

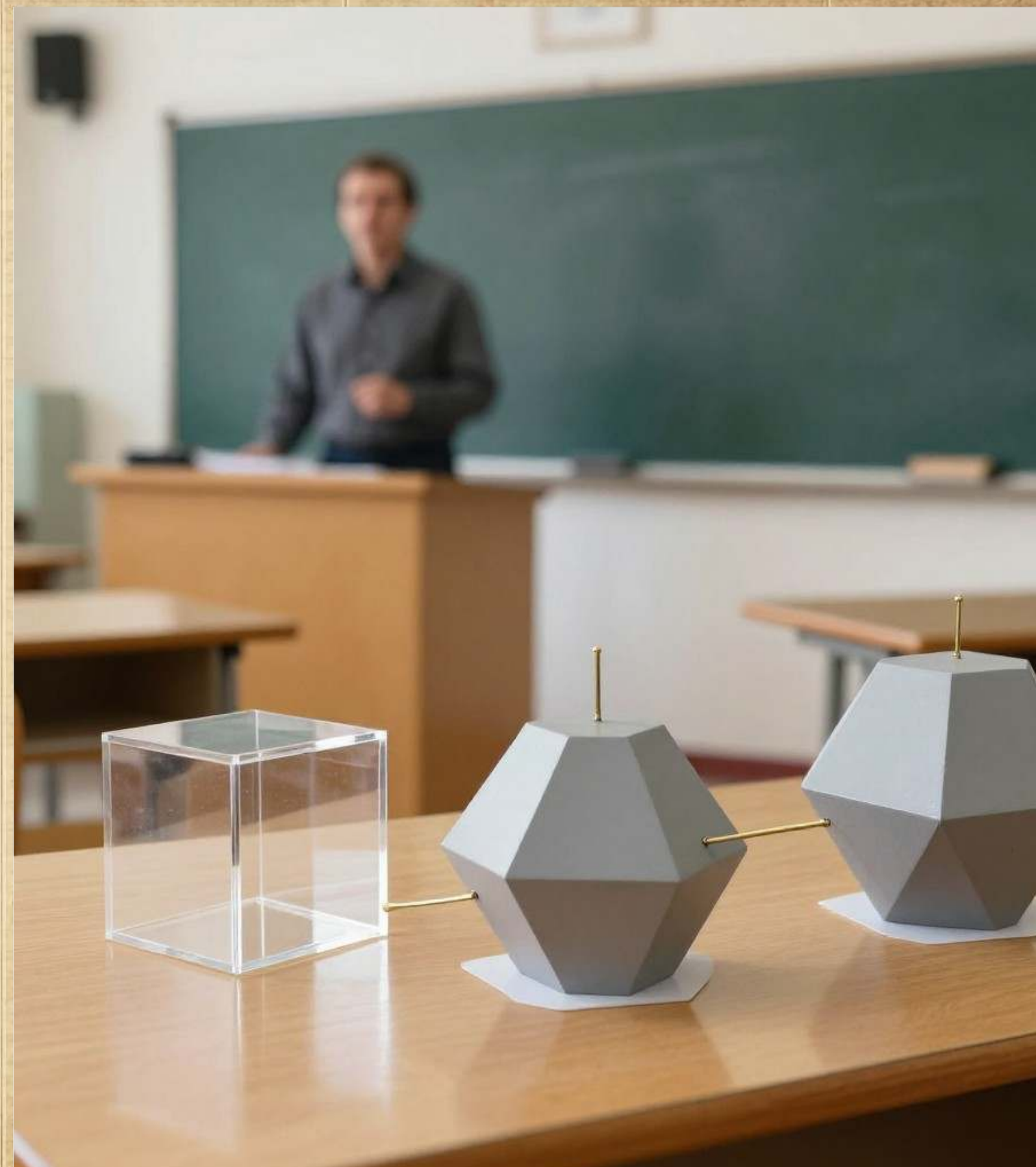
Многогранники и их применение в задачах оптимизации

Выпуклые многогранники помогают находить лучший вариант при ограничениях — вершины подсказывают максимум или минимум.



Зачем многогранники в 11 классе?

Призмы, пирамиды и правильные многогранники расширяют пространственное мышление и связь координат с объемами. А в прикладных задачах условия можно записывать неравенствами — так появляется геометрическая «карта» выбора.

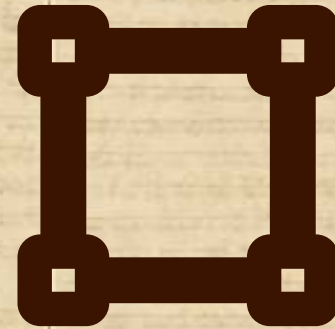


Ключевые понятия многогранников



Многогранник и граница

Многогранник — это тело, чья граница состоит из конечного числа плоских многоугольников. Такая структура делает фигуру «собранной» из отдельных частей.



Грани и ребра

Грань — плоский многоугольник, а ребро является общей стороной двух граней. Благодаря этому любая «стыковка» геометрически фиксирована и наглядно описывается.



Вершины как точки пересечения

Вершина — общая точка нескольких ребер. Она собирает воедино разные направления «перехода» между гранями, поэтому именно в вершинах удобно искать экстремумы.

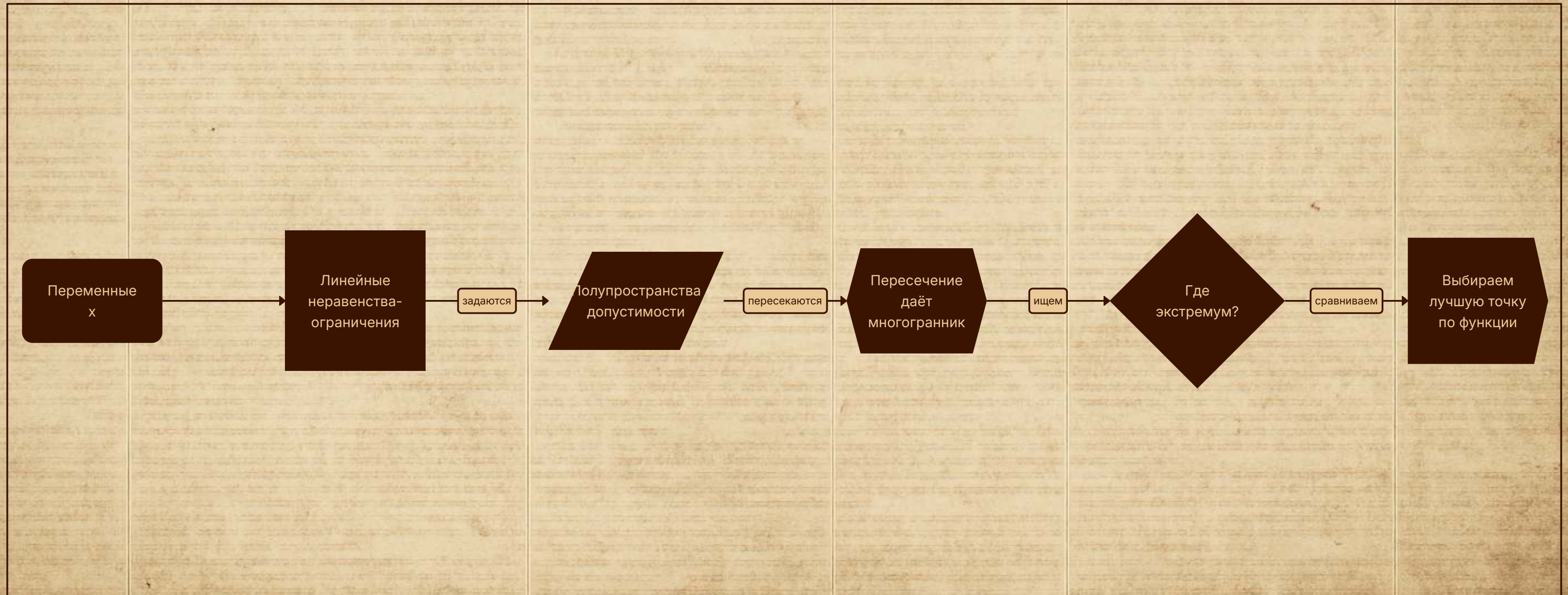


Выпуклость и внутреннее прямое

Выпуклый многогранник не содержит вогнутых участков: любая прямая, соединяющая две его точки, лежит внутри тела. Это свойство делает модель особенно устойчивой для оптимизации.

От условий задачи к области допустимых решений

Переменные, ограничения и целевая функция превращаются в геометрическую модель



Вершины многогранника как особые точки

Почему оптимум «прилипает» к вершинам

Для линейной целевой функции оптимальное значение, если оно существует, достигается в одной из вершин выпуклого многогранника. Логика проста: при движении по ребру значение функции меняется линейно.

Линейность вдоль ребра и эффект выбора

На практике удобно представить «ручку» направленного роста функции и выбрать самую выгодную крайнюю точку. В школьной геометрии это связывает алгебру, графики и пространственные фигуры.



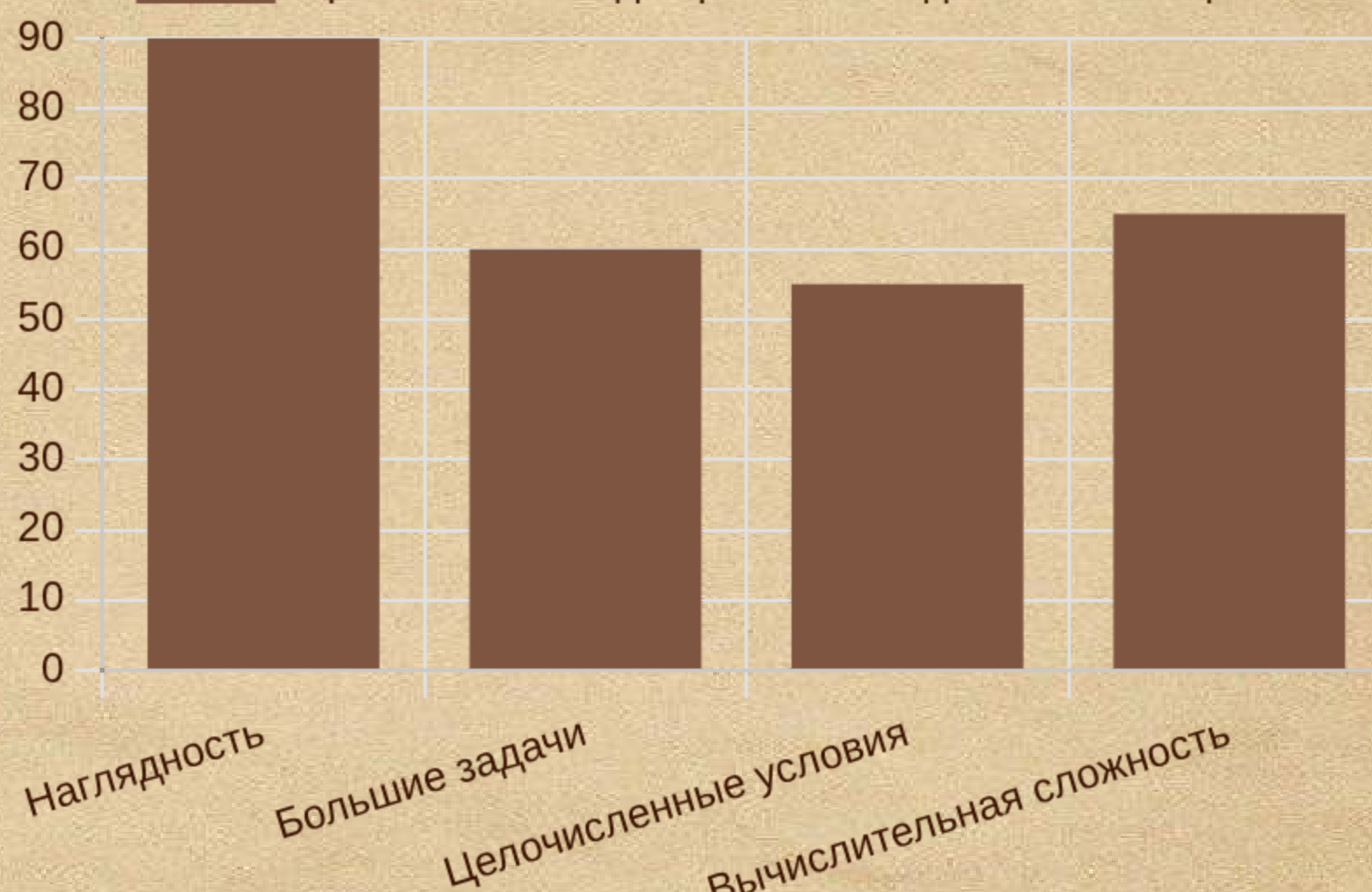
Сравнение геометрических методов и алгоритмов

Чем сильнее структура задачи (линейность, выпуклость), тем эффективнее методы, работающие с областью допустимых решений, а не с перебором.

Анализ показывает: графический подход хорош для малой размерности, а алгоритмы типа симплекса и ветвей и границ выигрывают при росте модели.

Сравнительная методическая оценка для учебного курса (без привязки к конкретным данным)

Сравнение методов решения задач оптимизации



Как разные задачи сводятся к многограннику решений

Задача	Переменные	Ограничения	Геометрический смысл	Результат
Планирование производства	объёмы выпусков	ресурсы, спрос	область допустимых выпусков	максимум прибыли
Транспортная задача	объёмы перевозок	вместимость, потребности	многомерный план перевозок	минимум затрат
Распределение бюджета	доли/суммы по статьям	лимиты, целевые итоги	многогранник допустимых планов	наилучший эффект
Расписание	время/назначения	вместимость, сроки	область допустимых смен	лучший по критерию график
Оптимальная смесь	дозировки компонентов	состав, ограничения	многогранник смесей	минимизация стоимости/ максимум качества

В каждом случае ограничения формируют область допустимых решений, а наилучший вариант — это точка с лучшим значением целевой функции.

Одна и та же геометрическая идея работает в разных контекстах: меняются переменные и интерпретации, но роль многогранника остаётся общей.

Учебная классификация задач линейной оптимизации (типовые формулировки)

Линейная функция и линии уровня

1

Шаг 1: Задать целевую функцию

На плоскости рассматривают линии уровня — множества точек, где функция принимает одно и то же значение. В пространстве аналогом служат плоскости уровня.

2

Шаг 2: Понять направление роста

Если меняются коэффициенты, меняется наклон и направление роста функции. Линии уровня при этом сдвигаются параллельно, сохраняя форму.

3

Шаг 3: Наложить ограничения

Ограничения задают область допустимых решений. Точки внутри этой области соответствуют допустимым вариантам, а снаружи — нарушают условия.

4

Шаг 4: Найти последнюю касающуюся линию

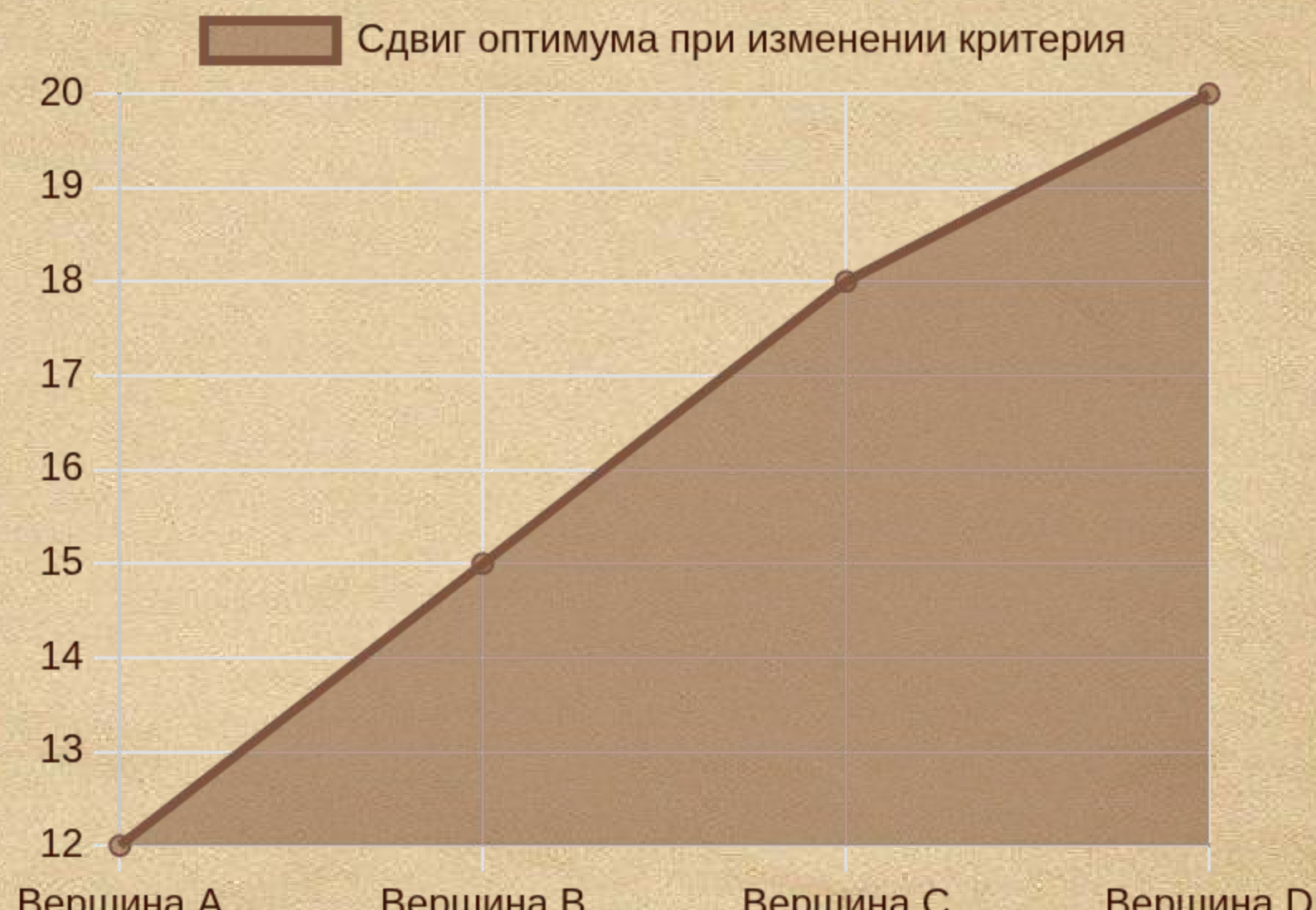
Касание последней линии уровня области допустимых решений чаще всего происходит в вершине или на ребре. Так геометрия и графики соединяются в один ответ.

Как меняется оптимальная вершина при изменении условий

Если изменить коэффициенты целевой функции, сравнение значений на тех же вершинах меняет победителя: оптимум «перескакивает» на другую крайнюю точку.

Даже при неизменной области допустимых решений результат зависит от выбранного критерия, поэтому важно формулировать цель корректно.

Иллюстративный пример на учебном графике (условные единицы)



Целочисленные ограничения в задачах выбора

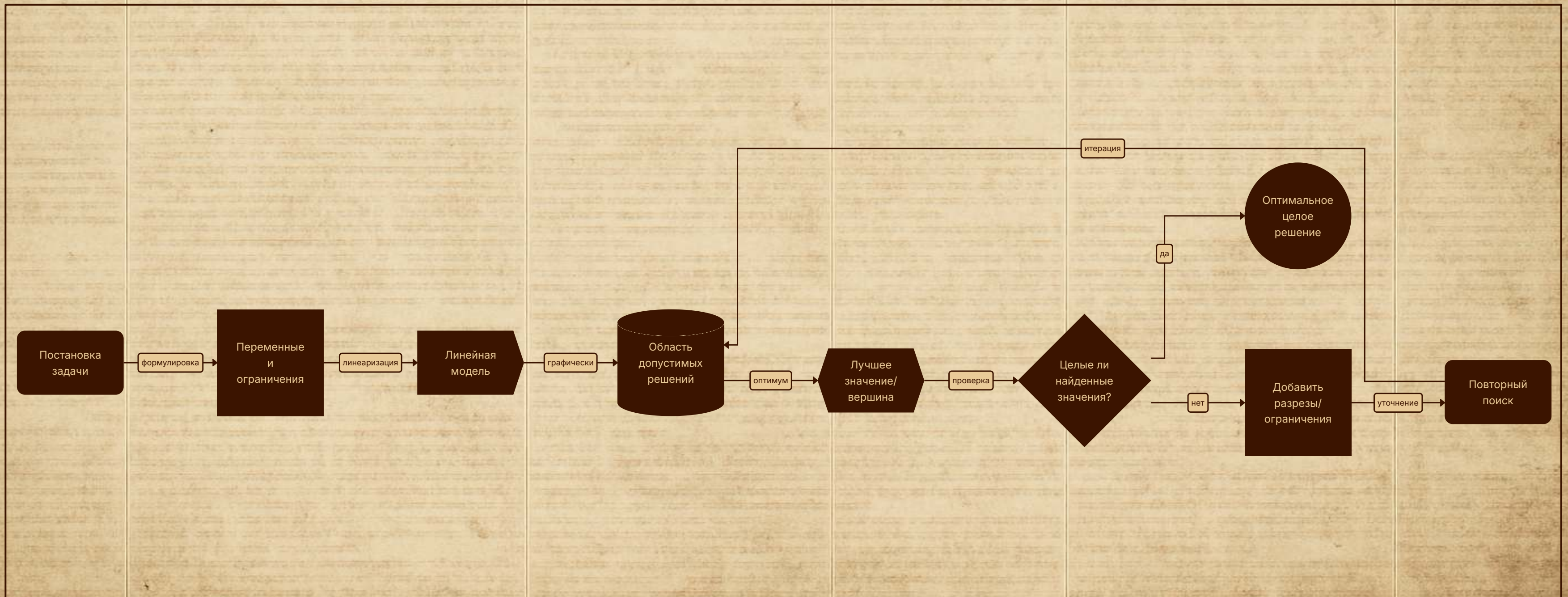
Во многих реальных ситуациях переменные обязаны быть целыми: число станков, машин, учеников или единиц продукции. Тогда оптимум линейной модели может оказаться «непригодным» по смыслу.

Чтобы начать вычисления, используют линейную релаксацию: заменяют целочисленные требования обычными неравенствами. Это расширяет область допустимых решений и даёт верхнюю или нижнюю оценку для настоящего ответа.

Далее проверяют полученное решение на целочисленность. Если оно дробное, вводят дополнительные ограничения и повторяют поиск, пока не найдут оптимальный вариант, который реально выполняется.

Последовательность поиска оптимума при целочисленных переменных

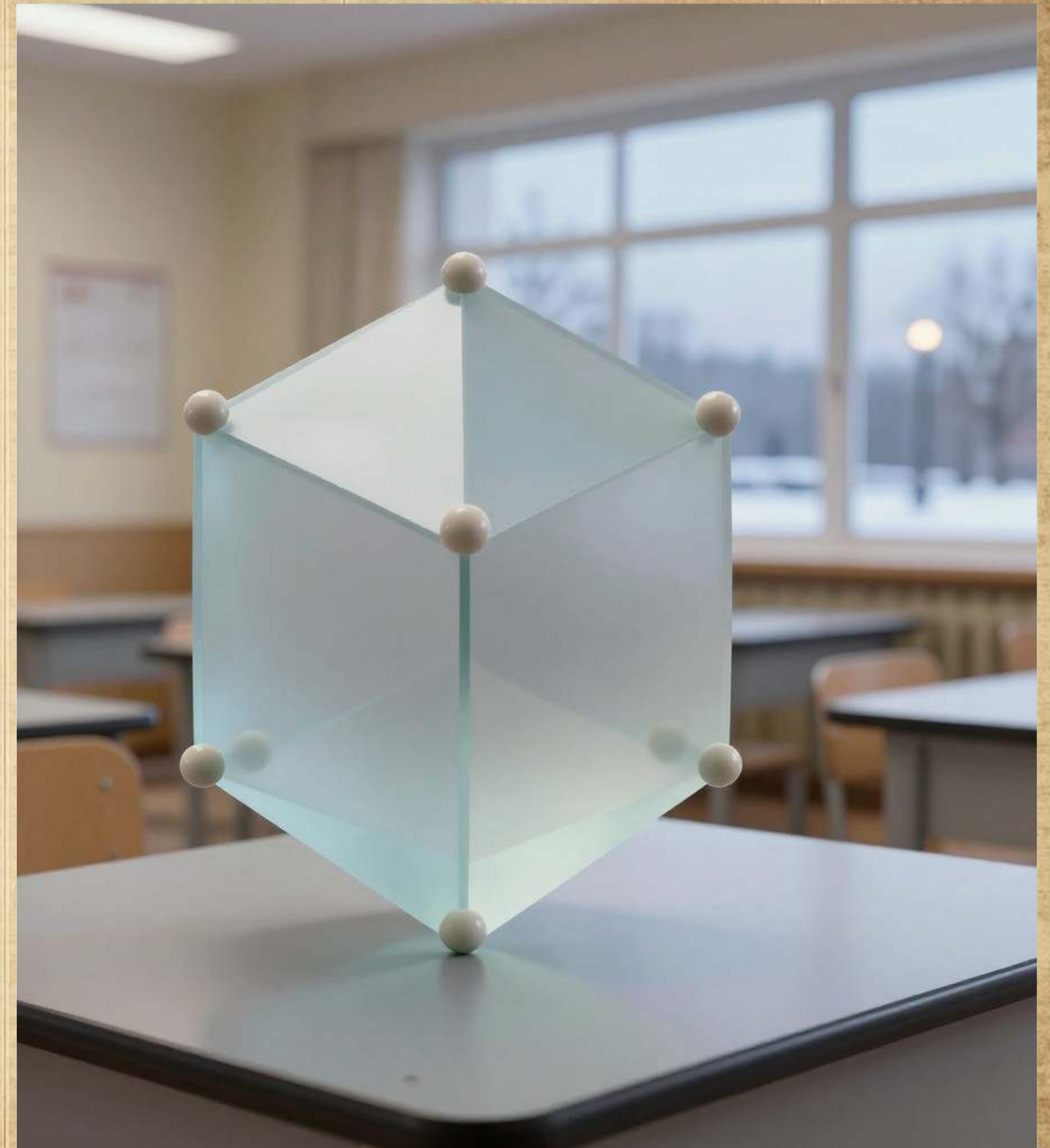
Логика решения: от модели с ограничениями к вершинам многогранника и проверке выполнимости



Разрезы и уточнение области решений

Разрезы — это дополнительные линейные неравенства, которые исключают дробные решения, но сохраняют все допустимые целочисленные точки. Тем самым многогранник сужается ровно настолько, чтобы убрать «лишнюю» вершину.

Геометрически новый разрез превращает исходную область в более узкую: дробная угловая точка оказывается по одну сторону границы, а целые точки — по другую. В практических задачах это повышает точность и сокращает перебор кандидатов.



Многогранники в транспортной задаче

В транспортной задаче переменные перевозок подчиняются уравнениям баланса и неотрицательности. Поэтому допустимые планы образуют многогранник, а минимум стоимости достигается на его вершине.

Сравнение столбцов показывает, что при тех же потребностях оптимум смещается на маршрут с более выгодной комбинацией цены и доступности мощностей. Лучший план соответствует наименьшей сумме затрат.

Пример учебной модели (распределение интенсивностей по маршрутам), точные исходные данные не заданы.



Свойства выпуклого многогранника

Свойство	Математический смысл	Роль в решении задач
Выпуклость	отрезок между любыми двумя точками целиком внутри	оптимум не «теряется» между вершинами
Пересечение полупространств	границы задаются линейными неравенствами	область решений строится из ограничений
Вершины, рёбра, грани	геометрические «элементы» структуры	кандидаты на оптимум концентрируются в углах
Конечное число граней	описание включает конечный набор плоских ограничений	возможность рассмотрения конечного набора вершин
Смежность вершин	вершины соединены рёбрами при активных ограничениях	переход к лучшему плану происходит по структуре
Линейная функция на вершинах	значение линейной цели достигается в экстремумах области	достаточно проверять вершины

В таблице сопоставлены ключевые свойства выпуклого многогранника и то, как они помогают в задачах линейной оптимизации.

Именно сочетание выпуклости и конечного геометрического строения делает многогранники удобным каркасом для линейной оптимизации.

Почему задачи оптимизации могут быть сложными

Число вершин многогранника быстро растёт, когда увеличиваются число переменных и число ограничений. Даже при аккуратной постановке полное «перебирание всех кандидатов» становится слишком трудоёмким.

Для наглядности можно рассуждать о нескольких переменных, но в реальных моделях размерность часто велика. Тогда графическая проверка и интуитивный выбор практически невозможны.

Значительную роль играют структура задачи и то, какие ограничения действительно «работают». Если существенных неравенств мало или они разреженные, поиск оптимума становится заметно эффективнее.

Поэтому вычислительные методы строят путь через геометрию области решений: используют активные ограничения, симметрию и правила продвижения. Это снижает потребность в прямом переборе вариантов.

Что усложняет задачу при росте размерности

С переходом от 2–3 переменных к десяткам и сотням любая попытка изобразить область решений на плоскости теряет смысл. Возникает многомерный многогранник.

Данные иллюстрируют: когда наглядность падает, возрастает значимость алгебраической записи и методов вычисления экстремума. Геометрия сохраняет смысл, но её представляют формулами.

Схематическая учебная иллюстрация (относительные оценки), численные значения не соответствуют конкретной задаче.

С ростом размерности растёт «сложность представления»



Bus

Trade Rev

They

Issue

Making A

THE PLAN

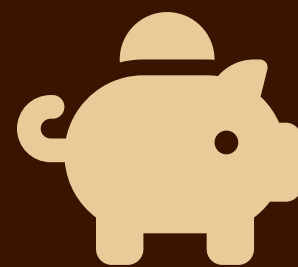
Примеры из реальной жизни



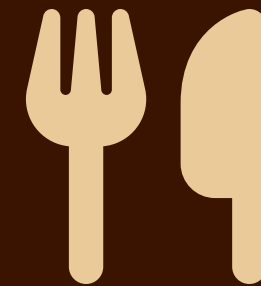
Планирование ресурсов
Планы смен или загрузка оборудования задаются ограничениями по времени, мощности и требуемым объёмам. Оптимизация выбирает вариант с лучшей «стоимостью» или производительностью.



Маршруты доставки
Когда перевозки распределяются между пунктами, ограничения связаны с потребностями и вместимостью. Лучший план минимизирует суммарные затраты на доставку.



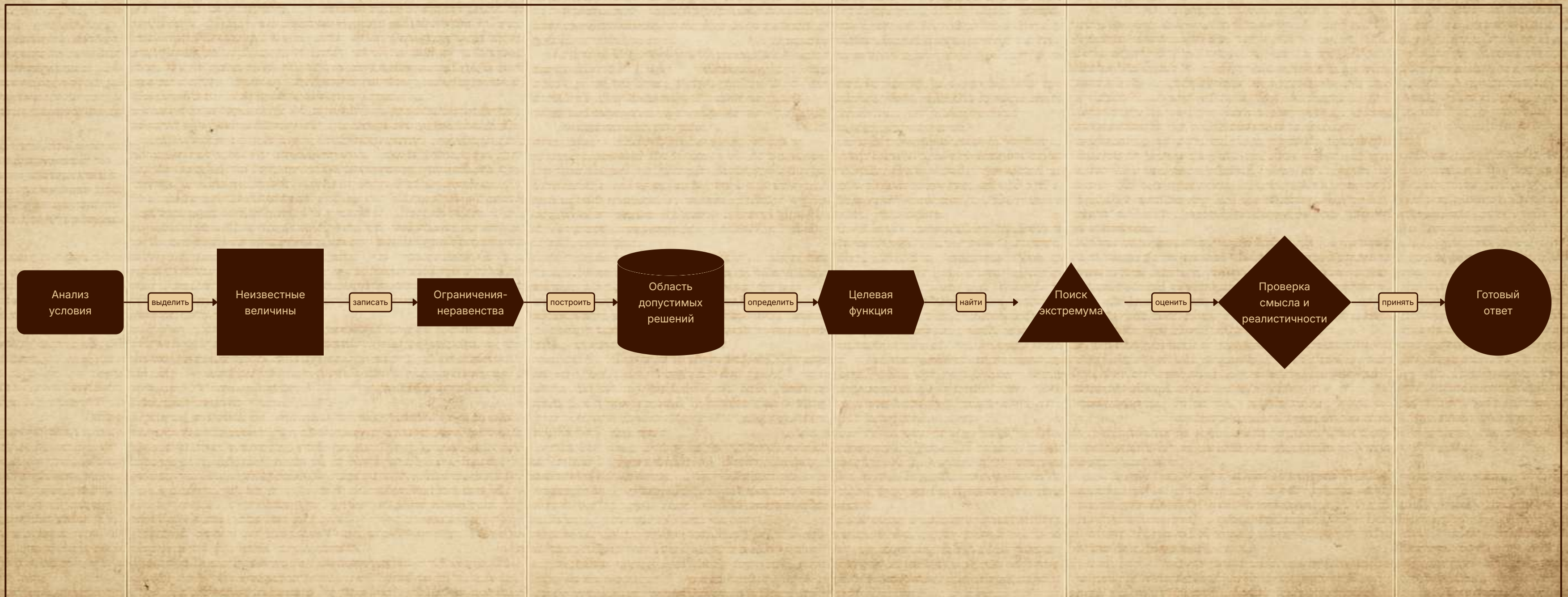
Бюджет и инвестиции
Распределение денег между направлениями обычно ограничено суммой и минимальными долями. Многогранник описывает все выполнимые распределения, а оптимум — лучший критерий.



Смеси и меню
При подборе состава смеси учитывают калории, состав ингредиентов и цену. Геометрическая модель помогает сравнивать допустимые рецепты и выбирать оптимальный.

От словесной задачи к геометрической модели

Единая последовательность шагов, объединяющая анализ условия и поиск оптимума

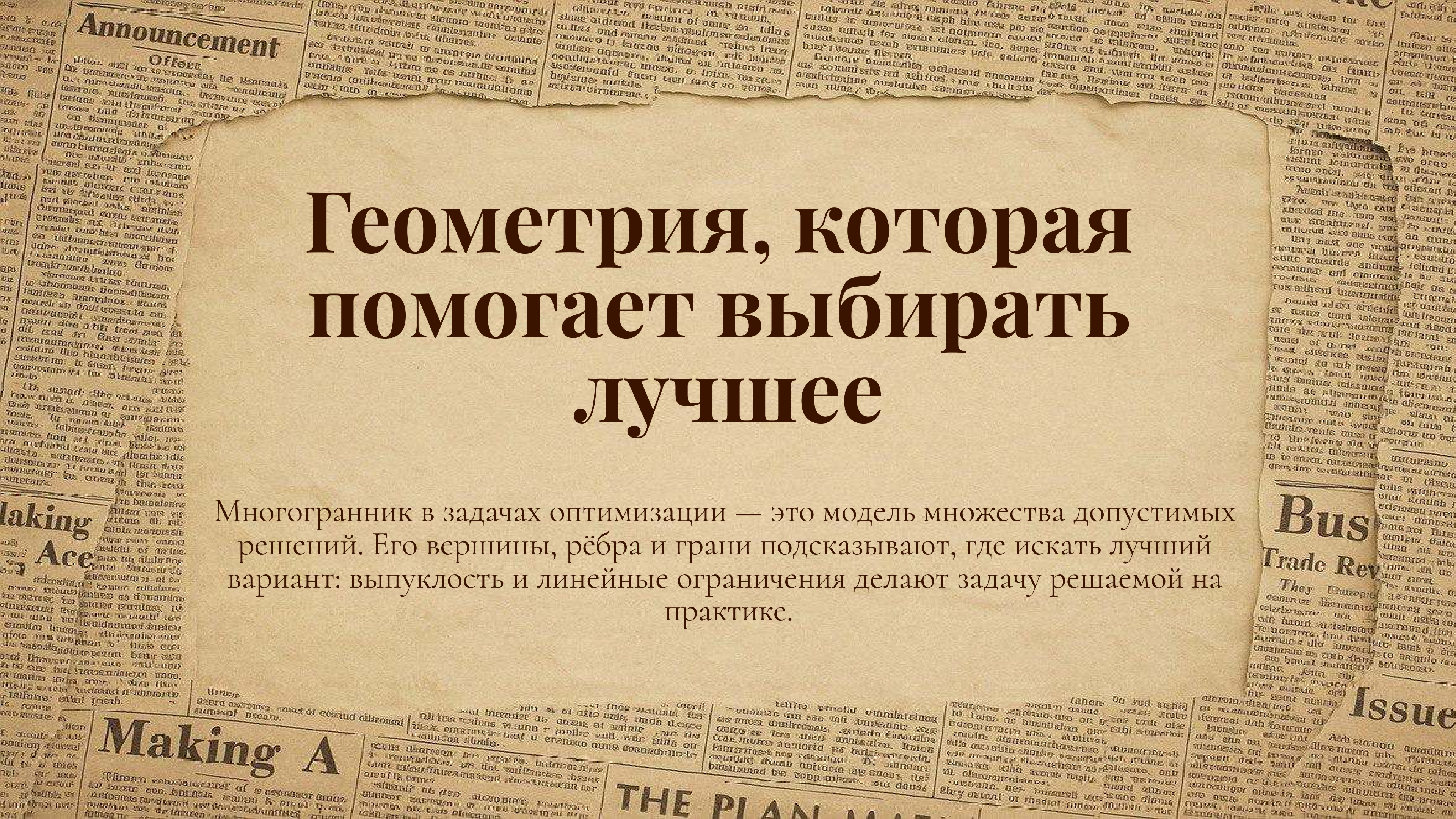


Границы применимости метода многогранников

Метод особенно удобен, когда модель линейна и область решений действительно выпуклая. Тогда геометрия многогранника напрямую связывает ограничения и достижение экстремума на «углах» области.

Если в задаче появляются нелинейные зависимости, случайные факторы или сложные связи между переменными, картинка перестаёт быть столь прозрачной. Оптимум может возникать не в вершинах, а в более сложных местах.

В подобных случаях применяют приближённые методы, линеаризацию, компьютерный перебор и эвристики. Это подчёркивает: многогранники — мощная, но не универсальная модель для любых условий.



Геометрия, которая помогает выбирать лучшее

Многогранник в задачах оптимизации — это модель множества допустимых решений. Его вершины, рёбра и грани подсказывают, где искать лучший вариант: выпуклость и линейные ограничения делают задачу решаемой на практике.

THE PLAN