



Возрастание и убывание функций

Как читать графики и находить закономерности поведения функции.



Монотонность как язык графиков

Монотонность помогает быстро понять, как ведёт себя функция при изменении аргумента, связать формулу с графиком и уверенно решать задачи по исследованию функций в 10 классе.



Определение возрастания и убывания

1

Возрастание

Функция называется возрастающей на промежутке, если при увеличении аргумента значения функции тоже увеличиваются. Это свойство описывает согласованное движение графика вверх.

2

Убывание

Функция убывает на промежутке, когда большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. На графике это выглядит как движение линии вниз слева направо.

3

Только на области определения

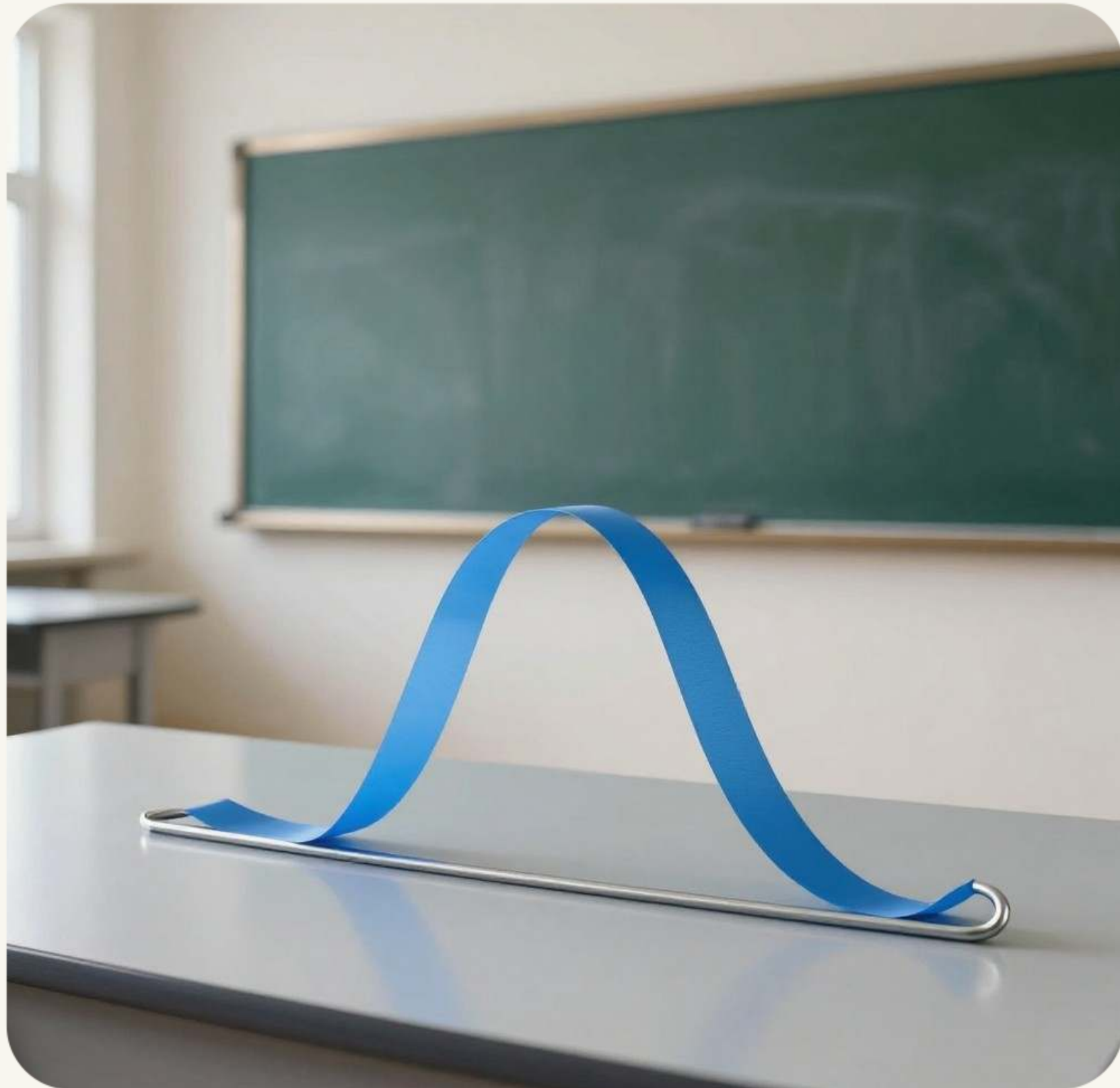
Монотонность рассматривают лишь там, где функция определена. Если на одном графике есть несколько участков, каждый из них анализируют отдельно, без смешения промежутков.

4

Разные участки одного графика

Одна и та же функция может на одном промежутке возрастать, а на другом убывать. Поэтому важно исследовать график не целиком, а по частям.

Как определить монотонность по графику



● График идёт вверх

Если линия слева направо поднимается, функция возрастает. Такой участок легко заметить даже без вычислений, достаточно следить за общим направлением графика.

● График идёт вниз

Если при движении слева направо график опускается, функция убывает. Этот признак особенно удобен при чтении уже построенных рисунков и схем.

● Вершина параболы

У квадратичной функции именно вершина обычно разделяет два участка монотонности. В этой точке график меняет направление, поэтому она особенно важна при анализе.

● Не путать с перегибом

Точка перегиба меняет форму графика, но не всегда его возрастание или убывание. Поэтому внешний изгиб не заменяет проверку направления движения.

Признаки монотонности у основных видов функций

Сравнение типичных функций показывает, какие свойства графика позволяют сразу определить промежутки возрастания и убывания.

Знак коэффициента и форма графика напрямую задают поведение функции; для параболы ключевой ориентир — вершина, а для показательной — основание.

Вид функции	Возрастает	Убывает	Особенность
Линейная	$k > 0$	$k < 0$	коэф. k
Квадратичная	по обе стороны	по обе стороны	вершина
$y = x $	$x \geq 0$	$x \leq 0$	угол в 0
Показательная	$a > 1$	$0 < a < 1$	основание a

Линейная функция и коэффициент наклона

Положительный наклон

01

Если в формуле $y = kx + b$ коэффициент k положителен, график поднимается слева направо. Значит, функция возрастает на всей области определения.

Отрицательный наклон

02

При отрицательном k прямая убывает: с ростом x значение y становится меньше. Это самый простой пример функции, которая убывает на всей области определения.

Свободный член b

03

Коэффициент b только сдвигает график вверх или вниз вдоль оси y . На возрастание и убывание он не влияет, потому что не меняет наклон прямой.

Квадратичная функция и вершина параболы



Направление ветвей

Знак коэффициента a определяет, куда направлены ветви параболы: вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$. От этого зависит общий характер монотонности.

Роль вершины

Вершина параболы — точка, в которой функция меняет направление движения. Именно здесь заканчивается один промежуток и начинается другой, поэтому её обязательно находят при исследовании.

Граница x_0

Абсцисса вершины $x_0 = -b/(2a)$ делит ось на два промежутка. Для $a > 0$ функция убывает слева и возрастает справа, а при $a < 0$ — наоборот.

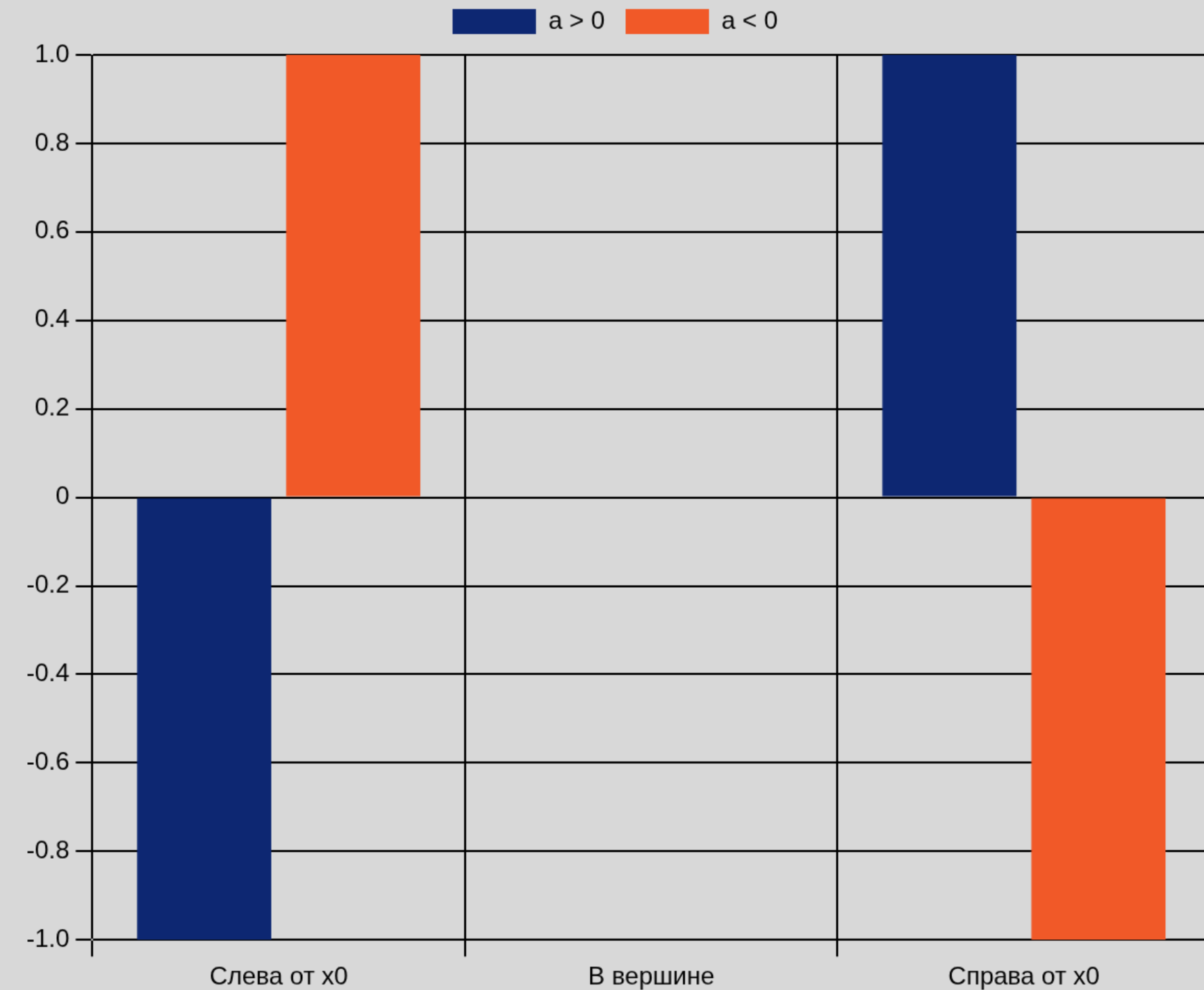
Удобство анализа

Зная вершину, можно сразу описать поведение всей квадратичной функции без построения подробной таблицы значений. Это экономит время и делает вывод более точным.

Схема монотонности параболы

Диаграмма показывает только направление изменения функции вокруг вершины, без лишних вычислений и построений.

Знак коэффициента a полностью меняет порядок промежутков: при $a > 0$ поведение симметрично случаю $a < 0$, но в обратном направлении.



Схематическое представление свойств квадратичной функции, школьный курс алгебры

Связь производной с возрастанием и убыванием

1

Положительная производная

Если $f'(x)$ больше нуля на промежутке, функция возрастает. Это означает, что при малом увеличении аргумента значение функции тоже увеличивается.

2

Отрицательная производная

Если $f'(x)$ меньше нуля, функция убывает. Производная в этом случае показывает, что график идёт вниз, а значения функции уменьшаются при росте x .

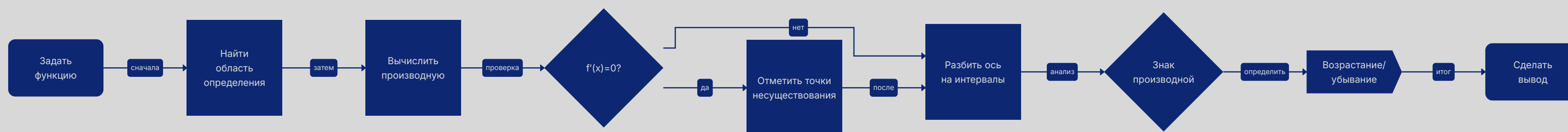
3

Нулевая производная

Когда производная равна нулю на всём промежутке, функция постоянна. Если же ноль достигается только в одной точке, это ещё не даёт полного вывода о монотонности.

Алгоритм исследования монотонности

Последовательность действий при анализе функции через производную



Критические точки и точки экстремума



● Что считается критической точкой

Критической называют точку, где производная равна нулю или не существует, но сама функция в этой точке определена. Такие точки помогают выделить места возможного изменения поведения графика.

● Не всякая критическая точка — экстремум

Наличие критической точки ещё не означает максимум или минимум. Если знак производной по обе стороны не меняется, функция продолжает вести себя одинаково, и экстремума не возникает.

● Признак экстремума

Локальный максимум или минимум появляется тогда, когда производная меняет знак: с положительного на отрицательный или наоборот. Именно эта смена указывает на поворот графика.

● Зачем это нужно

Точки экстремума показывают, где функция достигает наибольших или наименьших значений на участке. Это важно при исследовании графиков, решении задач и анализе реальных процессов.

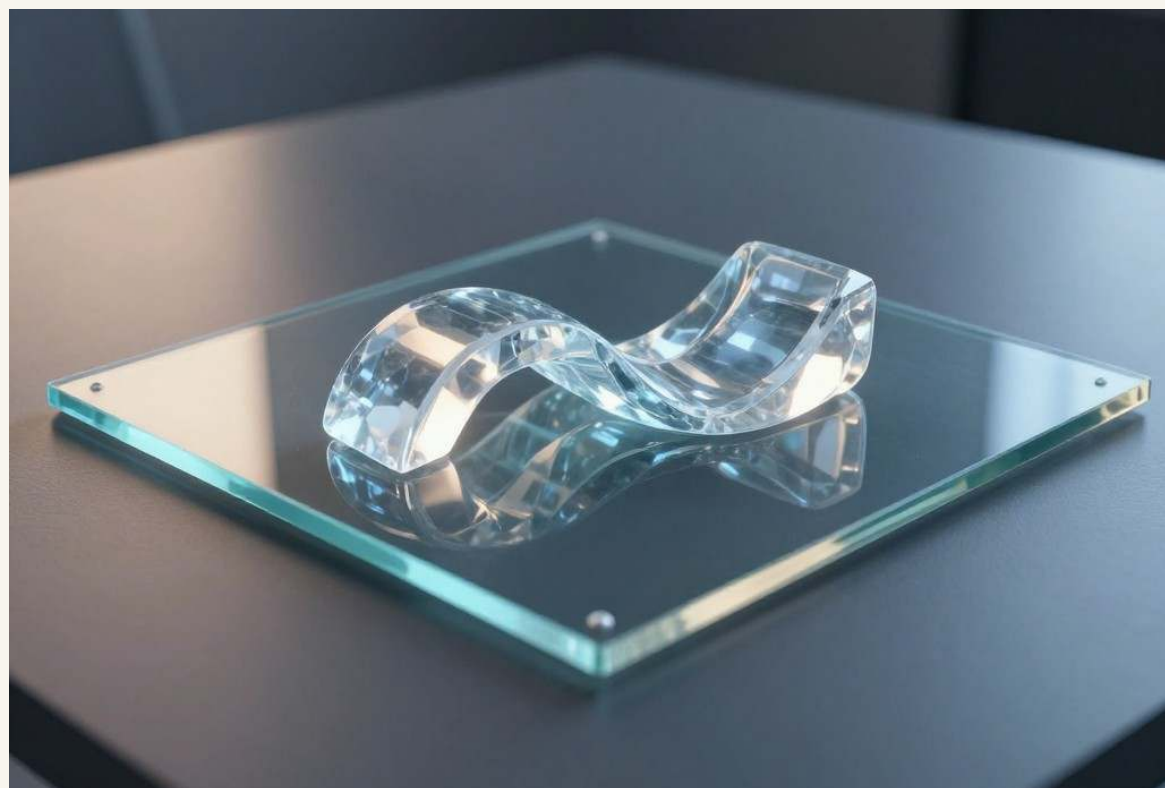
Что означает знак производной

Знак	Поведение	Вывод
$f'(x)>0$	возрастает	график идёт вверх
$f'(x)<0$	убывает	график идёт вниз
$f'(x)=0$	постоянна	возможна стационарная точка

Таблица показывает связь между знаком производной, поведением функции и выводом о характере графика на рассматриваемом промежутке.

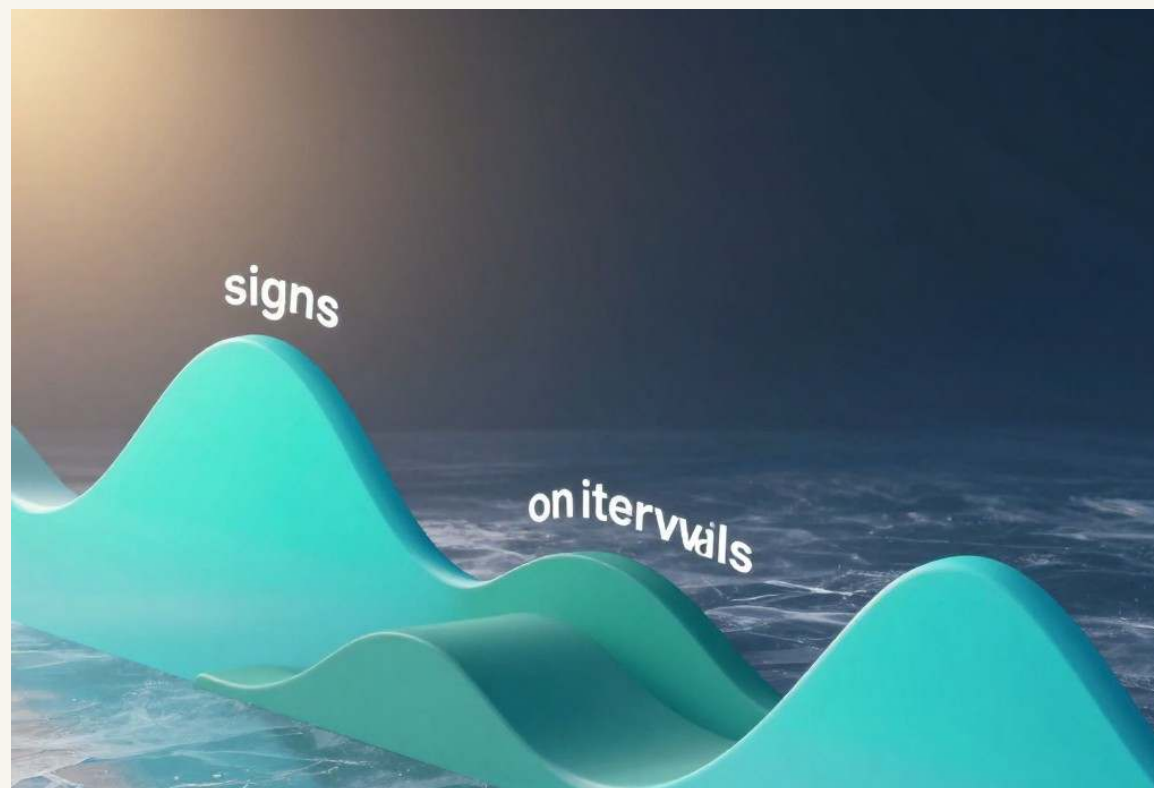
Знак производной позволяет быстро определить направление изменения функции; если знак не меняется, экстремум не появляется.

Как исследовать функцию $f(x)=x^3-3x$



Шаг 1. Находим производную

Исследование начинается с формулы производной: $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$. Именно она показывает, где функция меняет направление роста и убывания. Уже на этом этапе видны две критические точки: $x=-1$ и $x=1$.



Шаг 2. Читаем знаки на промежутках

На промежутке $(-\infty, -1)$ производная положительна, затем на $(-1, 1)$ становится отрицательной, а после $x=1$ снова положительна. Значит, график сначала поднимается, потом опускается и снова идёт вверх.



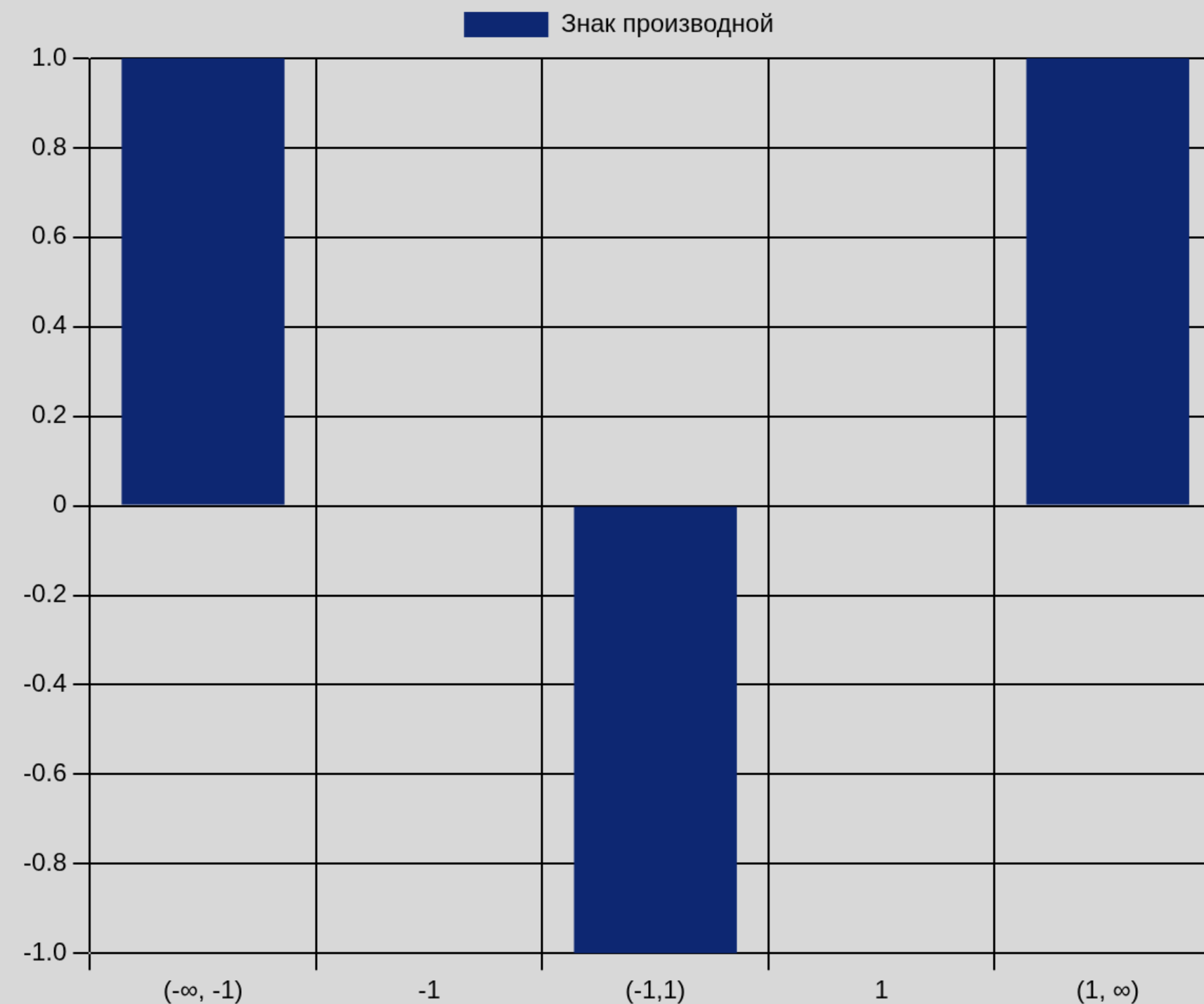
Шаг 3. Делаем вывод о графике

Такое поведение характерно для кубической функции с двумя точками смены направления. В точке $x=-1$ возникает локальный максимум, а в точке $x=1$ — локальный минимум, что хорошо видно при построении графика.

Знаки производной для функции $x^3 - 3x$

Нулевые значения на границах отмечают критические точки, а соседние интервалы показывают изменение поведения функции.

Смена знака производной в точках -1 и 1 подтверждает наличие локального максимума и минимума.



Особые случаи: разрывы, модули и дробные функции



Кусочные функции

У кусочно заданной функции каждый участок анализируют отдельно, потому что формула может меняться в разных частях области определения. Общий вывод делают только после рассмотрения всех участков.



Точки разрыва

В точках разрыва нельзя объединять соседние промежутки монотонности в один интервал. Здесь график может прерываться, поэтому исследование ведут строго по допустимым областям определения.



Дробные выражения

Для дробных функций сначала исключают значения, при которых знаменатель обращается в ноль. Эти точки не входят в область определения и обязательно разделяют промежутки исследования.



Функции с модулем

У функций с модулем поведение часто различается слева и справа от точки, где меняется знак выражения. Поэтому монотонность проверяют отдельно для каждой части формулы.

Типичные ошибки при определении монотонности

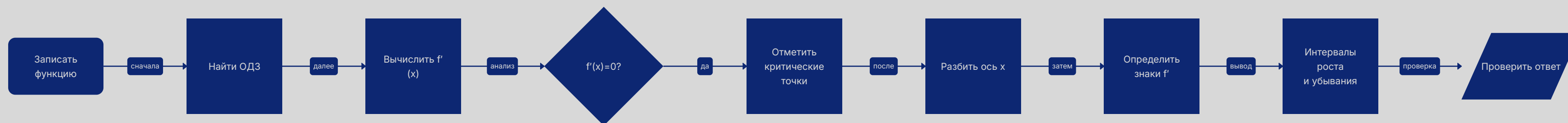
Таблица помогает увидеть, какие неточности чаще всего мешают получить верный ответ, и как должен выглядеть корректный вывод.

Правильный порядок действий всегда один: область определения, производная, знаки на промежутках и только затем вывод о монотонности и экстремумах.

Ошибка	К чему ведёт	Правильно
Смещение ОДЗ	Неверные интервалы	Сначала ОДЗ
Игнор знака f'	Ошибочный вывод	Сравнить знаки
Разрыв на графике	Нельзя объединять	Разделить интервалы
Путаница с перегибом	Неверный экстремум	Проверить смену знака

Как решать задачи на монотонность

Алгоритм исследования функции по производной для заданий 10 класса



Применения монотонности в реальных ситуациях



Температура

По возрастанию и убыванию температуры можно описывать потепление и похолодание в течение суток. Такой график помогает выделить отрезки изменения и моменты, когда тенденция меняется.



Движение тела

В физике монотонность используют при анализе координаты, скорости и пути. Если величина изменяется упорядоченно, легче понять направление движения и найти характерные моменты.



Экономические показатели

Прибыль, выручка и спрос часто рассматривают как функции времени. Интервалы роста и спада помогают увидеть, когда показатель улучшается, а когда начинает снижаться.



Уровень воды

Изменение уровня воды в резервуаре или реке часто изображают графиком. Монотонность показывает, в какие моменты приток превышает расход и когда начинается спад.



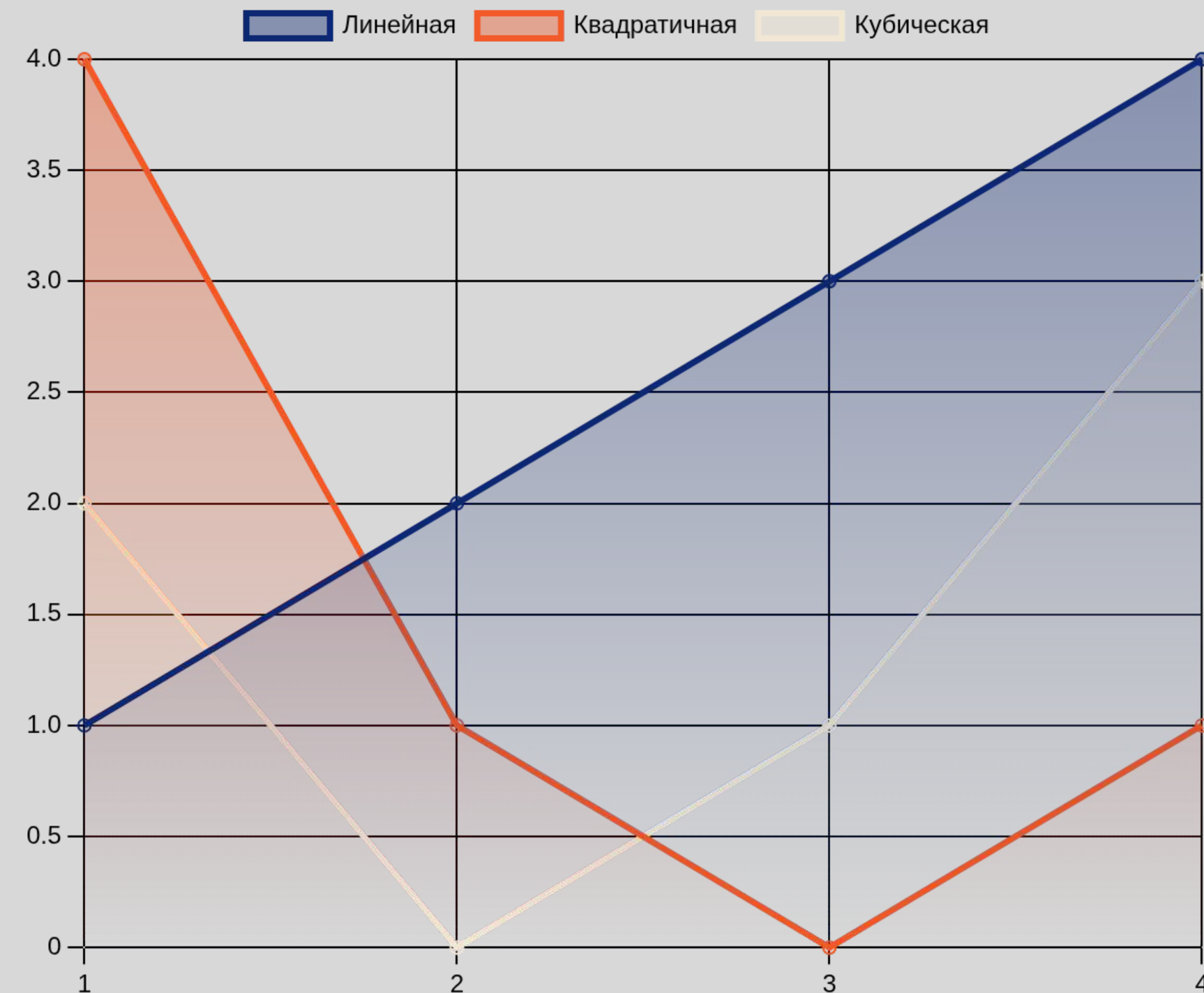
Анализ данных

При работе с таблицами и графиками монотонность помогает быстро находить максимумы, минимумы и общую тенденцию. Это полезно для интерпретации реальных измерений без лишних вычислений.

Сравнение поведения трёх функций

Три графика показывают, что тип функции напрямую влияет на число промежутков монотонности и характер смены направления.

Линейная функция имеет одно направление изменения, квадратичная — две зоны, а кубическая — более сложную структуру с несколькими переломами.



Монотонность — ключ к пониманию графика

Умение определять возрастание и убывание функции соединяет формулу, график и производную в единую картину. Этот навык помогает уверенно решать школьные задачи и анализировать реальные процессы.