



Разложение вектора по базису: ключевая идея урока

Любой вектор представляется
через выбранные базисные
векторы; коэффициенты — это
его координаты.



Почему это важно именно в 10 классе

В 10 классе векторный метод помогает описывать отрезки, направления и положения фигур в координатах. Базис задаёт систему отсчёта: относительно неё считаются координаты, а сам вектор остаётся тем же.



Линейная комбинация как основа разложения

Разложение опирается на линейную комбинацию: на плоскости $v=a \cdot e_1+b \cdot e_2$, в пространстве $v=a \cdot e_1+b \cdot e_2+c \cdot e_3$. Числа a, b, c — коэффициенты, определяющие вклад базисных направлений.

Базисные векторы e_1, e_2 (и e_3) задают «набор инструментов», через который мы строим нужный вектор. Чтобы разложение было надёжным, эти векторы должны быть линейно независимыми.

Когда базисные векторы линейно независимы, каждый вектор данного пространства выражается через них единственным образом. Это делает координатный метод точным и пригодным для решения задач.

Базис на плоскости

.01

В $\mathbb{R}^2$ базис составляют два неколлинеарных вектора: они не лежат на одной прямой и тем самым задают две разные «оси направления». Любая комбинация таких векторов может описать любой плоский вектор.

• .02

Самый известный вариант — стандартный базис $i=(1;0)$ и $j=(0;1)$. Он удобен тем, что направления i и j ортогональны и напрямую связаны с привычными координатами на координатной плоскости.

• .03

Если $v=(x;y)$, то $v=x\cdot i+y\cdot j$. Поэтому координаты вектора в стандартном базисе совпадают с парой чисел (x, y) , которую мы обычно используем в задачах.

Базис в пространстве

.01

В R^3 базис составляют три некомпланарных вектора: они не лежат в одной плоскости. Благодаря этому появляется возможность разложить любой пространственный вектор по трём независимым направлениям.

.02

Для стандартного базиса берут i, j, k и записывают любой вектор как $v = x \cdot i + y \cdot j + z \cdot k$. Коэффициенты показывают, как сильно вектор направлен вдоль каждого из трёх базисных направлений.

.03

Набор (x, y, z) — это координаты вектора в выбранном базисе. Меняя базис, мы изменяем именно координатное описание, но не геометрический смысл самого вектора.

Сравнение базиса на плоскости и в пространстве

Сводим различия в одном взгляде: размерность пространства определяет число базисных векторов и вид разложения.

Ключевой вывод: число базисных векторов равно размерности пространства — 2 для R^2 и 3 для R^3 .

Пространство	Число базисных	Условие для базиса	Общий вид разложения
R^2	2	Не коллинеарны	$v=a \cdot e_1+b \cdot e_2$
R^3	3	Не компланарны	$v=a \cdot e_1+b \cdot e_2+c \cdot e_3$
Стандартный базис	2/3	Оси задаются i, j (и k)	Координаты совпадают с $(x, y[, z])$

Определение базиса в школьном курсе векторов

Почему разложение по базису единственно



Единственность разложения — следствие линейной независимости базисных векторов. Если бы существовали два разных набора коэффициентов, это означало бы возможность выразить один базисный вектор через остальные.



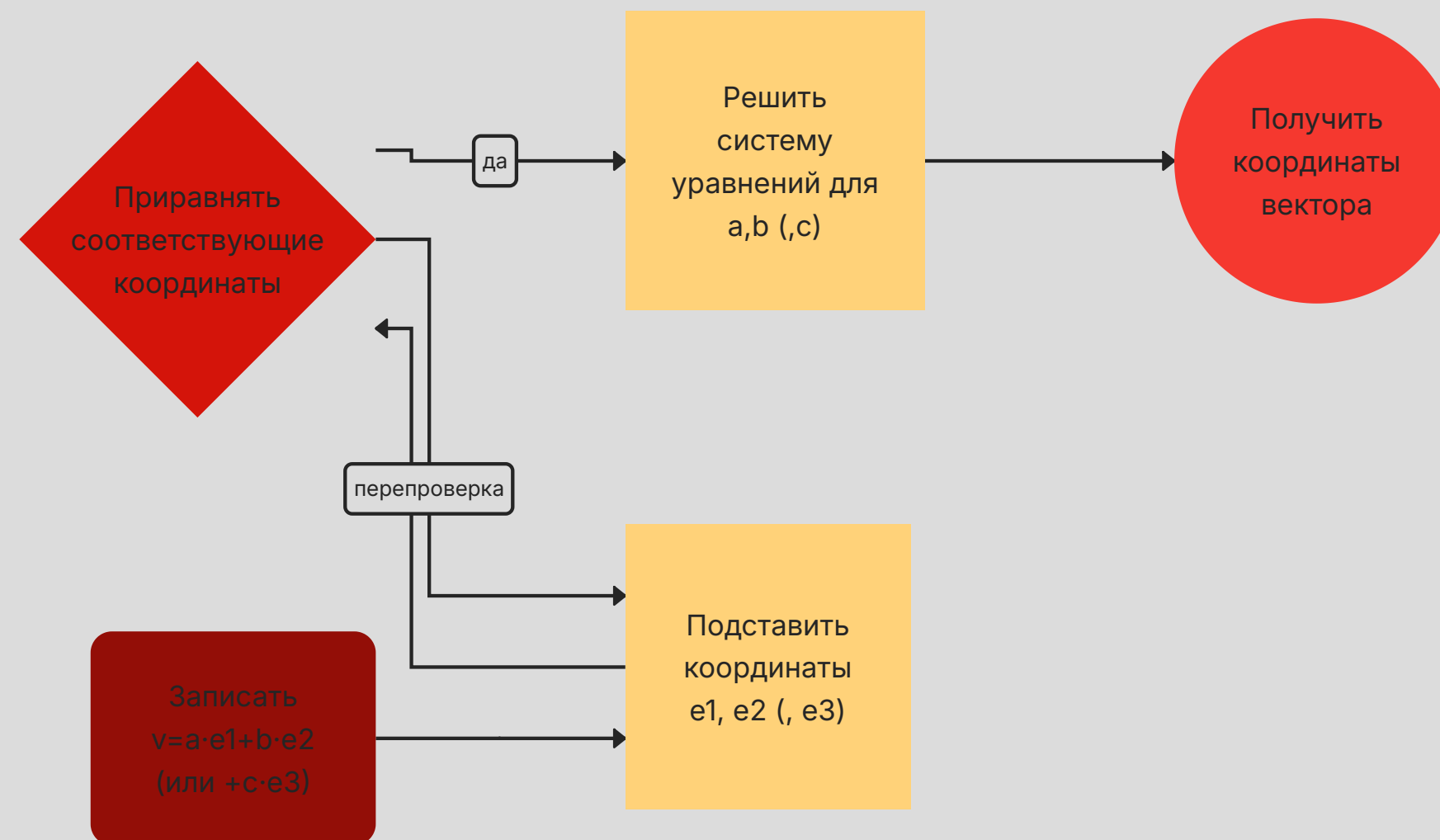
В терминах координат это означает: один и тот же вектор v нельзя представить через один и тот же базис двумя различными линейными комбинациями. Коэффициенты фиксируются однозначно.



Поэтому координаты в базисе — не «произвольные числа», а точное описание вектора. Именно однозначность делает координатный метод удобным для вычислений в задачах.

Как находят координаты вектора в базисе

Алгоритм: составить разложение, сопоставить координаты и решить систему.



Геометрический смысл коэффициентов разложения



Коэффициенты разложения показывают, какую «долю» вектор получает от каждого базисного направления. Положительный коэффициент означает совпадение направления с базисным вектором, а отрицательный — противоположный поворот на тот же угол.



Если мысленно построить две (или три) базисные «составляющие» и сложить их, получится исходный вектор. На схеме полезны две координатные оси, сами базисные векторы и вектор-сумма как итог сложения.

Разложение через систему уравнений

.01

Пусть $e_1=(a;b)$, $e_2=(c;d)$, а $v=(x;y)$. Тогда $v=\alpha \cdot e_1+\beta \cdot e_2$, то есть $(x;y)=(\alpha a+\beta c; \alpha b+\beta d)$. Координаты дают уравнения для α и β .

● **.02**

После подстановки соответствующих координат получаем систему: $\alpha a+\beta c=x$ и $\alpha b+\beta d=y$. Здесь x и y известны из вектора v , а a,b,c,d заданы базисными векторами.

● **.03**

Решение системы определяет значения α и β — это и есть координаты вектора v в выбранном базисе. Проверка результата помогает убедиться, что полученная сумма действительно равна v .

Пример разложения в $\mathbb{R}^2$

Базисные векторы	Заданный вектор	Система уравнений	Ответ
$e_1=(1;1), e_2=(2;-1)$	$v=(5;1)$	$\alpha+2\beta=5; \alpha-\beta=1$	$\alpha=2, \beta=1;$ $v=2e_1+e_2$

Разложение вектора по базису сводят к системе линейных уравнений. Коэффициенты α и β показывают, какие доли дают базисные векторы e_1 и e_2 , чтобы получить заданный вектор v .

Единственный набор коэффициентов α и β обеспечивает нужную сумму: базис «раскладывает» геометрическую задачу на два уравнения.

Типовой школьный пример по теме координат вектора (по условию слайда).

Зачем использовать не только стандартный базис

.01

Стандартный базис удобен почти всегда, но не всегда он «подходит» задаче. Нестандартный базис выбирают так, чтобы его направления отражали стороны фигуры, траекторию движения или симметрии.

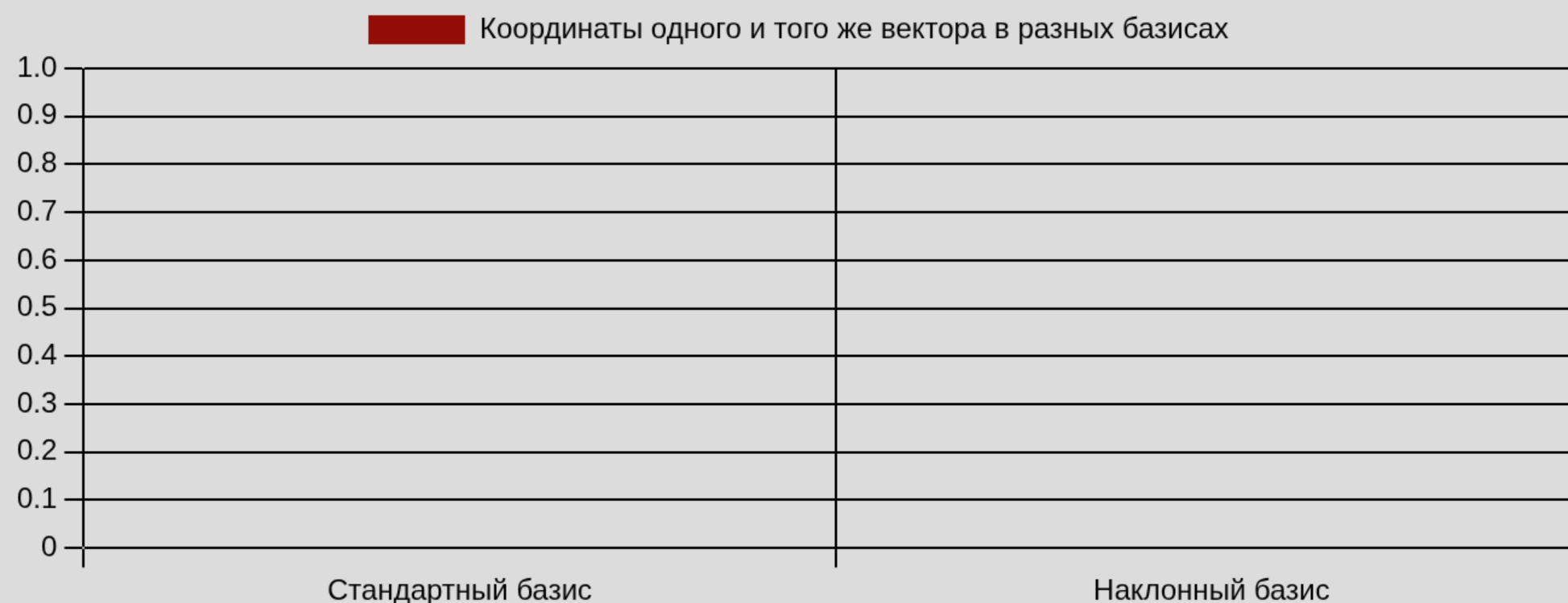
.02

Когда оси базиса идут вдоль ключевых направлений, многие вычисления сокращаются: компоненты вектора автоматически становятся «естественными» и лучше согласуются с тем, что требуется найти в условии.

.03

Численные координаты при этом могут выглядеть непривычно, зато геометрические соотношения сохраняются. Разные записи описывают один и тот же вектор, меняется только система отсчёта.

Один и тот же вектор в разных базисах



Схематическая диаграмма (условия задачи с точными числами не даны, сравнение иллюстративное).

Ключевое отличие между базисами — в том, какие направления принимаются за «оси координат». Поэтому числа координат меняются, хотя длина и направление самого вектора не обязаны изменяться.

Диаграмма помогает увидеть главное: координаты зависят от выбора базиса. Следовательно, при сравнении результатов важно явно указывать, какой базис использован.

Связь разложения вектора с системами уравнений и матрицами



Разложение по базису удобно записывать матрично: столбцами берут координаты базисных векторов, а вектор коэффициентов умножают на эту матрицу, получая координаты исходного вектора.



Тогда коэффициенты разложения находятся как решение системы $Ax=b$. Здесь матрица A собирает «направления» базиса, а вектор b — координаты заданного вектора в выбранной координатной системе.



Если определитель $\det(A)$ отличен от нуля, система имеет единственное решение: базис задаёт однозначные координаты. Если $\det(A)=0$, координаты могут быть не единственными или не определяться.

Типичные ошибки при работе с базисом

.01

Частая ошибка — смешивать координаты вектора с его длиной и с координатами точки. Координаты зависят от базиса и системы отсчёта, а длина — лишь от геометрии самого вектора.

.02

Ещё одна ловушка — брать в качестве базиса коллинеарные векторы на плоскости или компланарные векторы в пространстве. Тогда направления не образуют независимые «оси», и разложение перестаёт быть корректным.

.03

Перед вычислениями полезно проверять линейную независимость базисных векторов. В школьной практике это означает: они должны образовывать базис, а не «повторять» друг друга в разных формах.

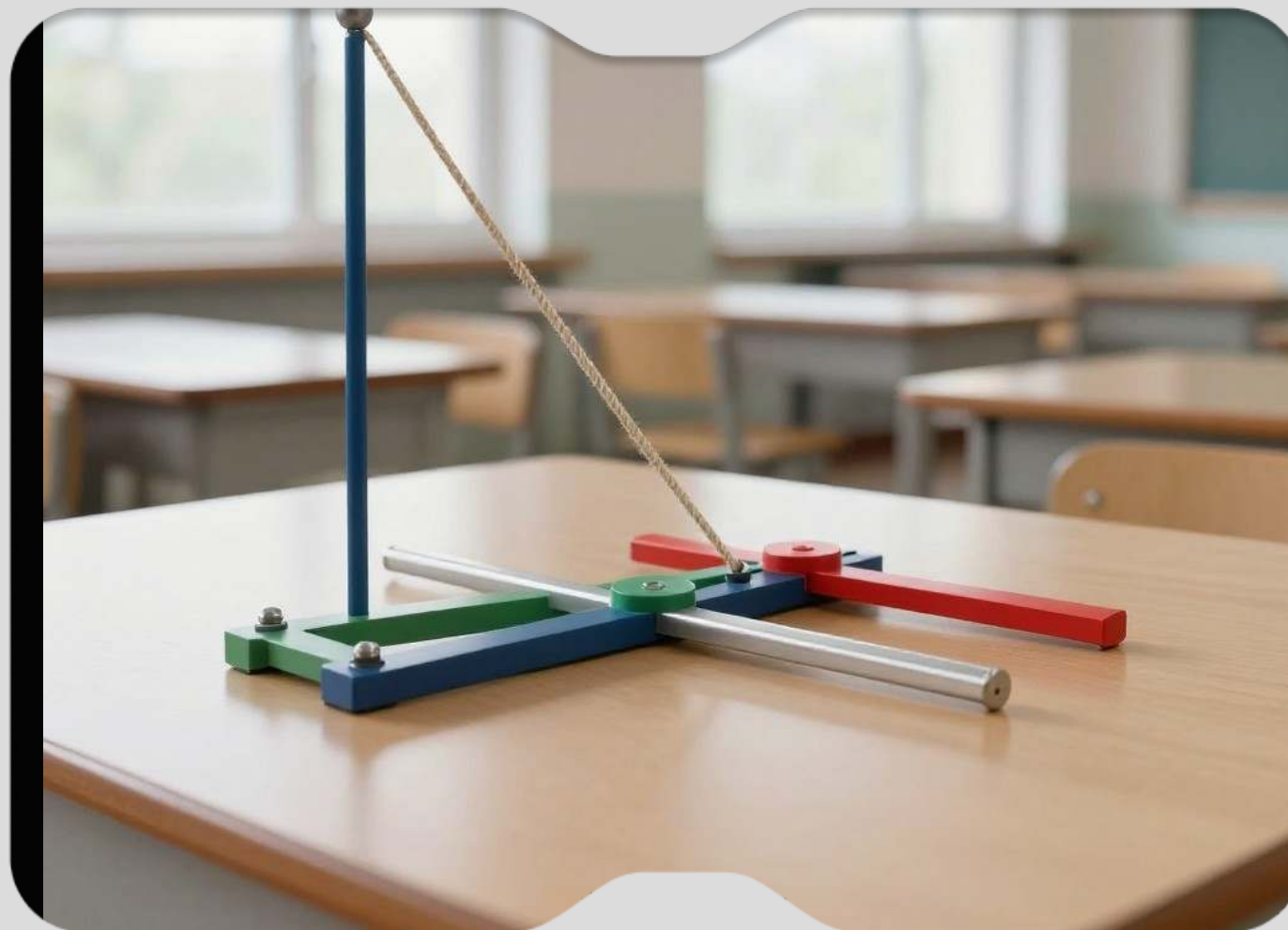
.04

Наконец, важно аккуратно записывать, какие координаты u v вы используете в уравнениях: это координаты вектора, а не точки на плоскости. От этого зависит правая часть системы.

Где используется разложение вектора по базису

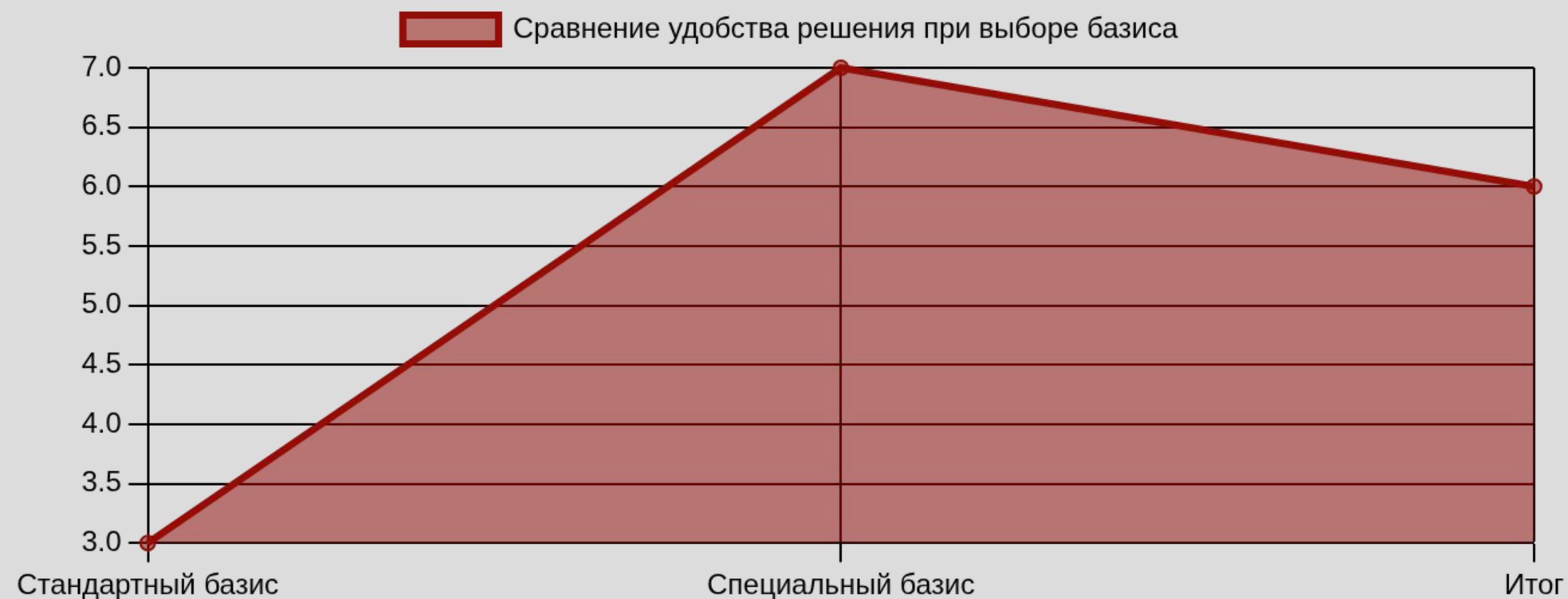


Разложение по базису применяется в аналитической геометрии, физике и информатике. В физике так удобно раскладывать силы и скорости по выбранным направлениям, чтобы легче было анализировать движение и равновесие.



В компьютерной графике разложение помогает описывать перемещения и повороты объектов через компоненты вдоль «удобных» осей. В геометрии — находить связи между направленными отрезками и положением точек в координатах.

Почему выбор базиса влияет на удобство решения задач



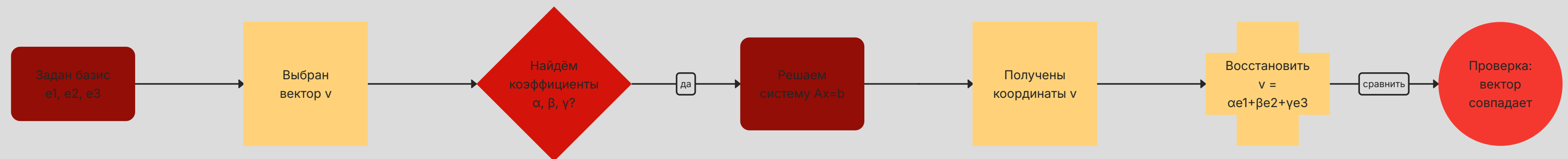
Схематическая иллюстрация (качественное сравнение: численные значения условны, точные данные не приведены).

Когда базис согласован с геометрией задачи, часть компонент становится нулевой или выражается проще. Это уменьшает число шагов и снижает вероятность арифметических ошибок.

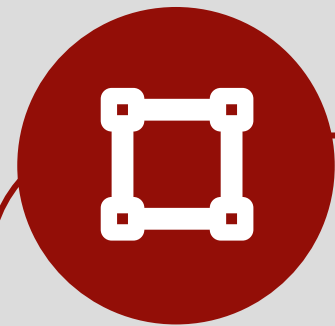
Диаграмма отражает практический смысл: не «математическое право» меняется, а сложность вычислений. Правильный базис делает решение быстрее и визуально понятнее.

От базиса к координатам и обратно

Логическая цепочка: базис $\rightarrow$ коэффициенты $\rightarrow$ координаты $\rightarrow$ восстановление вектора



Практическое значение темы для школьных задач



Решение задач на координаты

Разложение вектора помогает находить недостающие компоненты и связывать геометрию с числами. Поэтому задачи на направления, проекции и уравнения линий решаются увереннее.



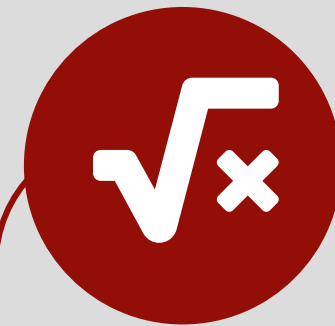
Медианы и середины отрезков

Когда отрезок задан координатно, разложение позволяет быстро получить выражения для середины и проверить равенство отрезков. Это делает выводы более контролируруемыми.



Проверка коллинеарности и направлений

Коллинеарность часто сводится к пропорциональности коэффициентов в разложении. Такой способ экономит время по сравнению с попытками «на глаз» сопоставлять направления.



Переход к системам уравнений

Тема подготавливает к будущим разделам: при поиске коэффициентов неизбежно возникает система уравнений. Значит, разложение становится мостом к матрицам и координатному методу.

Геометрия становится понятной на языке чисел

Разложение по базису переводит геометрический объект в числовую запись: базис задаёт систему координат, коэффициенты разложения становятся координатами вектора, а линейная независимость гарантирует единственность представления. Это основа многих задач.