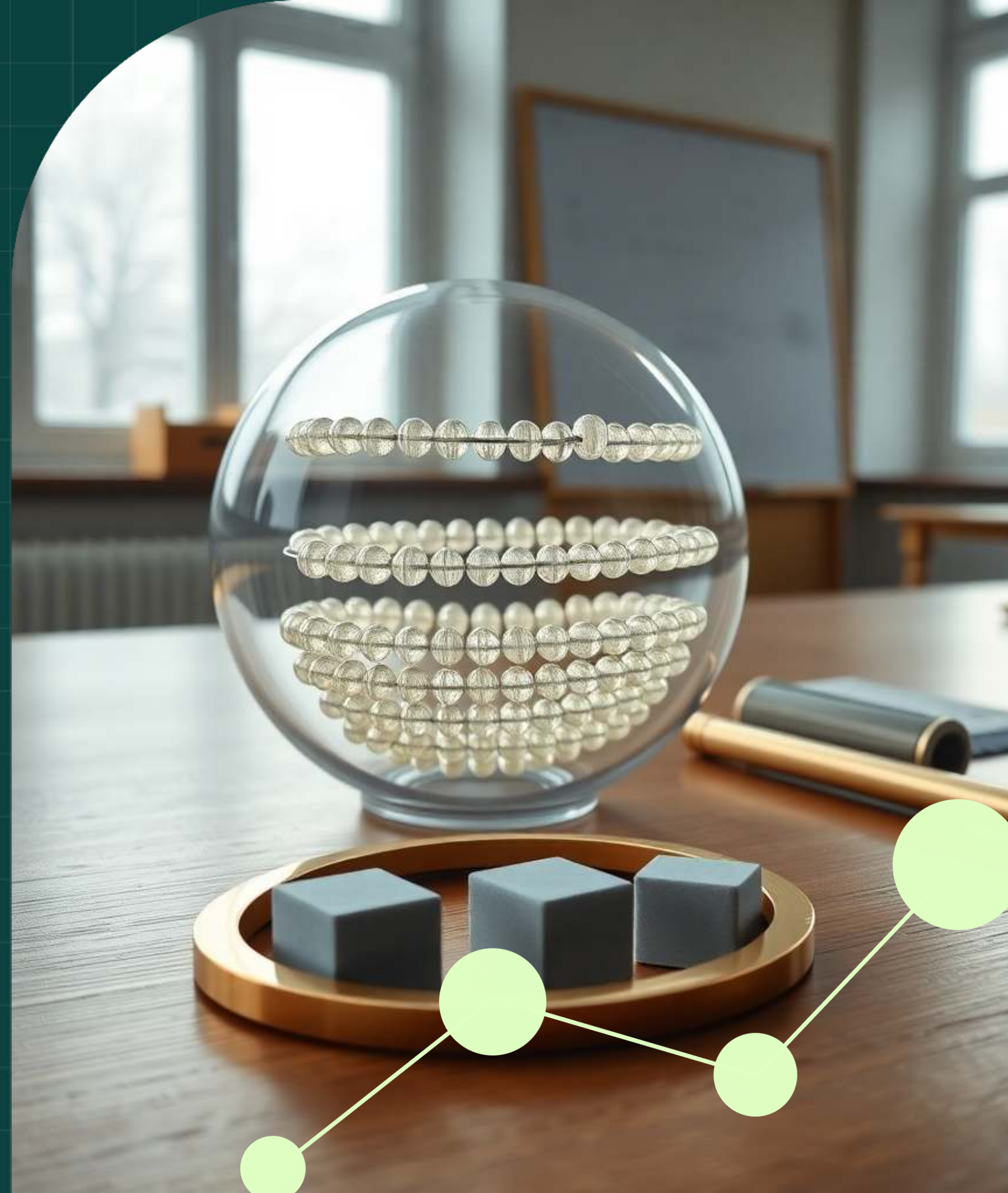




Две ключевые идеи алгебры: убывающая прогрессия и корень

Два правила, которые
связывают степень, предел
и точный расчёт.

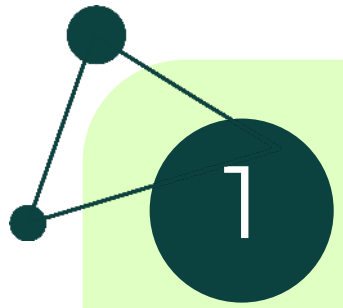


Зачем изучать эти темы в 10 классе

Геометрическая прогрессия учит видеть закономерность в последовательностях, а корень натуральной степени показывает, как «развернуть» степень обратно. Эти идеи нужны в процентах, формулах и задачах на вычисление величин.



Геометрическая прогрессия: определение и общий член



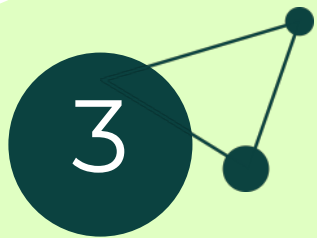
Что это такое

Геометрическая прогрессия — это последовательность, в которой каждый следующий член получают умножением предыдущего на одно и то же число q . Это число называют знаменателем прогрессии.



Формула общего члена

Общий член удобно записывать формулой $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$. Она позволяет сразу находить любой член последовательности, не выписывая все предыдущие значения.



Как распознать закономерность

Если последовательность выглядит как 3, 6, 12, 24 или 81, 27, 9, 3, значит, между соседними членами сохраняется постоянное отношение. Именно оно и задаёт геометрический рост или убывание.



Практический смысл

Формула общего члена особенно полезна, когда нужно продолжить ряд, проверить ответ или вычислить дальний член последовательности в одну строку, без лишних промежуточных шагов.



Общий член геометрической прогрессии на примерах

n	a_n	Вид
1	a_1	a_1
2	a_1q	a_1q
n	a_1q^{n-1}	общий вид

Таблица показывает, как меняется степень знаменателя при переходе к следующему члену.

Каждый новый член отличается от предыдущего умножением на q, а показатель степени растёт на 1.

Образ убывания при $0 < q < 1$

5

● Последовательное сжатие

Если $0 < q < 1$, каждый следующий член меньше предыдущего в одно и то же число раз. Поэтому значения быстро сокращаются и визуально приближаются к нулю.

● Удобные образы

Такую прогрессию удобно представлять как ступени, уменьшающиеся отрезки или прямоугольники, которые каждый раз сжимаются одинаковым коэффициентом.

● Не линейное уменьшение

Здесь убывание происходит не на одинаковую разность, а на одинаковый множитель. Это делает спад сначала заметным, а затем всё более плавным.

● Примеры рядов

Ряды 100, 50, 25, 12,5 и 1, 0,2, 0,04, 0,008 хорошо показывают, как значения уменьшаются геометрически, а не равномерно.



Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия



Условие убывания

Бесконечно убывающей называют геометрическую прогрессию, у которой знаменатель q лежит между нулём и единицей. Именно это обеспечивает постоянное уменьшение каждого следующего члена.



Стремление к нулю

При $n \rightarrow \infty$ члены такой последовательности становятся всё меньше и в пределе стремятся к нулю. Важно, что речь идёт о бесконечном процессе, а не о конечном наборе чисел.



Геометрический, а не линейный спад

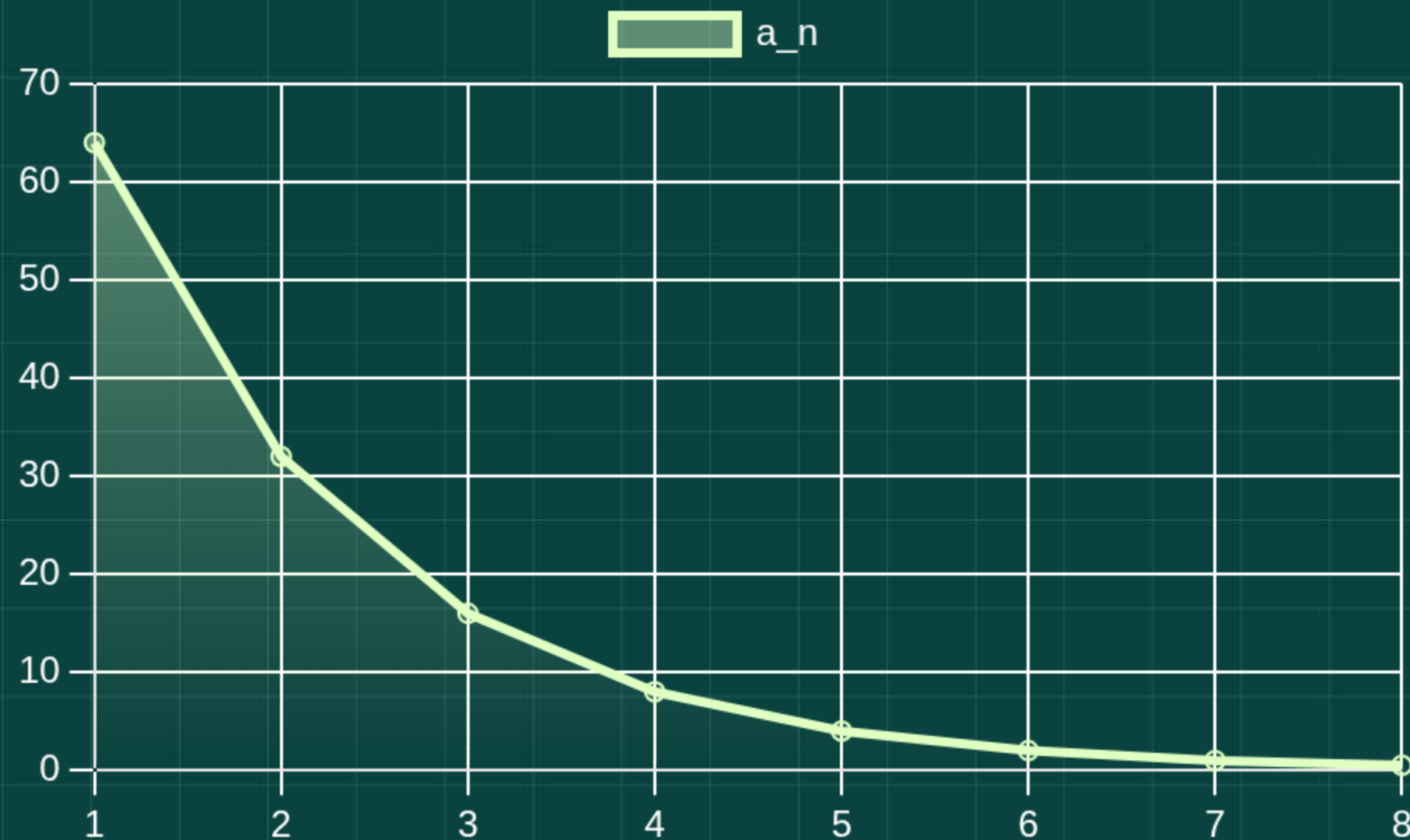
Уменьшение здесь происходит не на одинаковое число, а на одинаковый множитель. Поэтому последовательность меняется по закону повторного умножения, а не вычитания.



Наглядные примеры

Последовательности 64, 32, 16, 8, 4, 2 и 10, 5, 2,5, 1,25, 0,625 демонстрируют типичный характер убывания: каждый шаг уменьшает предыдущий член в одно и то же число раз.

Как меняются члены прогрессии при $q = \frac{1}{2}$



На графике хорошо видно, что первые члены убывают особенно быстро, а затем спад постепенно замедляется.

Постоянное отношение между соседними членами сохраняется, поэтому точки ложатся на плавную нисходящую линию, приближающуюся к нулю.

Формула $S = a_1/(1-q)$ показывает, что бесконечная сумма может быть вычислена точно, если знаменатель лежит между нулём и единицей.

Формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

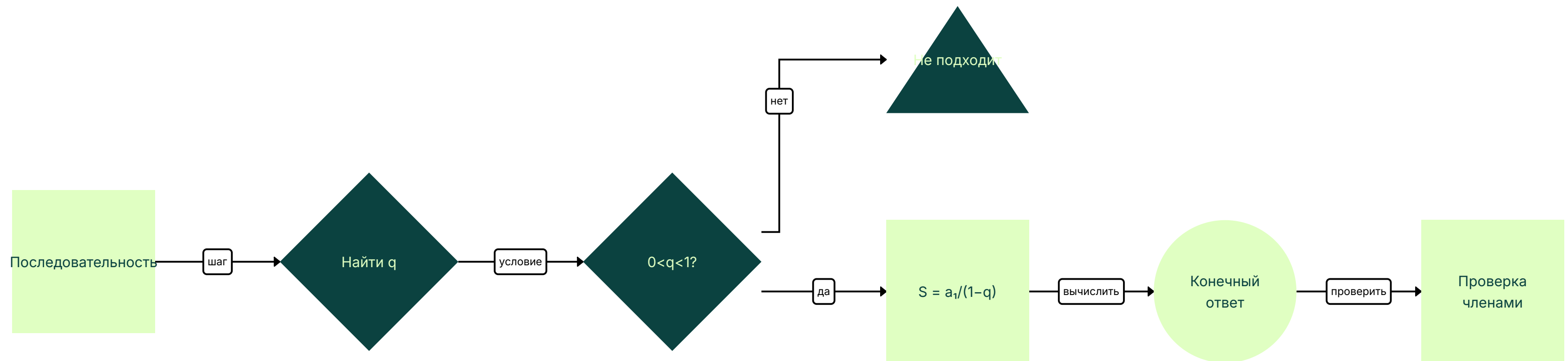


16

получается как конечный результат бесконечного процесса при $a_1=8$ и $q=1/2$.

Когда существует сумма бесконечной прогрессии

Алгоритм проверки условия и вычисления суммы по формуле.



Проценты, скидки и повторяющееся уменьшение



Скидка, которая повторяется

Когда цена каждый раз снижается на один и тот же процент, получается геометрическая прогрессия. Например, при уменьшении на 20% каждый новый шаг равен 0,8 от предыдущего, поэтому последовательность легко описать формулой и проследить на графике.



Техника теряет стоимость постепенно

Остаточная стоимость устройства редко падает равномерно: в первые периоды снижение обычно заметнее, затем замедляется. Для таких задач модель геометрической прогрессии удобна, потому что она точно отражает повторяющееся процентное уменьшение.



Природные и физические процессы

Аналогичный принцип встречается при уменьшении численности популяции и затухании физических процессов. Школьник видит в таких задачах не абстрактную формулу, а способ описать реальные изменения по шагам.

Натуральная степень и арифметический корень

1

Определение корня

Если число x в n -й степени даёт a , то x называют арифметическим корнем n -й степени из a . Это обозначают $\sqrt[n]{a}$, а число n называют показателем корня.

2

Связь со степенью

Корень и степень — взаимно обратные действия: если $x = \sqrt[n]{a}$, то $x^n = a$. Поэтому проверка ответа всегда сводится к возведению найденного числа в степень.

3

Чётный показатель

При чётном n подкоренное выражение должно быть неотрицательным, а в школьной записи сам корень берут неотрицательным. Это правило особенно важно при работе с квадратным корнем.

4

Нечётный показатель

При нечётном n корень существует для любого действительного числа a , включая отрицательные. Такой корень может быть отрицательным, если именно это число при возведении в степень даёт исходное значение.

5

Практический смысл

Арифметический корень помогает упрощать выражения, решать уравнения и быстро проверять вычисления. Он связывает запись числа в степени с обратным переходом к исходному значению.

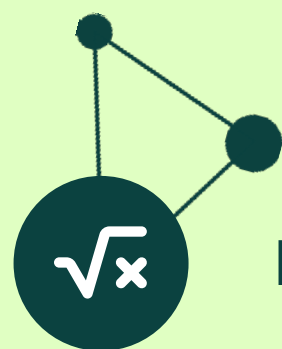
Примеры арифметических корней и проверка

Выражение	Значение	Проверка
$\sqrt[2]{49}$	7	$7^2=49$
$\sqrt[3]{64}$	4	$4^3=64$
$\sqrt[4]{81}$	3	$3^4=81$
$\sqrt[5]{32}$	2	$2^5=32$

Таблица показывает, как корень подтверждается возведением в степень, и подчёркивает правило неотрицательного ответа для чётных показателей.

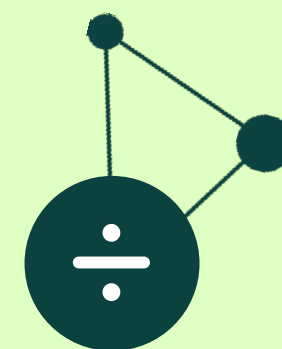
Во всех примерах корень и степень взаимно подтверждают друг друга, а для чётных показателей ответ записывается только неотрицательным числом.

Свойства арифметического корня



Корень произведения

Корень из произведения можно разложить на произведение корней: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. Это удобно, когда под корнем находится число, которое можно представить как произведение удобных множителей.



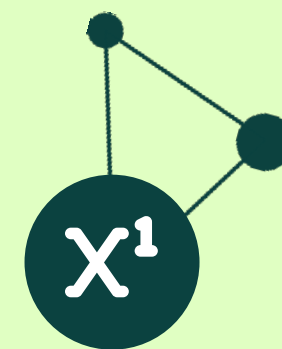
Корень частного

Если знаменатель положителен, корень из частного равен частному корней: $\sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b}$. Такое преобразование помогает сокращать дроби и упрощать выражения с корнями.



Степень под корнем

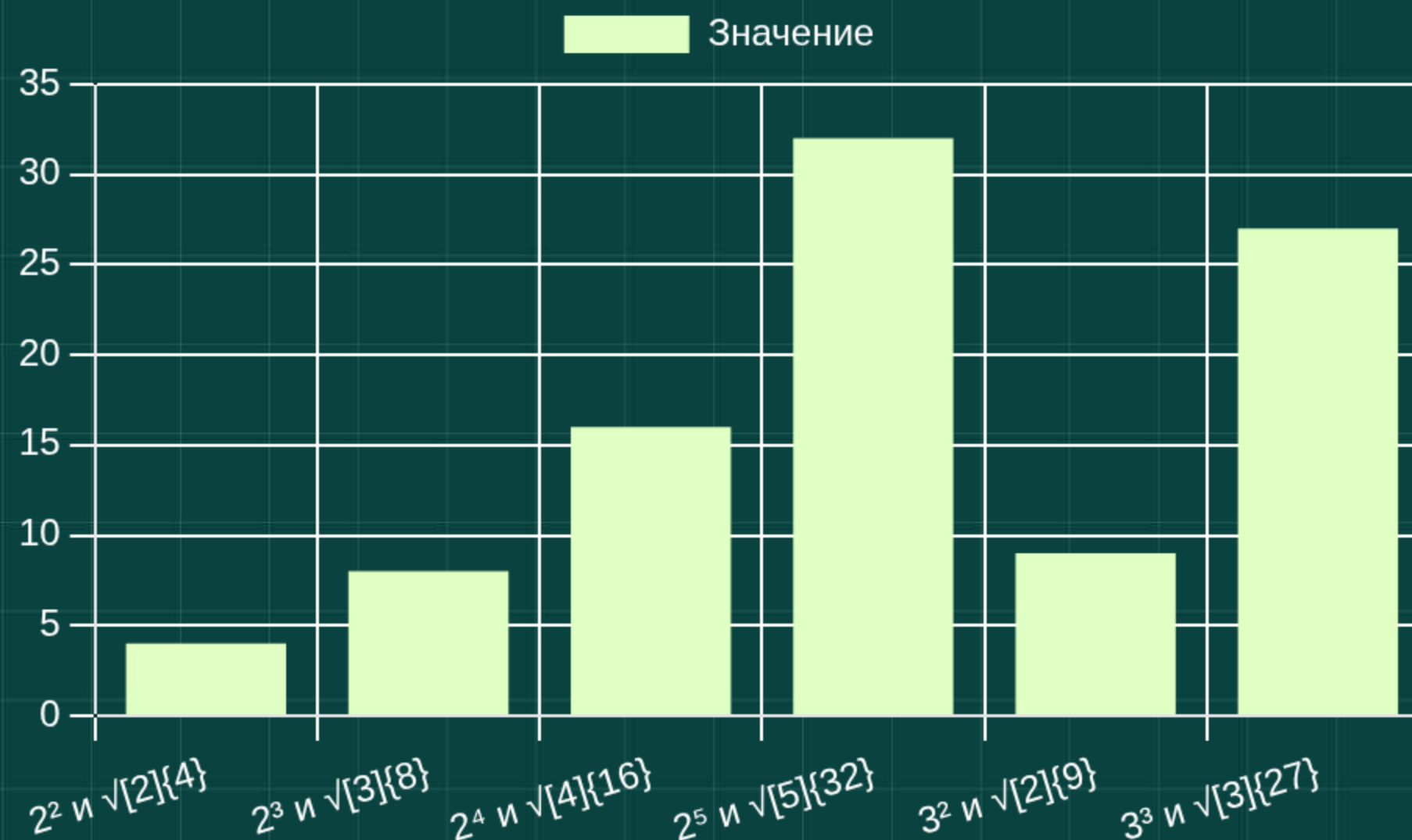
Для чётного n верно $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, потому что корень должен быть неотрицательным. Это правило защищает от ошибки, когда исходное число могло быть отрицательным.



Нечётный показатель

При нечётном n выполняется $\sqrt[n]{a^n} = a$. Здесь знак сохраняется, и корень возвращает именно то число, которое было возведено в степень, без модуля.

Степень и корень как взаимно обратные операции



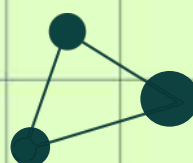
На диаграмме сравниваются пары выражений: сначала число возводится в степень, затем из результата извлекается корень того же показателя.

Одинаковый результат можно получить двумя обратными действиями: через степень и через корень. Это делает вычисления взаимно проверяемыми.



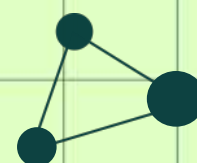
Учебные примеры по теме «Арифметический корень натуральной степени»; значения взяты из условий задания.

Корень как способ найти неизвестное число



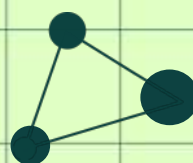
Степень известна

Если $x^5=243$, то неизвестное число находится извлечением пятого корня: $x=\sqrt[5]{243}=3$. Здесь корень возвращает исходное основание степени без дополнительных преобразований.



Чётный случай

Если $y^4=16$, то $y=2$, потому что в школьной записи корень чётной степени выбирают неотрицательным. Проверка возведением в четвёртую степень сразу подтверждает ответ.

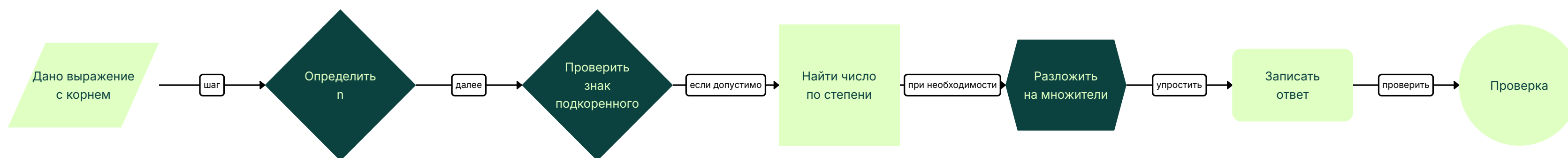


Отрицательное основание

Если $z^3=-125$, то $z=-5$, поскольку именно это число при возведении в третью степень даёт -125 . Для нечётного показателя знак сохраняется, и отрицательный ответ допустим.

Алгоритм работы с арифметическим корнем

Последовательность действий при упрощении и проверке выражений с корнем n -й степени

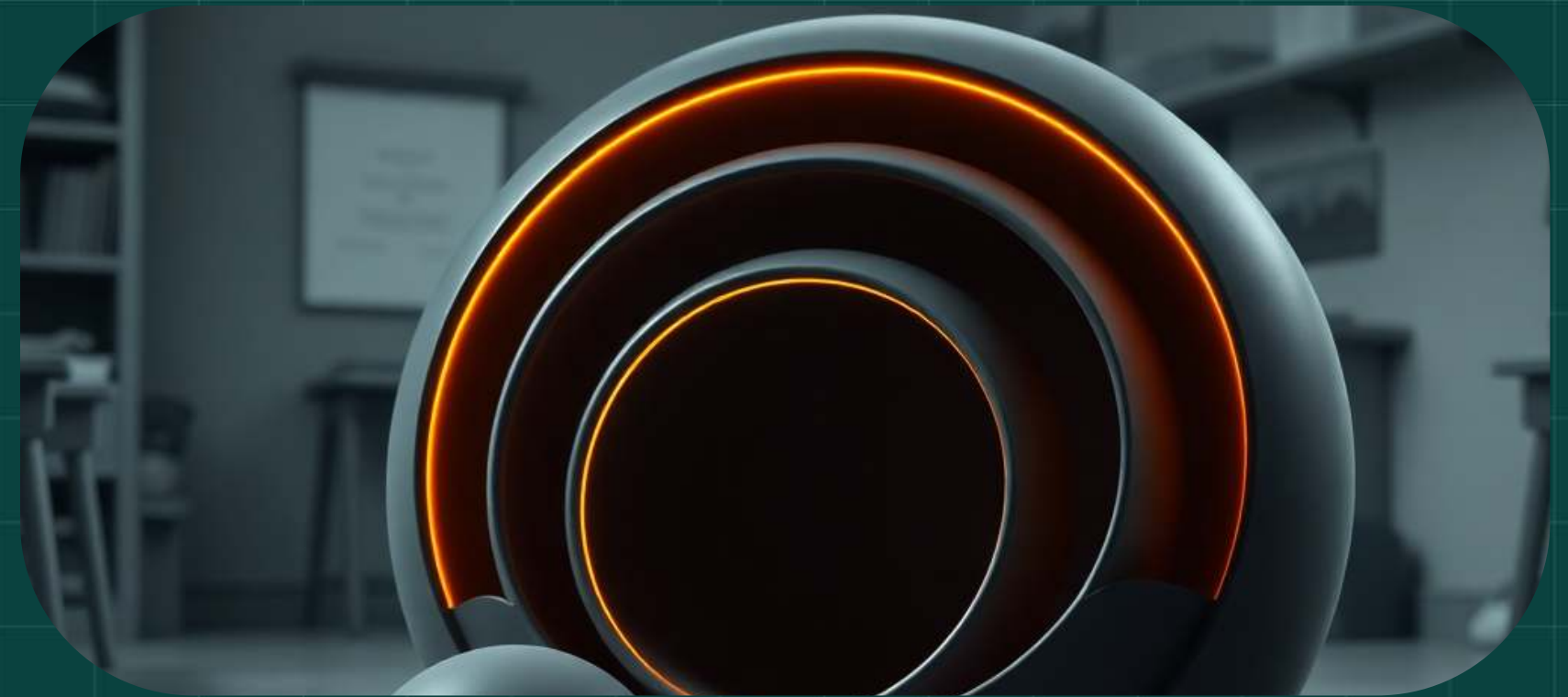


Общая идея двух тем: повторение, степень, предел



Когда повторение рождает предел

В геометрической прогрессии каждый новый член получается умножением на один и тот же коэффициент. Если этот коэффициент меньше единицы, последовательность убывает всё быстрее, но сумма может оставаться конечной. Так бесконечный процесс получает точный результат.



Когда степень возвращается назад

Арифметический корень устроен как обратный ход: по известному результату степени нужно восстановить исходное число. Эта идея особенно наглядна, если рядом показать уменьшающиеся фигуры и записи $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$, $\sqrt[n]{a}$.

Типичные ошибки при изучении темы

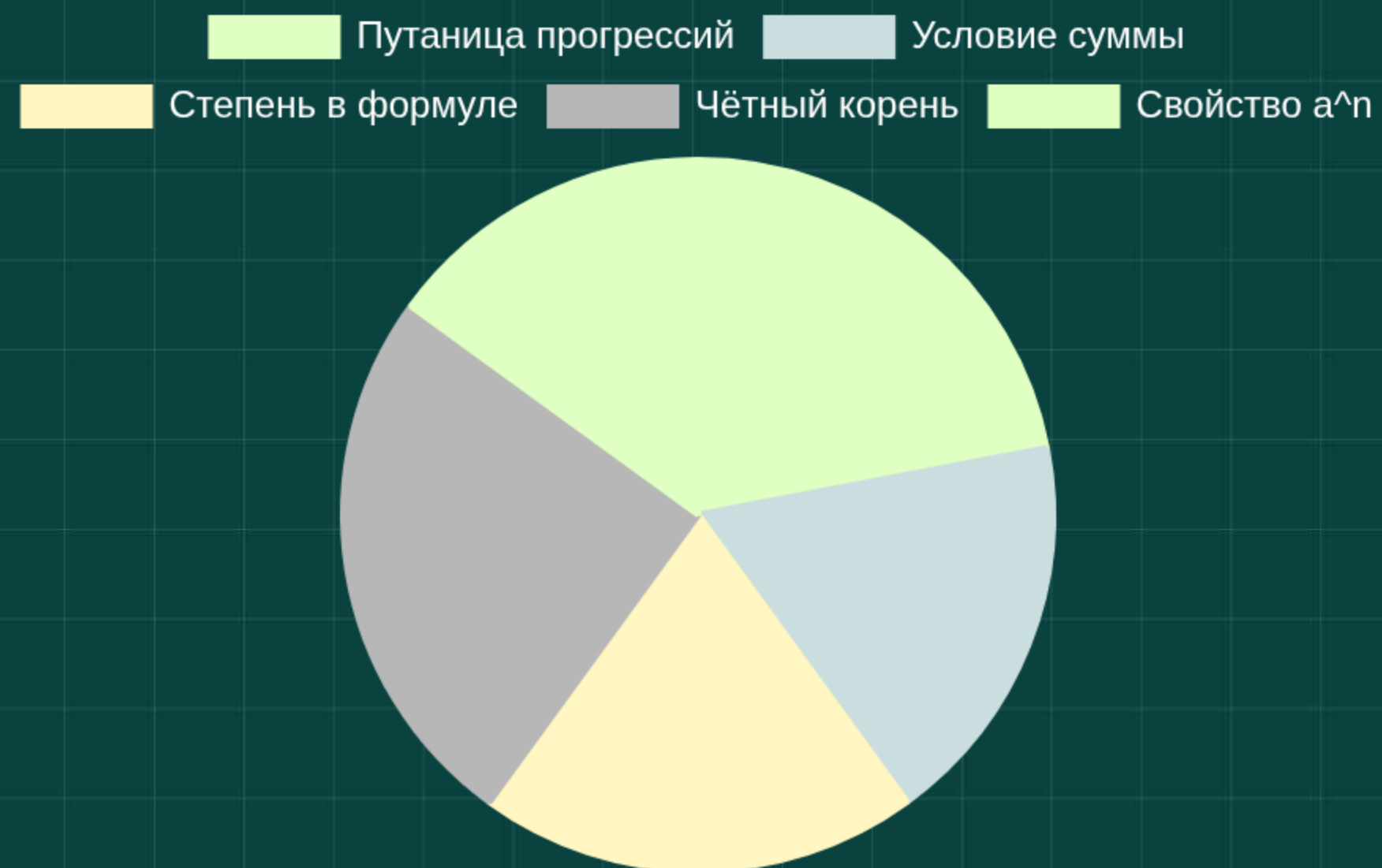


Схема отражает наиболее частые сбои в рассуждениях: от неверного выбора формулы до ошибок со знаком и показателем степени.

Чаще всего трудности связаны с чётным корнем и формулой прогрессии. Значит, при тренировке нужно отдельно отрабатывать знаки, показатели и условия применимости формул.



Иллюстративная схема для учебной презентации по теме; не является результатом статистического исследования.

Практическая ценность темы в школьной алгебре



Проценты и финансы

Геометрическая прогрессия помогает описывать скидки, кредиты и повторяющиеся изменения величин. Она показывает, как одинаковый процентный шаг превращается в последовательность значений.



Формулы и измерения

Арифметический корень нужен при преобразовании выражений, вычислении площадей и объёмов, а также при работе с теоремой Пифагора. Без него многие формулы остаются громоздкими.



Контрольные и экзамены

Обе темы регулярно встречаются в самостоятельных, контрольных и заданиях формата ОГЭ. Их знание особенно важно для задач базового и повышенного уровня сложности.



Переход к новым темам

Освоение прогрессии и корня облегчает изучение степенной функции, иррациональных выражений и преобразований алгебраических дробей. Эти темы строятся на тех же идеях.



Алгебра в двух ключах

Убывающая геометрическая прогрессия и арифметический корень показывают две стороны одной идеи: повторение может привести к конечному результату, а степень — обратиться в точный корень. Эти инструменты особенно важны для старшей школы.