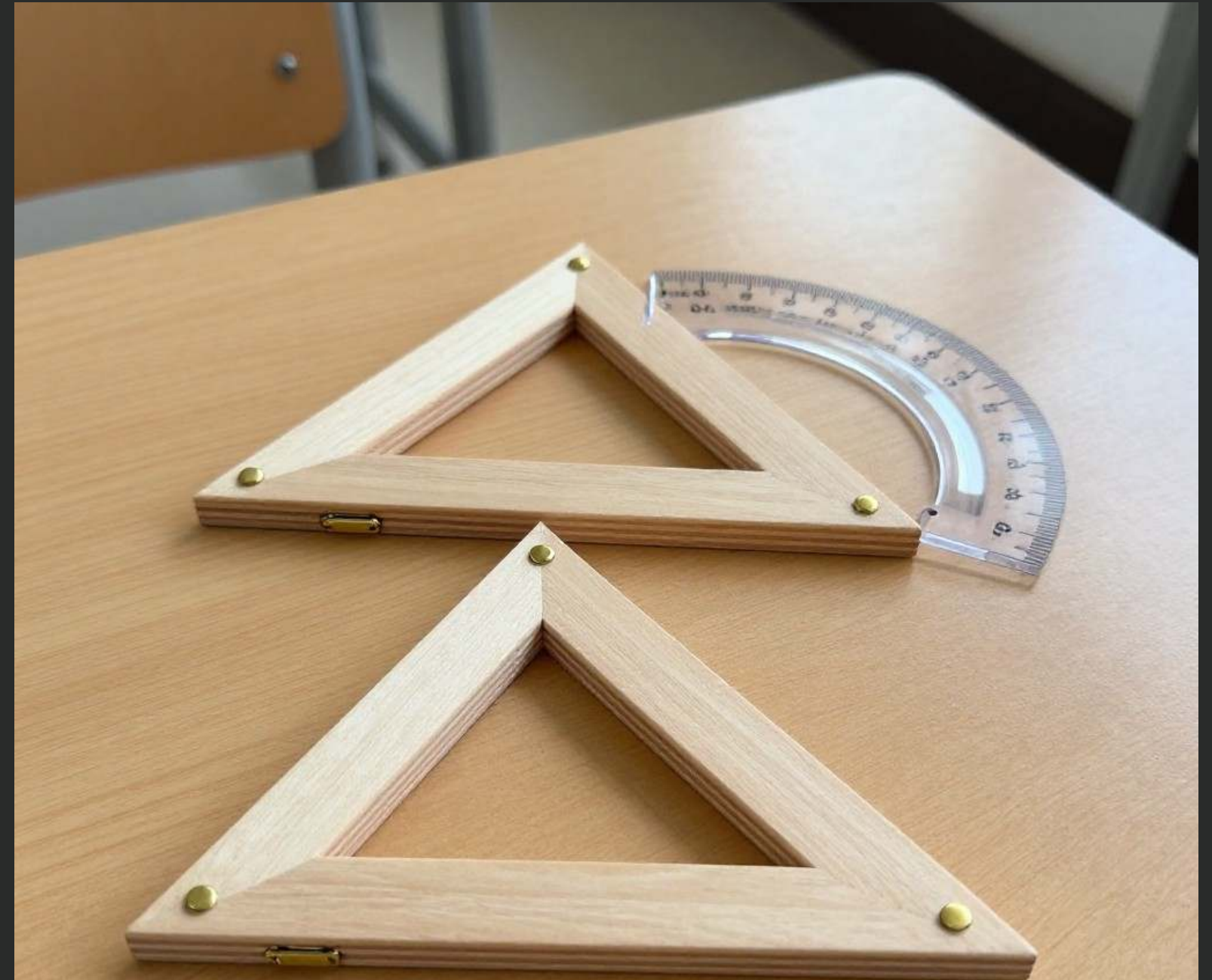


Решение треугольников: зачем нужна теорема косинусов

Как найти все стороны и углы любого треугольника?

Когда помогает теорема косинусов

Она нужна, когда известны две стороны и угол между ними, либо все три стороны. По ней находят неизвестные элементы, проверяют форму треугольника и решают геометрические задачи точнее.



Что означает решение треугольника

Полные данные

Решить треугольник — значит определить все его стороны и все углы. После этого фигура становится полностью известной, а не только частично заданной по условию задачи.

1

Сумма углов

В любом треугольнике сумма внутренних углов равна 180° . Это важное свойство позволяет проверять вычисления и находить третий угол, если два других уже известны.

2

Достаточно трёх элементов

Если известны три элемента треугольника, и среди них есть хотя бы одна сторона, часто можно восстановить всю фигуру. Именно для этого и нужны специальные формулы.

3

Обозначения сторон и углов



Углы

Противолежащие сторонам углы обозначают A , B и C . Угол A лежит между сторонами b и c , поэтому формулу можно записать для любой вершины одинаково.



Стороны

Стороны треугольника обычно обозначают буквами a , b и c . Такие обозначения удобны для записей формул и помогают не путать длины разных отрезков.



Связь обозначений

Если поменять местами сторону и угол, формула не меняется по смыслу. Это делает теорему косинусов универсальным инструментом для любых треугольников.

3

равносильных записи формулы
позволяют находить любую сторону
треугольника

Одна и та же идея записывается
для каждой стороны отдельно,
поэтому формула удобна
в вычислениях и не зависит
от выбранной вершины.

Геометрический смысл формулы

Две стороны и угол

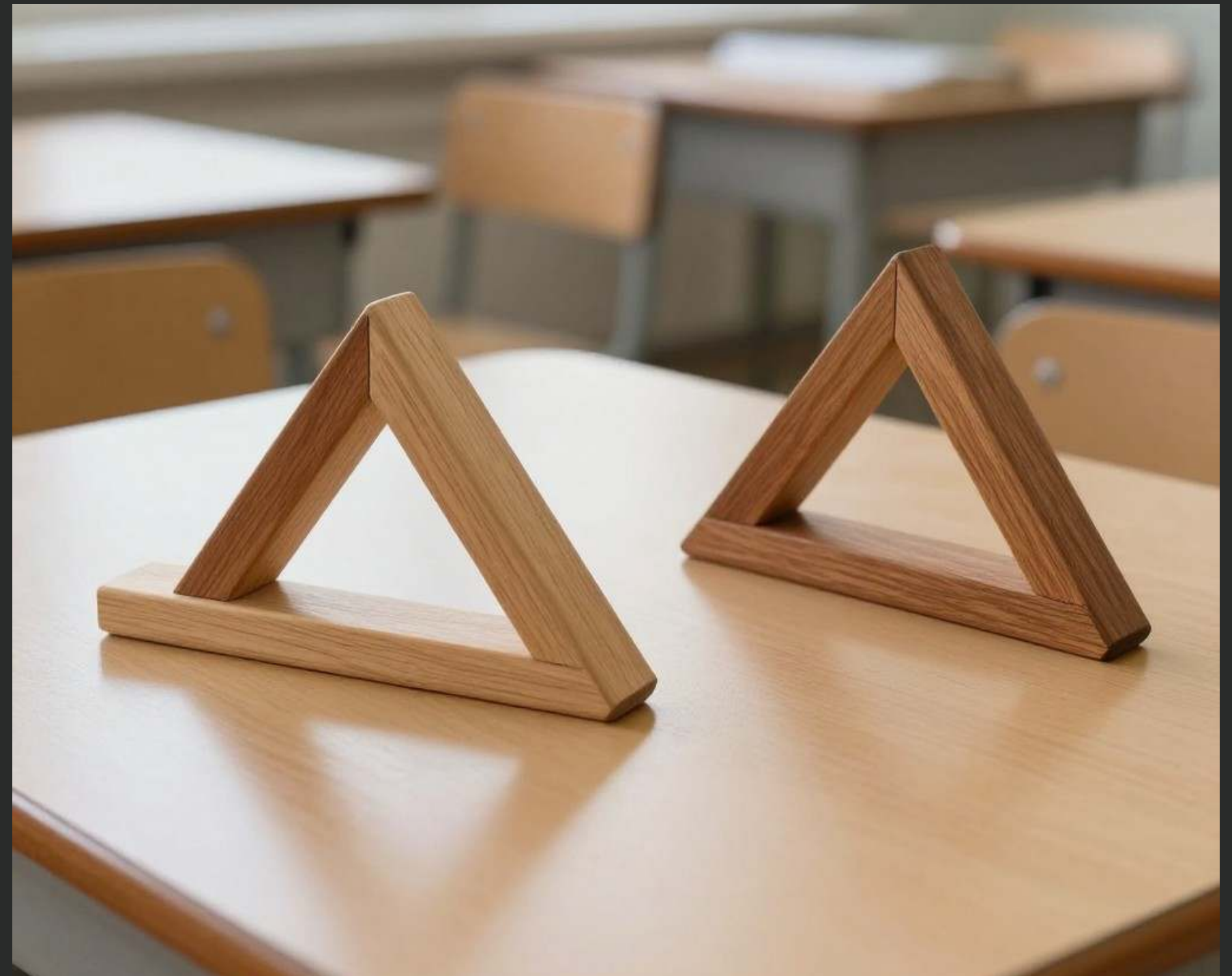
Формула показывает, что на длину третьей стороны влияет не только размер двух известных сторон, но и угол между ними. Чем он больше, тем сильнее меняется результат.

Связь с формой

При одинаковых сторонах треугольник становится более «раскрытым», если угол между ними увеличивается. Поэтому противоположная сторона тоже возрастает и меняет вид всей фигуры.

Почему это важно

Такой смысл помогает понимать геометрию не как набор букв, а как зависимость между элементами фигуры. Это делает вычисления более наглядными и осознанными.



Как изменяется сторона при разном угле

При равных сторонах рост угла между ними заметно увеличивает противоположную сторону. Это удобно видеть именно на сравнении нескольких значений.

Чем больше угол A , тем длиннее сторона a ; зависимость нелинейная и особенно заметна при больших углах.

Вычисления по формуле теоремы косинусов при $b = 7, c = 7$

Связь с теоремой Пифагора

Произвольный треугольник

Теорема косинусов работает для треугольников любого вида и помогает находить сторону по двум сторонам и углу между ними.

Прямой угол

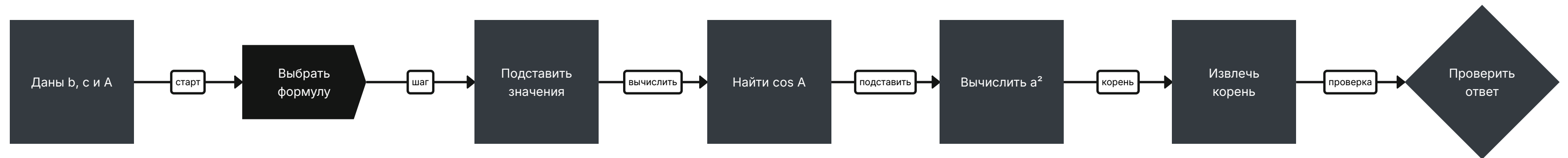
Если угол A равен 90° , то $\cos A$ становится равным 0, и в формуле исчезает последний член.

Теорема Пифагора

После упрощения получается $a^2 = b^2 + c^2$. Значит, теорема Пифагора — это частный случай более общей формулы.

Как найти сторону по двум сторонам и углу

Последовательность вычислений по теореме косинусов



Примеры вычисления третьей стороны

Дано	$\cos A$	a^2	a
5, 8, 60°	0,5	49	7
6, 10, 90°	0	136	11,66
7, 9, 120°	-0,5	193	13,89

Вычисления по формуле теоремы косинусов

В таблице показано, как по двум сторонам и углу находят третью сторону треугольника.

При одинаковых сторонах увеличение угла между ними ведёт к росту противоположной стороны.

Как найти угол по трем сторонам

01

Записать формулу

Если известны три стороны, сначала выбирают нужную версию теоремы косинусов. Для угла A выражают косинус через стороны и получают формулу, удобную для дальнейших вычислений.

02

Вычислить косинус

После подстановки чисел находят значение дроби и получают $\cos A$. На этом этапе важно аккуратно возводить стороны в квадрат и не перепутать порядок вычитания.

03

Найти сам угол

Затем по таблице косинусов или калькулятору определяют величину угла A . Если результат получился больше 0° и меньше 180° , его можно использовать для описания треугольника.

Когда треугольник построить нельзя

Проверка сторон

Для любого треугольника сумма двух сторон должна быть больше третьей. Это правило нужно проверять до вычислений, иначе можно получить ответ для фигуры, которая не существует.

Допустимый пример

Набор 3, 4, 5 подходит: каждая пара сторон в сумме больше третьей. Такой треугольник можно построить, а его форма будет определяться выбранными длинами.

Недопустимый пример

Набор 2, 3, 6 не подходит, потому что $2 + 3$ меньше 6. В этом случае отрезки не смогут замкнуться в треугольник, даже если вычисления продолжаются.



Какие формулы используются в теме решения треугольников

Диаграмма показывает, какие формулы чаще всего нужны при разных условиях задачи. Выбор зависит от того, какие элементы треугольника уже известны.

Теорема косинусов нужна прежде всего тогда, когда прямого угла нет и известны стороны с углом между ними.

Условные доли для наглядности учебной презентации

Типичные ошибки при вычислениях

Неверный угол

Часто подставляют угол, который не находится между известными сторонами. Тогда формула остаётся верной, но выбранные данные не соответствуют нужной вершине треугольника.

1

Путаница единиц

При вычислении косинуса легко перепутать градусы и радианы. Из-за этого калькулятор выдаёт совсем другое значение, и весь результат становится неверным.

2

Неполный ответ

Иногда в ответе оставляют квадрат стороны, например a^2 , хотя требуется сама длина a . Нужно обязательно извлекать корень и записывать итог в привычных единицах.

3

Отсутствие проверки

Даже правильный расчёт стоит проверить: подходит ли полученная сторона по смыслу задачи и выполняется ли неравенство треугольника. Это помогает заметить случайную ошибку.

4

Проверка ответа на разумность

Пример	Сторона	Сумма	Вывод
5, 8, 60°	7	13	возможен
3, 4, 180°	7	7	невозможен
6, 10, 90°	11,66	16	реалистичен

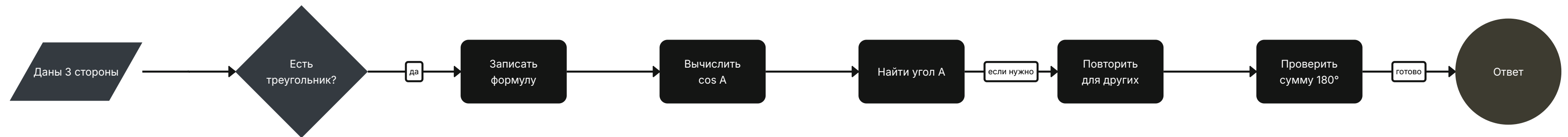
Сравним вычисленный результат с суммой известных сторон и сделаем вывод о возможности треугольника.

Если результат не нарушает неравенство треугольника, ответ выглядит правдоподобно. Если равенство или превышение, треугольник построить нельзя.

Вычисления по формуле теоремы косинусов и проверка неравенства треугольника

Как решать задачу, если известны три стороны

Последовательность действий при нахождении углов по трем данным сторонам



Практическое применение в жизни

Участки и чертежи

Теорема косинусов помогает находить диагонали и другие отрезки на плане участка, когда прямое измерение неудобно. Это особенно полезно при работе с чертежами и схемами.

Карта и местность

На карте можно знать две стороны пути и угол между ними, но не видеть прямую линию между точками. Тогда формула позволяет вычислить нужное расстояние без сложных построений.

Модели и конструкции

При создании макетов и технических моделей часто важно заранее узнать длину детали. Теорема косинусов помогает сделать расчёт точнее и избежать ошибок при сборке.



Где ошибка в вычислениях заметнее всего



Диаграмма показывает не сами ответы, а насколько сильно сбивается результат при разных неточностях. Это помогает понять, что важно проверять в первую очередь.

Сильнее всего влияет выбор неверной функции, затем ошибка в угле. Округление тоже опасно, но обычно даёт меньший сдвиг.

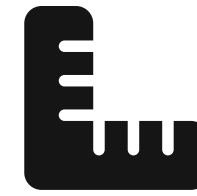
Иллюстративные значения для сравнения влияния ошибок в учебной задаче

Главные выводы по теме



Подходит для любого треугольника

Теорема косинусов работает не только в прямоугольных треугольниках. Она помогает решать задачи с любой формой, если известны нужные стороны и угол или только три стороны.



Находит неизвестную сторону

Если известны две стороны и угол между ними, формула позволяет вычислить третью сторону. Это особенно удобно, когда прямое измерение невозможно или слишком неудобно.



Находит неизвестный угол

Когда даны все три стороны, теорему можно преобразовать и найти угол. Так можно узнать форму треугольника, не измеряя его углы напрямую транспортиром.



Связана с Пифагором

В прямоугольном треугольнике косинус прямого угла равен нулю, и формула превращается в теорему Пифагора. Значит, это более общий и универсальный закон.

Теорема косинусов — универсальный инструмент для решения треугольников

Она связывает стороны и углы в одной формуле, помогает находить неизвестные элементы, проверять существование треугольника и уверенно решать задачи по геометрии в 9 классе.