

Наибольшее и наименьшее значения функции

Максимум и минимум помогают находить лучшие решения.



Что нужно знать перед началом

Чтобы уверенно находить экстремумы, нужно помнить про область определения, производную и концы отрезка.



// Зачем искать максимум и минимум



Выбор выгоды

В экономике экстремумы помогают выбрать самый выгодный вариант: сравнить цену, прибыль или стоимость перевозки и принять решение на основе наилучшего результата.



Оптимальный путь

В движении и маршрутах важно найти минимальное время, расстояние или расход топлива, чтобы построить более быстрый и экономичный путь.



Геометрическая оптимизация

В задачах с участками и фигурами экстремумы позволяют определить наибольшую площадь, периметр или объём при заданных ограничениях.



Измерения и процессы

В природе и технике максимумы и минимумы описывают высоту траектории, температуру, давление и другие величины, которые нужно сравнивать.

// Базовые термины: значение и экстремум

Что такое значение

Значение функции — это число, которое получает переменная y после подстановки конкретного x . Именно его затем сравнивают с другими значениями.

Что такое экстремум

Экстремум показывает точку, где функция локально становится выше или ниже соседних значений. Это свойство важно, но оно не всегда говорит о всей функции сразу.

Точка и значение

Следует различать координату x и само значение $f(x)$: максимумом или минимумом называют именно результат функции, а не только место на оси.

// Локальный максимум

01

Окрестность точки

Сначала выбирают точку x_0 и рассматривают малую окрестность вокруг неё. Если рядом значения функции не превосходят $f(x_0)$, точка ведёт себя как вершина.

02

Только рядом

Локальный максимум — это не обязательно самый высокий пункт на всём графике. Он может быть лишь лучшим среди ближайших значений, а дальше функция может подняться ещё выше.

03

Не путать с глобальным

Поэтому при решении задач важно не ограничиваться одним участком графика. Сначала устанавливают локальный характер точки, а затем проверяют её место среди всех кандидатов.

// Локальный минимум

Идея минимума

Если в некоторой окрестности значения функции не превышают $f(x_0)$, точка x_0 считается локальным минимумом. На графике это выглядит как дно небольшой впадины.

01

Сравнение только рядом

Такой минимум описывает поведение функции только рядом с выбранной точкой. В других частях графика может существовать ещё более низкое значение.

02

Ограниченность вывода

Именно поэтому локальный минимум полезен для анализа формы графика, но не заменяет поиск абсолютного минимума на всём рассматриваемом промежутке.

03

// Локальные и абсолютные экстремумы

01.

Соседние значения

Локальный экстремум сравнивают только с соседними точками, поэтому он характеризует поведение функции в малой окрестности и не требует знания всего графика.

02.

Вся область

Абсолютный максимум и абсолютный минимум определяются на всей области рассмотрения. Для них важна каждая допустимая точка, а не только ближайшие соседние.

03.

Совпадение ролей

Один и тот же пункт графика может быть и локальным, и абсолютным экстремумом, если среди всех допустимых значений он действительно самый высокий или самый низкий.

04.

На отрезке

На отрезке $[a; b]$ такие совпадения встречаются часто, но не гарантированы: локальная вершина может оказаться лишь промежуточным результатом среди других кандидатов.

// Почему на отрезке важны концы



// Непрерывность на отрезке и существование $\max/\min$



Пошаговая проверка

Это позволяет работать по понятному школьному алгоритму: найти все внутренние кандидаты, затем добавить концы отрезка и сравнить полученные значения.



Гарантия существования

Для непрерывной функции на замкнутом отрезке максимум и минимум обязательно существуют и достигаются в конкретных точках, а не только «приближаются» к ним.

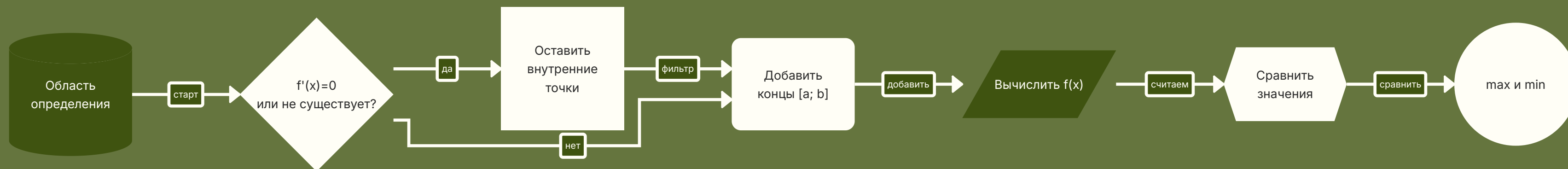


Когда нужна осторожность

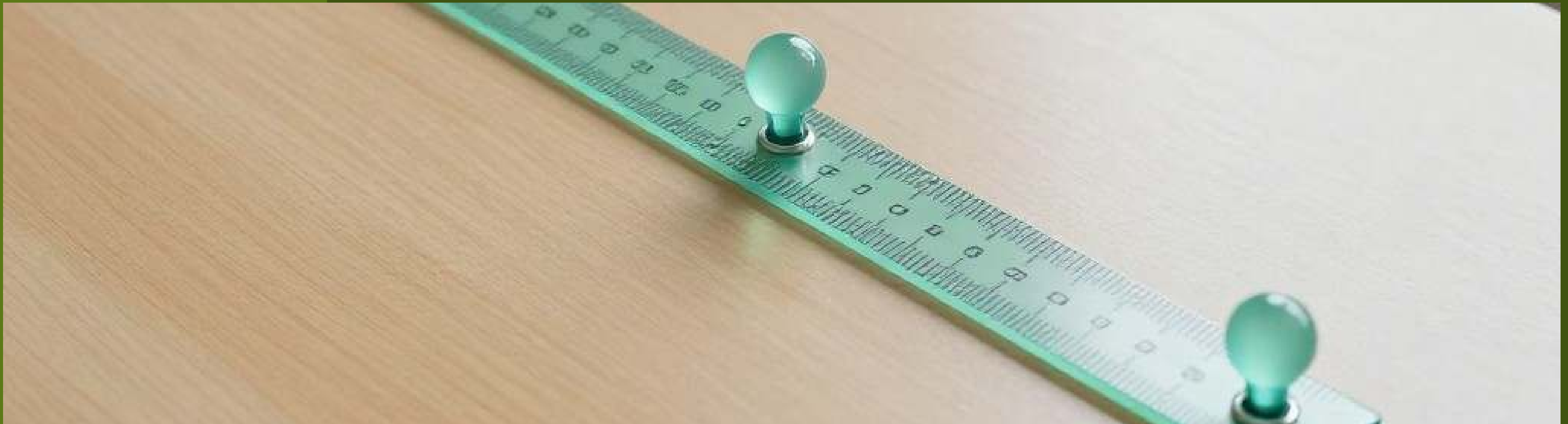
Если функция разрывается или отрезок не замкнут, такая гарантия исчезает. Тогда ответ нужно искать особенно осторожно, не полагаясь на одну формулу.

// Школьный алгоритм поиска экстремума

Последовательность проверки кандидатов: от области определения до сравнения значений.



// Пример: квадратичная функция на отрезке



01

Находим вершину

Сначала находим вершину параболы: для квадратичной функции она даёт главный кандидат на экстремум. Затем проверяем, попадает ли эта точка в отрезок $[0; 5]$, чтобы не потерять правильный ответ.

02

Считаем значения

Подставляем в функцию три обязательные точки: 0, 2 и 5. Получаем $f(0)=3$, $f(2)=-1$, $f(5)=8$. Уже этого достаточно, чтобы сравнить значения и увидеть крайние результаты.

03

Делаем вывод

Из сравнения видно, что наименьшее значение равно -1 и достигается при $x=2$, а наибольшее равно 8 и достигается при $x=5$. Именно так работает поиск абсолютных значений на отрезке.

// Как быстро находить кандидата для параболы

01.

Формула вершины

Для параболы $y=ax^2+bx+c$ удобнее всего сразу вычислить абсциссу вершины по формуле $x=-b/(2a)$. Это экономит время и даёт основной кандидат на экстремум.

02.

Проверяем отрезок

Если найденное x лежит внутри заданного отрезка, его обязательно включают в список точек для сравнения. Если вершина вне отрезка, она не влияет на абсолютный максимум или минимум.

03.

Добавляем концы

Затем сравнивают значения функции в вершине и на концах отрезка. Для параболы именно этот короткий набор точек обычно полностью решает задачу на наибольшее и наименьшее значение.

// Пример с дробно-рациональной функцией



Разрыв на графике

На отрезке $[0; 5]$ функция $y = (x+1)/(x-2)$ выглядит обычной только до точки $x=2$. Здесь в знаменателе появляется ноль, поэтому саму точку нельзя включать в вычисления.



Что сравнивать

Остаются только допустимые точки области определения и возможные критические точки внутри отрезка. После этого значения при $x=0$ и $x=5$ сравнивают отдельно, чтобы не пропустить крайний результат.

// Точки, где производная не существует



Излом графика

01

Если внутри отрезка график делает резкий излом, производная в этой точке не существует. Но такую точку всё равно проверяют как кандидата на максимум или минимум.

Вертикальный наклон

02

Вертикальная касательная тоже делает производную неопределённой. По этой причине точка с бесконечно большим наклоном включается в список значений, которые нужно сравнить с остальными.

Особые формы

03

Функция с модулем часто меняет направление без гладкости, а выражения с корнем в знаменателе могут создавать особые точки. Их нельзя игнорировать при поиске абсолютных значений.

Проверяем вместе

04

Алгоритм остаётся прежним: найти все такие точки, оставить те, что лежат внутри отрезка, и затем сравнить их с концами. Так ничего важного не выпадает из рассмотрения.

// Сравнение значений в кандидатах

В таблице удобно собрать все точки, которые могут дать ответ: внутренние кандидаты и границы отрезка. После этого достаточно сравнить числовые значения функции.

Наибольшее значение — 8, наименьшее — -1.

x	тип	f(x)
0	конец	3
2	критич.	-1
5	конец	8

Пример с квадратичной функцией на отрезке [0; 5]

// Связь экстремума с ростом и убыванием

Участок роста

Когда функция возрастает, каждое следующее значение у больше предыдущего. Поэтому на таком участке максимум обычно ищут ближе к правой границе, если она входит в область рассмотрения.

Участок убывания

На убывающем интервале ситуация обратная: чем больше x , тем меньше $f(x)$. Это сразу подсказывает, где вероятнее расположится минимум, особенно при работе на отрезке.

Разбиваем поведение

Если на одном отрезке есть и рост, и убывание, полезно разбить его на части. Тогда видно, в какой зоне функция поднимается, а в какой опускается, без лишних вычислений.

// Дополнительные методы: первая и вторая производная

2. Смена знака

Далее ищут точки, где знак меняется. Переход от плюса к минусу означает максимум, а от минуса к плюсу — минимум. Здесь важно не ограничиваться только алгебраической формулой.

4. Итоговая проверка

На практике оба признака дополняют друг друга: первая производная показывает рост и убывание, а вторая помогает понять, насколько уверенно найденный экстремум действительно соответствует вершине или впадине.



1. Знак производной

Сначала смотрят на знак первой производной. Если $f'(x) > 0$, функция возрастает; если $f'(x) < 0$, убывает. Это быстро показывает общий характер поведения графика.

3. Проверка кривизны

После этого используют вторую производную, чтобы уточнить форму графика. Если $f''(x) < 0$, график вогнут вниз; если $f''(x) > 0$, вогнут вверх.

// График и расчёт: одно решение двумя способами

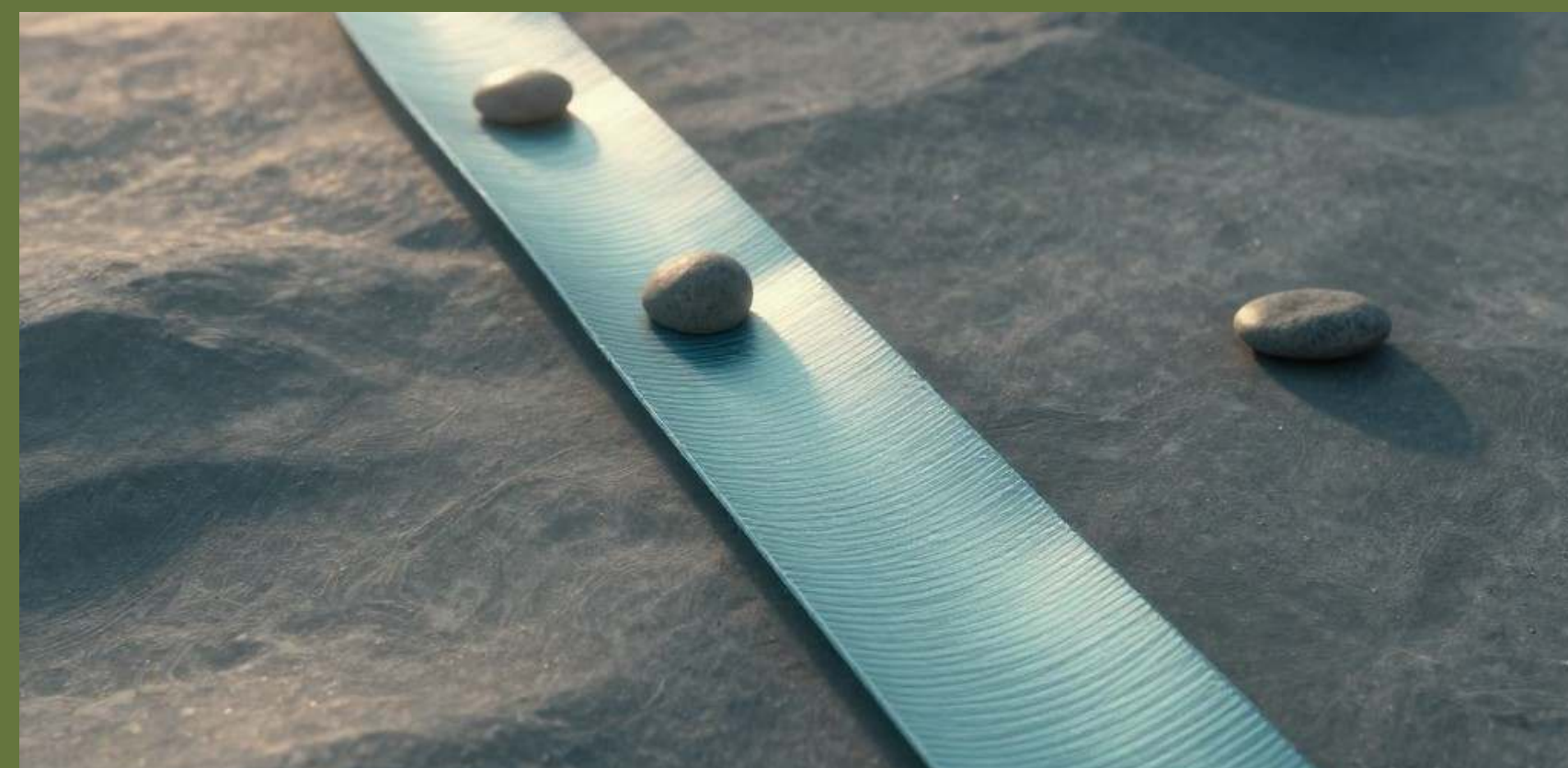


Что видно сразу

На рисунке видно, что к правому концу отрезка график поднимается выше всего, а внутри есть понижение, похожее на локальную впадину. Такой взгляд помогает быстро выделить кандидатов, но не заменяет вычисления.

Что подтверждает расчёт

Дальше значения функции считают в найденных точках и на границах отрезка. Только после этого можно уверенно сказать, где действительно расположен абсолютный максимум и где находится минимум.



// Типичные ошибки при поиске $\max$ и $\min$



Игнорируют границы

Самая частая ошибка — забыть проверить концы отрезка. Тогда можно получить правильные промежуточные вычисления, но всё равно потерять настоящий абсолютный максимум или минимум.

01

Путают виды экстремумов

Иногда путают локальный экстремум с абсолютным и принимают ближайший «холм» за окончательный ответ. На отрезке этого недостаточно: нужно сравнить все кандидатные точки.

02

Берут запрещённую точку

Опасно подставлять в таблицу точку, которая не входит в область определения. Если выражение не имеет смысла, значение функции в ней просто отсутствует.

03

Пропускают особые точки

Ещё одна ошибка — не учитывать точки, где производная не существует. Для модуля, излома или вертикальной касательной такие точки могут оказаться решающими.

04

Сравнивают не то

Наконец, сравнивать нужно не x , а именно значения $f(x)$. Наибольшее число аргумента ничего не говорит о величине функции и часто приводит к неверному выводу.

05

Итоги: как уверенно находить $\max$ и $\min$

Чтобы надёжно найти максимум и минимум, нужно пройти весь алгоритм без пропусков: область определения, кандидаты, концы отрезка и сравнение значений. Тогда ответ будет не случайным, а обоснованным.