

# Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ : тема урока и основные идеи

Тригонометрия: уравнение  $\operatorname{tg} x = a$  и его общее решение



# Почему это уравнение важно в школьной тригонометрии

Уравнение  $\operatorname{tg} x = a$  соединяет формулу, график и периодичность функции. Оно помогает уверенно решать тригонометрические задания, видеть связь между алгеброй и геометрией и готовиться к экзаменационным задачам ЕГЭ без лишних догадок.

# Определение тангенса и область его определения

## 01 Формула тангенса

Тангенс угла  $x$  определяют как отношение  $\sin x$  к  $\cos x$ . Это определение сразу показывает, что значение функции зависит от существования знаменателя и его отличия от нуля.

## 02 Где функция не определена

Точки  $x = \pi/2 + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , исключаются из области определения, потому что в них  $\cos x = 0$ . Именно там у графика возникают вертикальные асимптоты.

## 03 Поведение на промежутках

На каждом промежутке между асимптотами функция  $\operatorname{tg} x$  непрерывна и строго возрастает. Поэтому на таком участке уравнение  $\operatorname{tg} x = a$  имеет не более одного решения.

## 04 Почему это удобно

Строгое возрастание и разрыв по асимптотам делают тангенс удобным для аналитического решения. Достаточно найти одно значение угла и затем учесть периодичность.



# График $y = \operatorname{tg} x$ и смысл уравнения $\operatorname{tg} x = a$

## Ветви графика

График  $y = \operatorname{tg} x$  состоит из отдельных ветвей, расположенных между вертикальными асимптотами. Каждая ветвь повторяет общую форму и смещается по оси  $x$  на  $\pi$ .

## Повторяемость решений

После перехода к следующей ветви точка пересечения возникает снова, но уже на расстоянии  $\pi$  от предыдущей. Так формируется бесконечная последовательность корней.

## Роль прямой $y = a$

Горизонтальная прямая  $y = a$  пересекает каждую ветвь ровно один раз. Поэтому на каждом промежутке длины  $\pi$  появляется ровно одно решение уравнения.

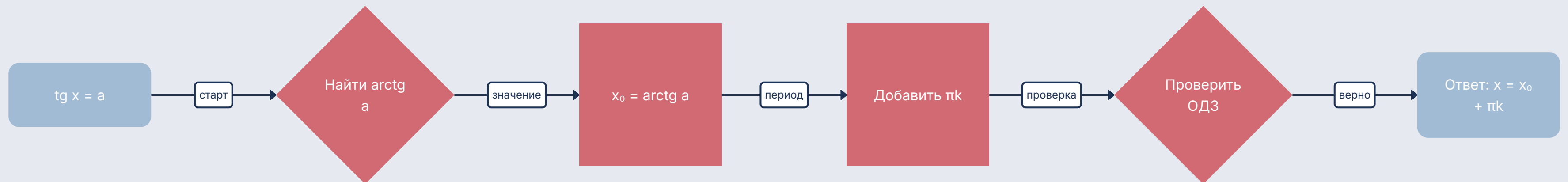
## Что видно на рисунке

На схеме полезно отметить оси координат, асимптоты, уровень  $a$  и точку пересечения. Такая иллюстрация помогает связать формулу с поведением графика.



# Алгоритм решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$

Последовательность действий: от распознавания вида уравнения до записи общего ответа



# Общее решение уравнения

## 1 Любое действительное $a$

Если  $a$  — любое действительное число, уравнение  $\operatorname{tg} x = a$  имеет бесконечно много решений. Ограничений на сам параметр  $a$  здесь нет, что отличает это уравнение от некоторых других тригонометрических случаев.

## 2 Главная формула

Первое решение находят через арктангенс:  $x_0 = \operatorname{arctg} a$ . Затем записывают общий ответ:  $x = \operatorname{arctg} a + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Эта запись охватывает все корни.

## 3 Одна точка на промежутке

На каждом промежутке длины  $\pi$  функция  $\operatorname{tg} x$  строго возрастает, поэтому график пересекает прямую  $y = a$  ровно один раз. Это гарантирует единственность решения внутри каждого такого участка.

## 4 Роль параметра $k$

Параметр  $k$  перечисляет все повторяющиеся решения, получающиеся при сдвиге на  $\pi$ . Именно он превращает одно найденное значение в бесконечную последовательность ответов.



# Частные случаи: $a = 0$ , $a > 0$ , $a < 0$



## Если $a = 0$

При  $a = 0$  получаем  $\operatorname{tg} x = 0$ , поэтому решения имеют вид  $x = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Это соответствует точкам пересечения графика с осью  $x$ .



## Если $a > 0$

При положительном  $a$  главное значение  $\operatorname{arctg} a$  лежит в интервале  $(0; \pi/2)$ . Угол находится в I четверти, а общий ответ всё равно записывается с шагом  $\pi$ .



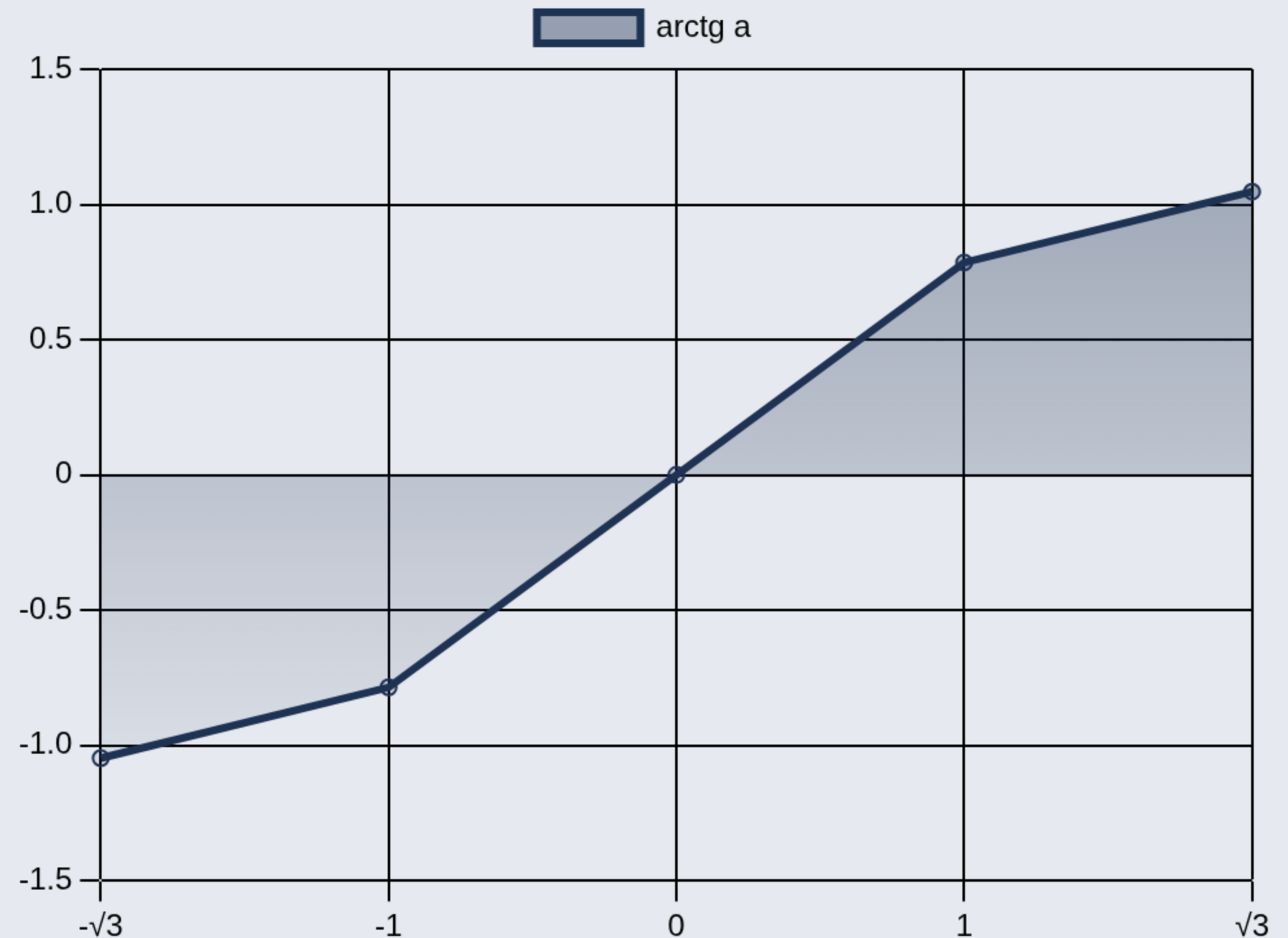
## Если $a < 0$

При отрицательном  $a$  значение  $\operatorname{arctg} a$  находится в интервале  $(-\pi/2; 0)$ . Оно задаёт угол ниже оси  $Ox$ , но формула общего решения не меняется.

## Как меняется главное значение $\operatorname{arctg} a$

Пять опорных значений удобно запоминать как симметричную последовательность вокруг нуля.

Чем больше  $a$ , тем больше  $\operatorname{arctg} a$ ; зависимость монотонна и сохраняет симметрию относительно начала координат.



Табличные значения арктангенса из школьного курса тригонометрии

# Табличные значения тангенса, которые нужно знать

01

## Углы без вычислений

Для быстрых ответов важно помнить значения тангенса для  $0$ ,  $\pi/6$ ,  $\pi/4$  и  $\pi/3$ . Эти углы часто встречаются в задачах и позволяют сразу узнать главное значение.

02

## Связанные пары

Соответствующие значения равны  $0$ ,  $1/\sqrt{3}$ ,  $1$  и  $\sqrt{3}$ . Если число  $a$  совпадает с одной из этих величин, решение можно записать без дополнительных преобразований.

03

## Когда таблицы недостаточно

Если  $a$  не относится к стандартным значениям, ответ оставляют в общем виде:  $x = \operatorname{arctg} a + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Это универсальная запись для любого случая.



# Типовые уравнения $\operatorname{tg} x = a$ и их ответы

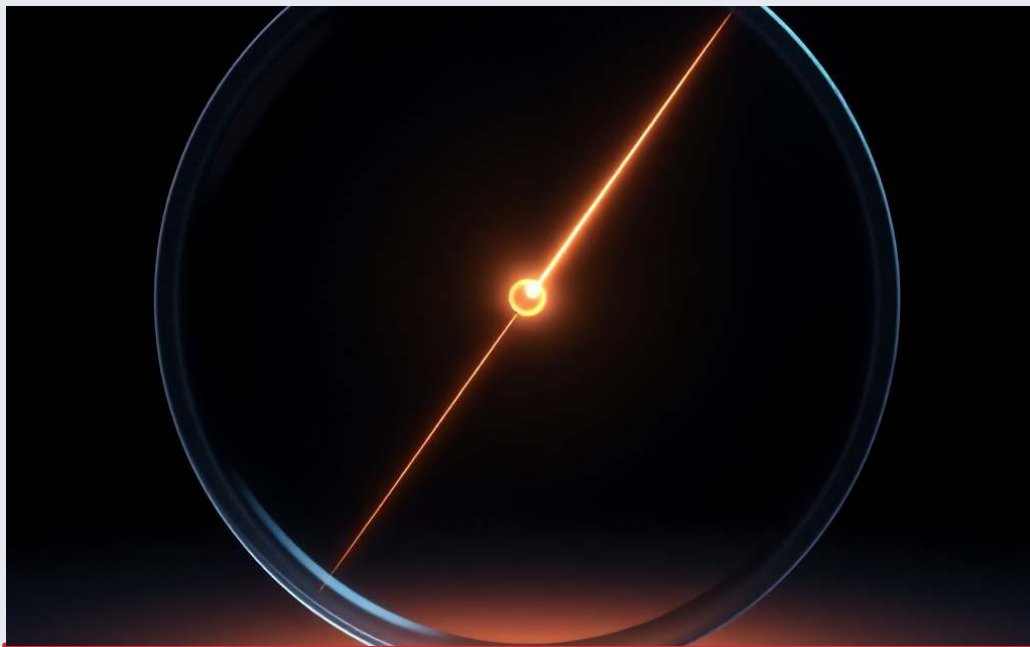
Сводная таблица для самых частых стандартных значений и соответствующих решений.

Стандартные уравнения решаются мгновенно: нужно распознать табличное значение и добавить период  $\pi$ . Это основной приём для типовых задач.

| Уравнение                  | $\operatorname{arctg} a$ | Ответ                | Положение   |
|----------------------------|--------------------------|----------------------|-------------|
| $\operatorname{tg} x = 0$  | 0                        | $x = \pi k$          | ось Oх      |
| $\operatorname{tg} x = 1$  | $\pi/4$                  | $x = \pi/4 + \pi k$  | I четверть  |
| $\operatorname{tg} x = -1$ | $-\pi/4$                 | $x = -\pi/4 + \pi k$ | IV четверть |

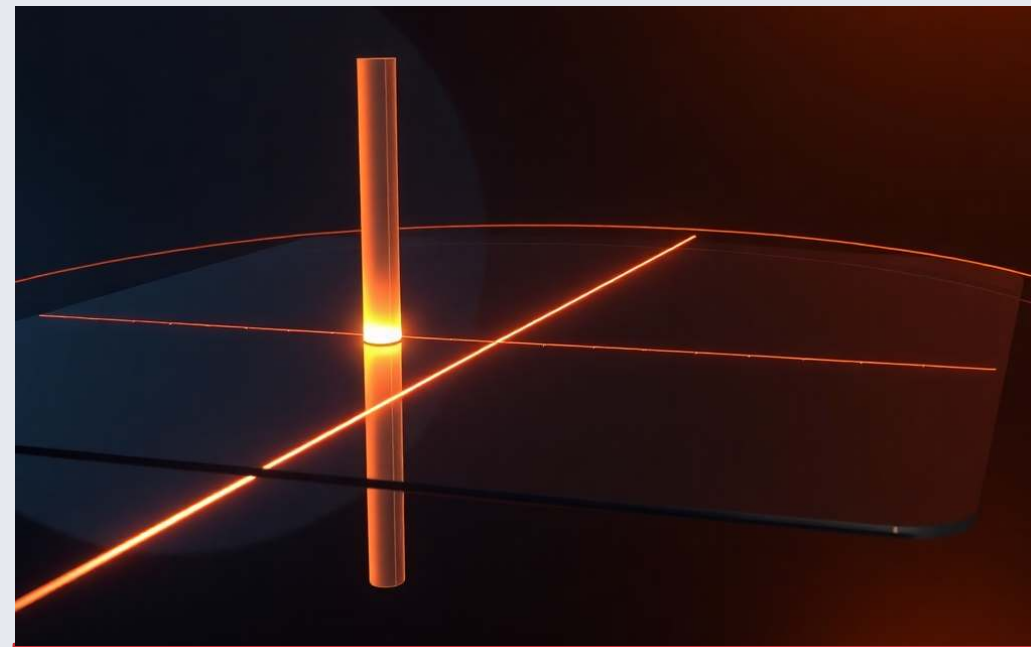
Табличные значения тангенса и арктангенса из школьного курса алгебры

# Геометрический смысл тангенса на единичной окружности



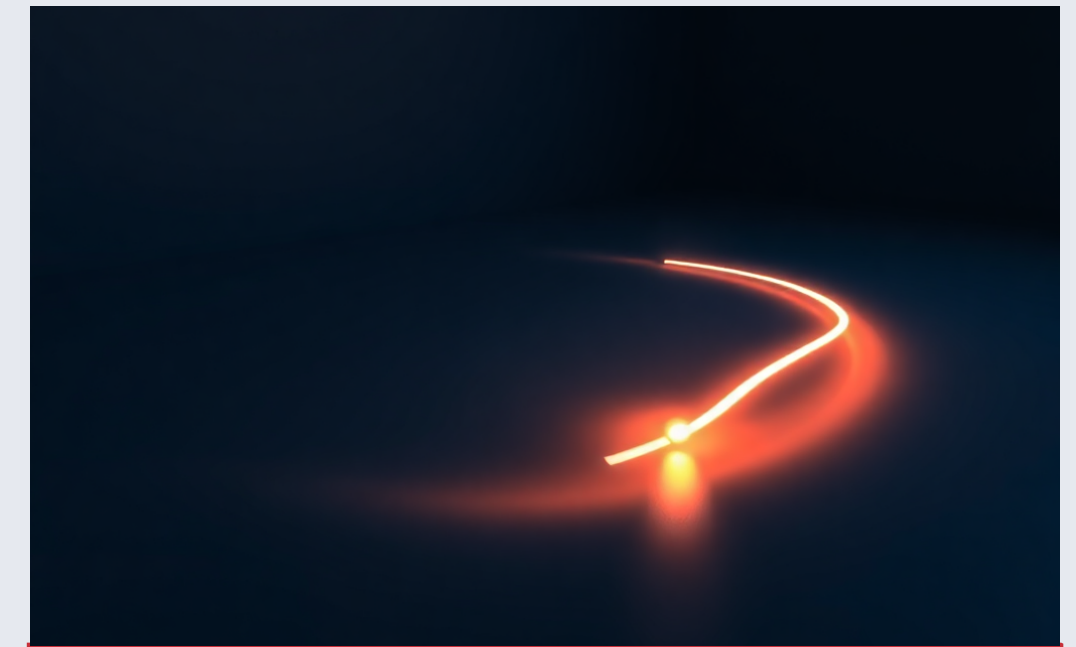
## Луч задаёт значение

Угол на окружности можно представить как луч, выходящий из начала координат и проходящий через точку на единичной окружности. Координаты этой точки позволяют увидеть, как связаны синус и косинус, а их отношение сразу даёт значение тангенса.



## Проекция и отношение

Если у точки на окружности абсцисса не равна нулю, то тангенс выражается как  $y/x$ . На рисунке удобно показать две проекции точки на оси: вертикальная координата отвечает за числитель, горизонтальная — за знаменатель.



## Поворот на $\pi$

После поворота луча на  $\pi$  радиан мы попадаем в противоположную точку окружности, но отношение  $y/x$  не меняется. Поэтому все решения уравнения  $\operatorname{tg} x = a$  повторяются через  $\pi k$  и образуют бесконечную цепочку.

# Почему решений бесконечно много

## Период функции

График тангенса повторяется через  $\pi$ , поэтому одно и то же значение возникает снова после каждого такого сдвига.

## Все повторения

К найденному углу прибавляют  $\pi k$ , и получаются все остальные решения без пропусков.

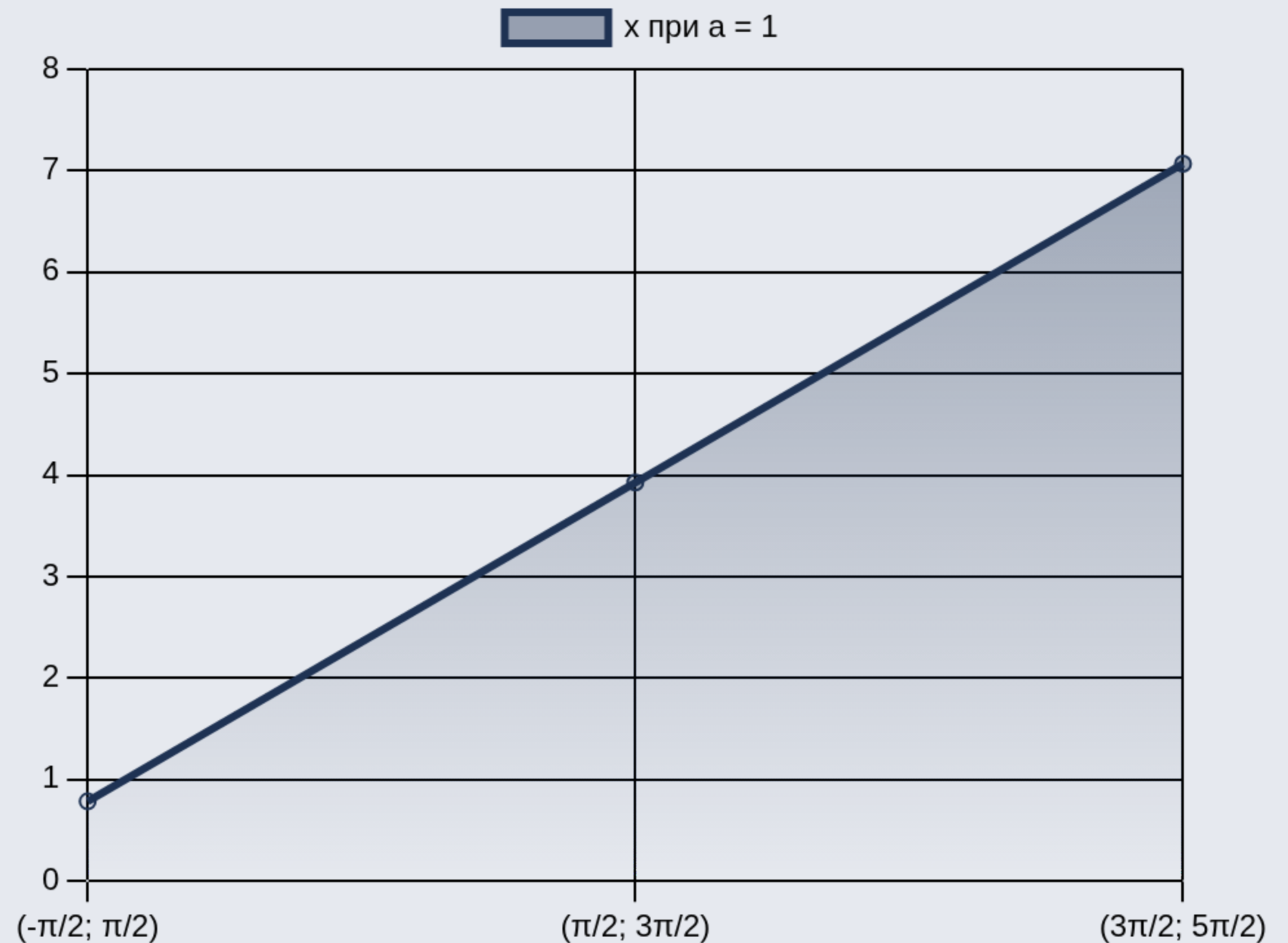
## Первое решение

Для любого действительного  $a$  находится главное значение  $\arctg a$ , которое задаёт одну точку пересечения с графиком.

## Решения на соседних промежутках длины $\pi$

Для примера взято уравнение  $\operatorname{tg} x = 1$ : на каждом соседнем промежутке появляется один корень, а его значение каждый раз сдвигается на  $\pi$ .

Линия подтверждает равномерный шаг между решениями: одно и то же уравнение даёт последовательность корней, отличающихся на  $\pi$ .



Математический вывод по формуле  $x = \operatorname{arctg} a + \pi k$ ; пример для  $a = 1$

# Типичные ошибки при решении уравнения

## Нет общего решения

Часто записывают только главное значение арктангенса и забывают добавить параметр  $\pi k$ . Тогда ответ оказывается неполным, хотя именно периодичность тангенса порождает все остальные корни.

## Игнорирование области определения

Нельзя забывать о точках  $x = \pi/2 + \pi k$ , где тангенс не определён. Если найденное значение совпадает с одной из них, его нужно исключить из ответа.

## Отсутствие проверки

Даже верно записанный ответ стоит подставить в исходное уравнение. Такая проверка быстро выявляет лишние или пропущенные корни и помогает избежать формальных неточностей.

## Неверный аргумент

Иногда число  $a$  подставляют не в тангенс, а в арктангенс, из-за чего путают исходное уравнение и результат. Нужно сначала найти угол, а затем записать все его повторения.

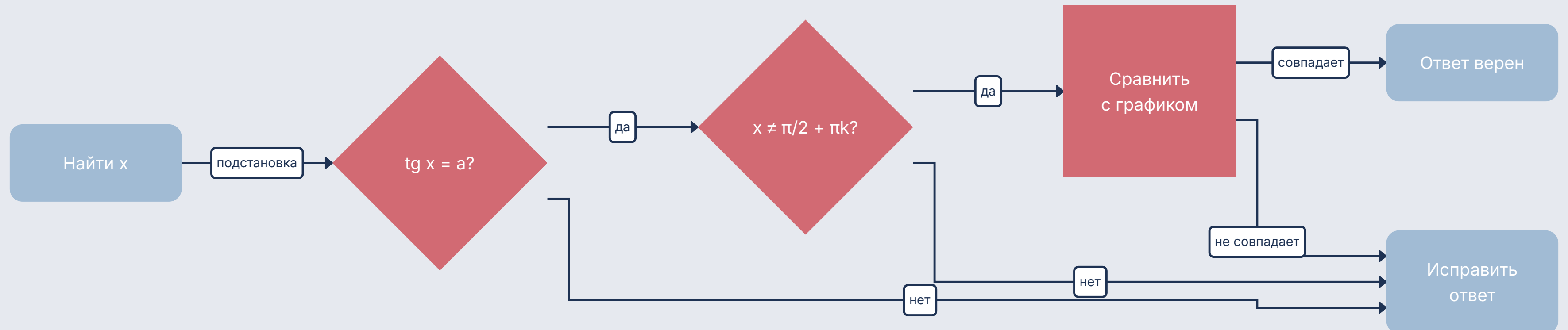
## Сбои со знаком

Ошибки возникают при определении четверти, особенно для отрицательных значений. Полезно сверяться с таблицей знаков и помнить, что  $\arctg a$  лежит между  $-\pi/2$  и  $\pi/2$ .



# Проверка найденного решения

Последовательность действий при подстановке ответа в уравнение  $\operatorname{tg} x = a$



# Примеры решения с табличными значениями

**1**  $\text{tg } x = 1$

Для значения 1 удобно вспомнить угол  $\pi/4$ , потому что  $\text{tg}(\pi/4) = 1$ . Поэтому общее решение записывается как  $x = \pi/4 + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , без дополнительных преобразований.

**2**

$\text{tg } x = -\sqrt{3}$

Числу  $-\sqrt{3}$  соответствует угол  $-\pi/3$ , так как  $\text{tg}(-\pi/3) = -\sqrt{3}$ . После этого сразу получаем весь набор решений:  $x = -\pi/3 + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**3**  $\text{tg } x = 1/\sqrt{3}$

Значение  $1/\sqrt{3}$  связано с углом  $\pi/6$ . Отсюда ответ имеет вид  $x = \pi/6 + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , а повторение через  $\pi$  подтверждает правильность общего решения.



# Главные формулы и свойства темы

| Свойство     | Запись                                  |
|--------------|-----------------------------------------|
| Определение  | $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$ |
| Область      | $x \neq \pi/2 + \pi k$                  |
| Решение      | $x = \operatorname{arctg} a + \pi k$    |
| Параметр $a$ | любое $a \in \mathbb{R}$                |

Краткая таблица объединяет определение, область допустимых значений и общую формулу решения уравнения  $\operatorname{tg} x = a$ .

Все ключевые сведения сводятся к одной схеме: тангенс определён не всегда, но само уравнение решается для любого действительного  $a$ .

# Уравнения, сводящиеся к $\operatorname{tg} x = a$

## После преобразований

Сначала исходное уравнение приводят к более простому виду, где тангенс остаётся в одной части записи. Это позволяет выделить стандартную форму  $\operatorname{tg}(f(x)) = a$ .

## Решаем внутреннюю функцию

Далее находят значения аргумента:  $f(x) = \operatorname{arctg} a + \pi k$ . Именно здесь появляется общий принцип для всех подобных задач, независимо от исходного вида уравнения.

## Проверяем ограничения

После преобразований обязательно учитывают знаменатели, корни и допустимые значения аргумента. Иначе в ответ могут попасть лишние решения, не подходящие к исходной записи.

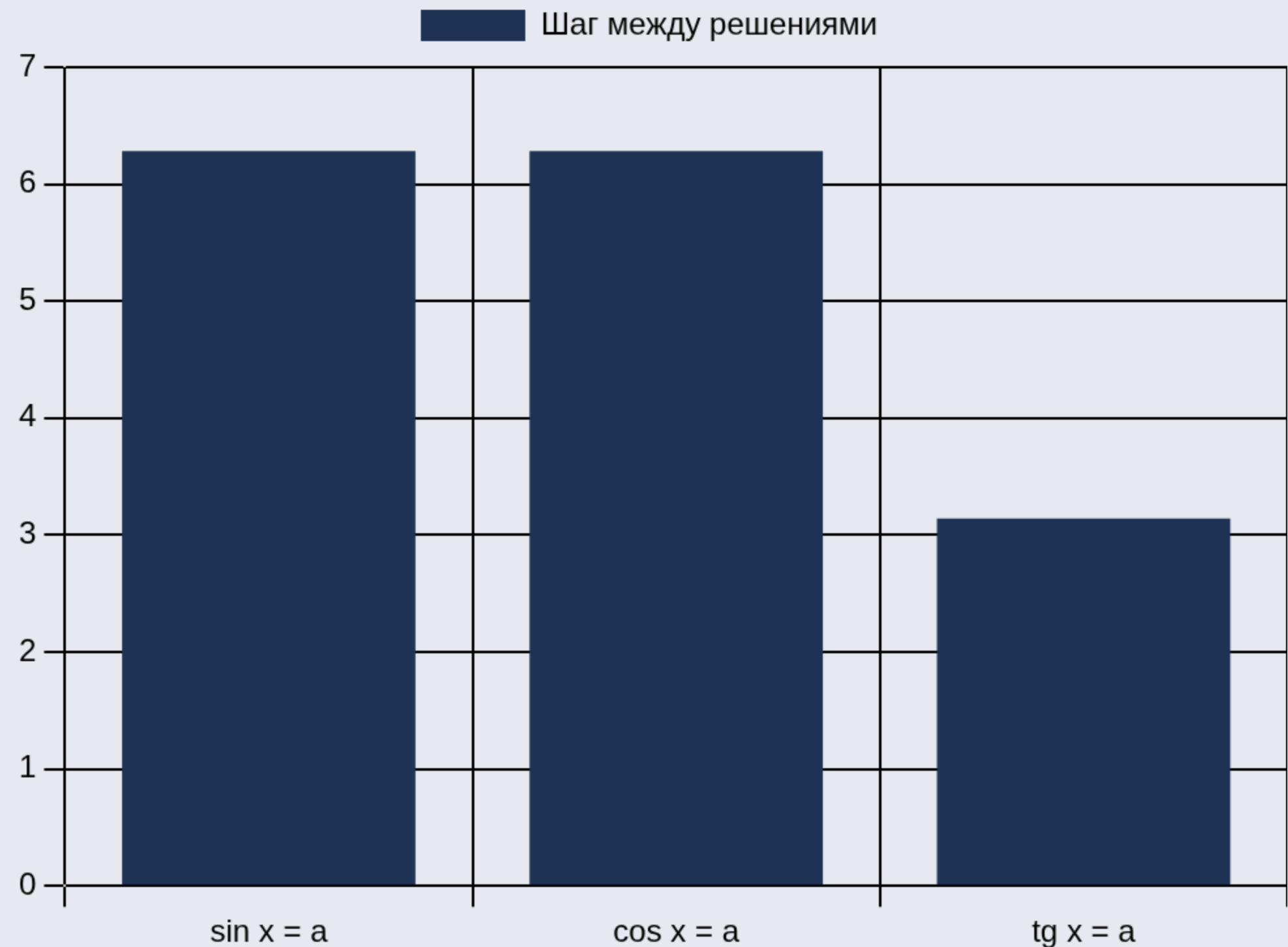
## Финальная подстановка

Завершающий шаг — подставить найденные значения обратно в исходное уравнение. Это особенно важно в более сложных заданиях, где преобразования могли изменить область допустимых значений.

## Сравнение уравнений $\sin x = a$ , $\cos x = a$ и $\operatorname{tg} x = a$

На диаграмме сравнивается не само значение корня, а шаг повторения решений. Для тангенса он вдвое меньше, чем для синуса и косинуса.

Тангенс даёт более компактную запись ответов: период повторения корней равен  $\pi$ , тогда как у синуса и косинуса он связан с  $2\pi$ .



Свойства тригонометрических функций из школьного курса

# Итог: формула, которая решает всю тему

Уравнение  $\operatorname{tg} x = a$  решается для любого действительного  $a$  и сводится к одной формуле:  $x = \operatorname{arctg} a + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Достаточно помнить область определения, период и проверку ответа.