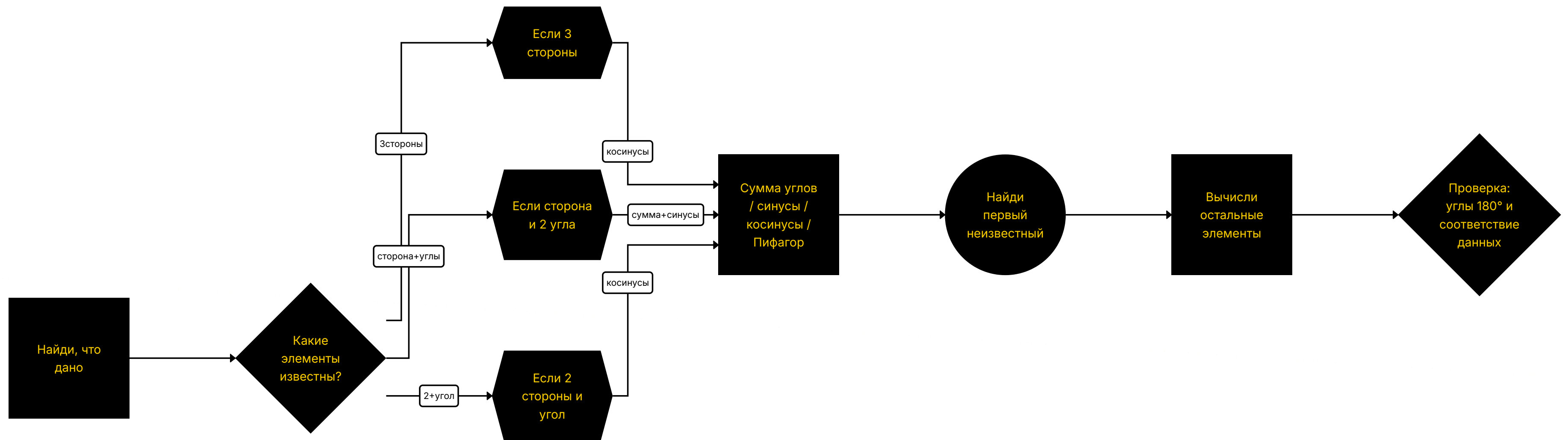


Три стороны

Если известны все три стороны, треугольник можно восстановить по размерам. Сначала находят угол, затем вычисляют оставшиеся углы и проверяют согласованность решения.

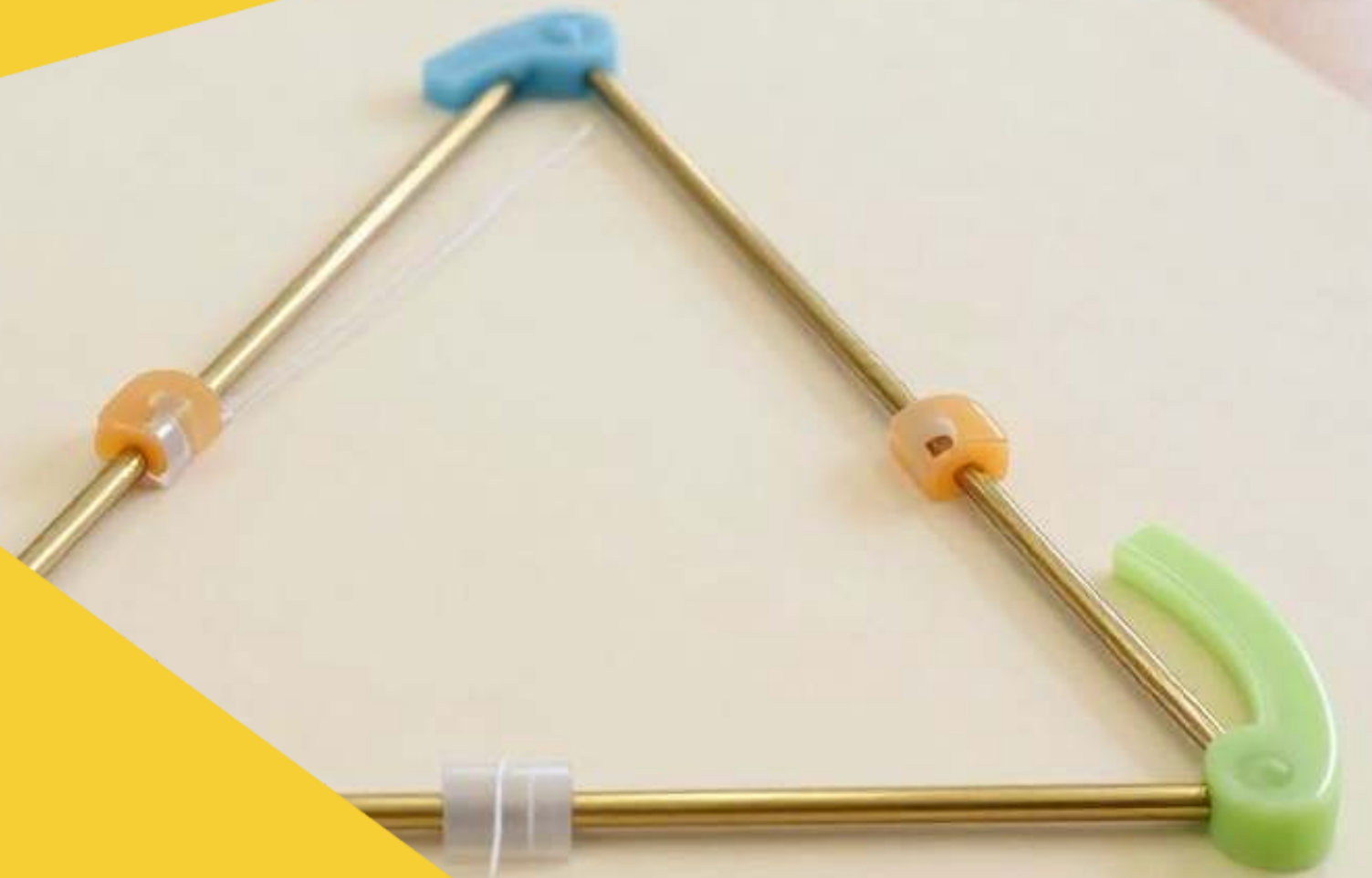
Как решать треугольник: общий путь

Последовательно выбирай формулу по набору известных данных и обязательно проверяй результат.



Сумма углов треугольника

- Во всяком треугольнике сумма внутренних углов равна 180° . Это свойство помогает находить неизвестный угол, если известны два из трёх.
- Например, при углах 50° и 60° третий равен 70° . Поэтому почти в каждом решении сначала проверяют или используют эту сумму.



Основные случаи решения треугольников

По виду данных выбирается стартовая формула: при угле между сторонами чаще берут теорему косинусов, а при двух углах — сначала находят третий.

Больше всего задач на неизвестные стороны удобно решать через косинусы, когда есть две стороны и угол, или через синусы, когда известны углы.

Учебный материал по теме «Решение треугольников» (обобщение типов задач)

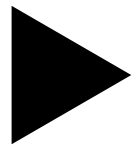
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Эта связь соединяет каждую сторону с углом напротив неё.

Формула особенно полезна, когда известен угол и противолежащая ему сторона, а также ещё один угол или сторона: тогда можно восстановить остальные элементы.

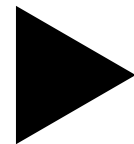
Когда применяется теорема синусов

Шаг 1: ASA



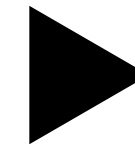
Сочетание «угол—сторона—угол» позволяет быстро найти третий угол. После этого стороны находятся по одной известной стороне с помощью теоремы синусов.

Шаг 2: AAS



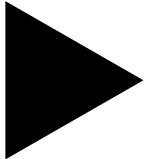
Если известны два угла и сторона между ними не требуется, сначала всё равно находят третий угол. Затем теорема синусов помогает восстановить оставшиеся стороны треугольника.

Шаг 3: Внимание к SSA

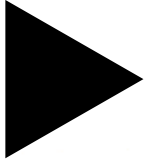


Когда дают два угла и одну сторону? Нет: именно SSA может дать два разных треугольника. Поэтому после вычислений обязательно проверяют, какой вариант подходит условию.

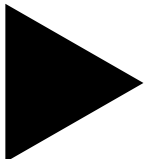
Теорема косинусов



Для стороны a используется формула $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$. По аналогии записываются выражения для b и c : меняется только «противолежащий» угол.



Теорема косинусов нужна, когда известны две стороны и угол между ними, а также когда даны все три стороны. Тогда можно найти недостающую сторону или угол.



При угле 90° значение $\cos 90^\circ$ равно 0, и формула превращается в $a^2 = b^2 + c^2$. Поэтому теорема косинусов — общий случай теоремы Пифагора.

Какая формула подходит к данным задачи

Выбор зависит от набора известных элементов: сначала определяют недостающее «ключевое» значение, а затем дополняют вычисления.

Правильная формула выбирается по тому, какие данные даны: углы требуют суммы и синусов, стороны с углом между ними — косинусов, а прямой угол — Пифагора.

Данные	Основная формула	Что находится первым	Проверка
2 стороны и		Третья	Согласованн

Типы задач из раздела «Решение треугольников» (обобщение)

Пример задачи: две стороны и угол между ними

- 1 Пусть в треугольнике даны две стороны $b = 7$ см, $c = 9$ см и угол $A = 60^\circ$ между ними. Сначала находим третью сторону a по теореме косинусов: $a^2 = 7^2 + 9^2 - 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \cos 60^\circ$.
- 2 После вычисления a используем теорему синусов, чтобы найти оставшиеся углы B и C . Если удобнее, можно также воспользоваться суммой углов: $B + C = 180^\circ - A$. В результате получаем все элементы треугольника.

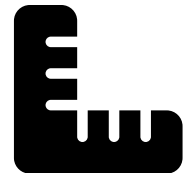
Как изменяется сторона при изменении угла

При увеличении угла A от 30° к 120° длина противоположной стороны a заметно растёт: меняется вклад $\cos A$ в формуле косинусов.

Точки показывают общий вывод: чем больше угол между фиксированными сторонами, тем больше значение a ; это согласуется со знаком и величиной $\cos A$.

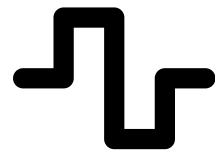
Демонстрационные значения, рассчитанные по теореме косинусов для $b=7$ см и $c=9$ см; 2026-05-13.

Площадь треугольника как дополнительный способ проверки



Проверка через две формулы площади

Площадь можно вычислять как $S = 1/2 \cdot a \cdot h$ и как $S = 1/2 \cdot a \cdot b \cdot \sin C$. Если оба способа дают одно значение, решение становится надёжнее.



Удобно при известном угле между сторонами

Формула $S = 1/2 \cdot a \cdot b \cdot \sin C$ особенно практична, когда даны две стороны и угол между ними. Тогда площадь служит связкой между сторонами и углами.

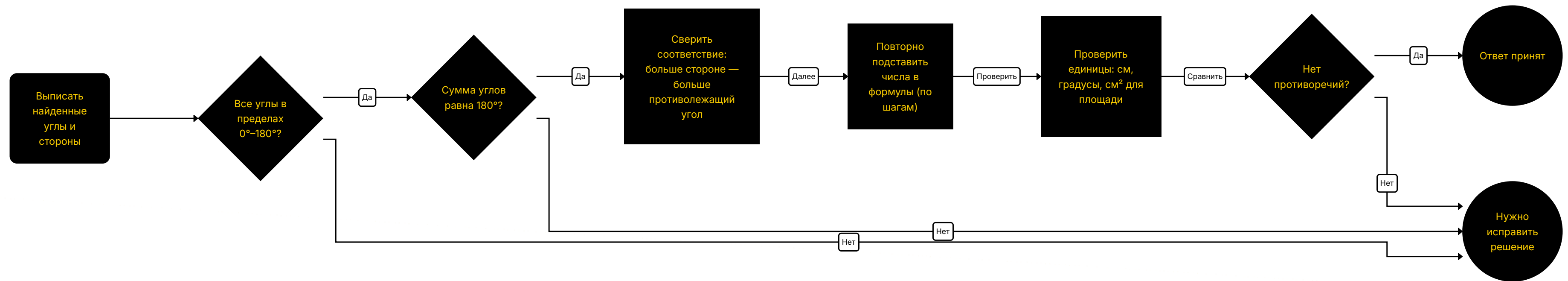


По площади можно восстановить высоту

Зная S и одну из сторон, можно находить высоту: $h = 2S/a$. Это помогает убедиться, что найденные длины и углы действительно согласуются друг с другом.

Проверка ответа перед финальным выводом

Алгоритм последовательной самопроверки найденных сторон и углов



Типичные ошибки семиклассников

- ▶ Часто путают противолежащие стороны и углы: в теореме косинусов нужно точно знать, какой угол расположен между данными сторонами. Из-за этого вычисления дают неверную третью сторону.
- ▶ Неправильно переписывают формулу косинусов или допускают арифметические промахи в знаках и множителях $2bc$. Ещё одна причина ошибок — слишком раннее округление на промежуточных шагах.
- ▶ Иногда забывают главное ограничение: сумма углов треугольника равна 180° . Тогда находят углы по частям, а итог выходит противоречащим условию, хотя отдельные шаги выглядят правдоподобно.
- ▶ При данных SSA возможны два различных треугольника, поэтому нужен дополнительный анализ. Дополнительно часто смешивают градусы с линейными величинами, например, принимая угол за число в сантиметрах.

Решение задач в прямоугольном треугольнике

- Если один угол равен 90° , треугольник становится прямоугольным, и для него особенно важна теорема Пифагора: $a^2 = b^2 + c^2$, где a — гипотенуза. Затем можно использовать синус, косинус и тангенс острых углов для уточнения сторон.
- Прямоугольный треугольник часто встречается как часть более сложной фигуры: при поиске высот, диагоналей, расстояний и в задачах на построение. Поэтому умение быстро переходить к прямоугольному случаю экономит время и уменьшает ошибки.



Какие инструменты используются чаще всего

В упражнениях по решению треугольников теорема косинусов обычно выручает при двух сторонах и угле между ними, а теорема синусов — при сочетании углов с противолежащей стороной.

Диаграмма подчёркивает приоритет: большинство задач сводятся к выбору между косинусами и синусами. Проверка суммы углов почти всегда остаётся обязательным шагом.

Качественная оценка распределения тем в школьной практике; 2026-05-13.

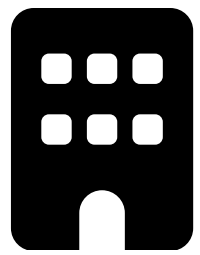
Краткая памятка формул по теме

Формула	Когда применять
Сумма углов треугольника: 180°	Если известны два угла
Теорема синусов: $a/\sin A$	Если есть угол и противолежащая

Сопоставьте формулу с данными в условии: угол, стороны или их сочетание. Это помогает быстро выбрать метод и уменьшает риск ошибиться с порядком величин.

Быстрый выбор формулы делается по тому, что дано в условии: углы — через сумму 180° , две стороны с углом — через косинусы, смешанные данные — через синусы, прямой угол — через Пифагора.

Где используется решение треугольников



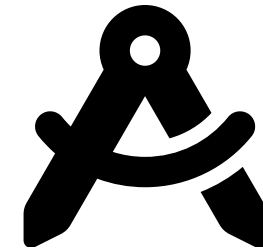
Строительство и измерения

При проектировании и проверке конструкций треугольники помогают находить недостающие длины, высоты и расстояния между точками. Это повышает точность расчётов и упрощает контроль размеров.



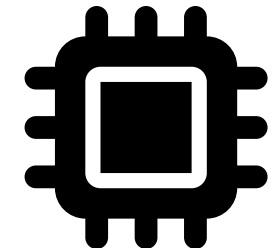
Картография и геодезия

В геодезических задачах треугольные построения применяют для определения расстояний и направлений. По измеренным углам и сторонам восстанавливают параметры участков местности.



Навигация и ориентирование

Когда известны углы и часть расстояний, треугольники позволяют рассчитать маршрут и местоположение объектов. Решение треугольников поддерживает вычисления в системах определения направления.



Компьютерная графика

В графике треугольники лежат в основе построения форм и поверхностей. С помощью вычислений по углам и сторонам добиваются корректных размеров и реалистичной геометрии.

Итоги темы: что нужно запомнить

Решение треугольника опирается на три ключевые опоры: сумма углов 180° , теорема синусов и теорема косинусов. Формулу выбирают по данным в условии, а в прямоугольном треугольнике добавляют теорему Пифагора. Проверка обязательна.