

Геометрия 11 класса: пространст во, векторы и измерения фигур

Стереометрия объединяет чертёж,
доказательство и вычисления: прямые,
плоскости, расстояния, углы, объёмы.





Почему стереометрия важна в 11 классе

Стереометрия продолжает планиметрию и помогает решать задачи ЕГЭ: строить сечения, находить углы и расстояния, применять признаки параллельности и перпендикулярности, а также вычислять объёмы. Эти навыки нужны в инженерных расчётах, 3D-моделировании и навигации в пространстве.

Ключевые объекты стереометрии



Точка

Точка фиксирует место в пространстве и задаётся буквой А, В, С. На чертеже её положение помогает отслеживать принадлежность, пересечения и построения. Без точного понимания опор невозможно

двигаться дальше



Прямая и отрезок

Прямая описывается буквой a, b, c и задаёт направление в пространстве. Отрезок соединяет две точки и используется для измерений и построения расстояний,



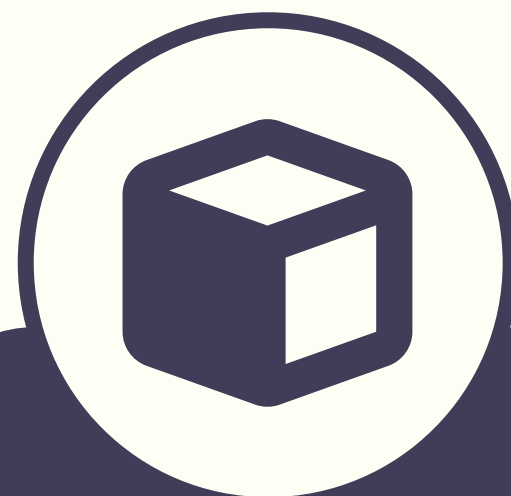
Плоскость

Плоскость обозначают α, β, γ . Она задаёт поверхность, в которой можно рассматривать пересечения, параллельность и перпендикулярность прямых. Умение отличать плоскую ситуацию от пространственной — ключ к



Угол и угол между объектами

Угол возникает как мера поворота между направлениями. В стереометрии важно различать углы между прямыми, между прямой и плоскостью, а также углы в сечениях. От этого зависит выбор



Многогранники и тела вращения

Многогранники (например, призмы и пирамиды) состоят из граней, рёбер и вершин. Тела вращения описывают по вращению плоских фигур. Через их элементы легче организовать вычисления площадей и объёмов.

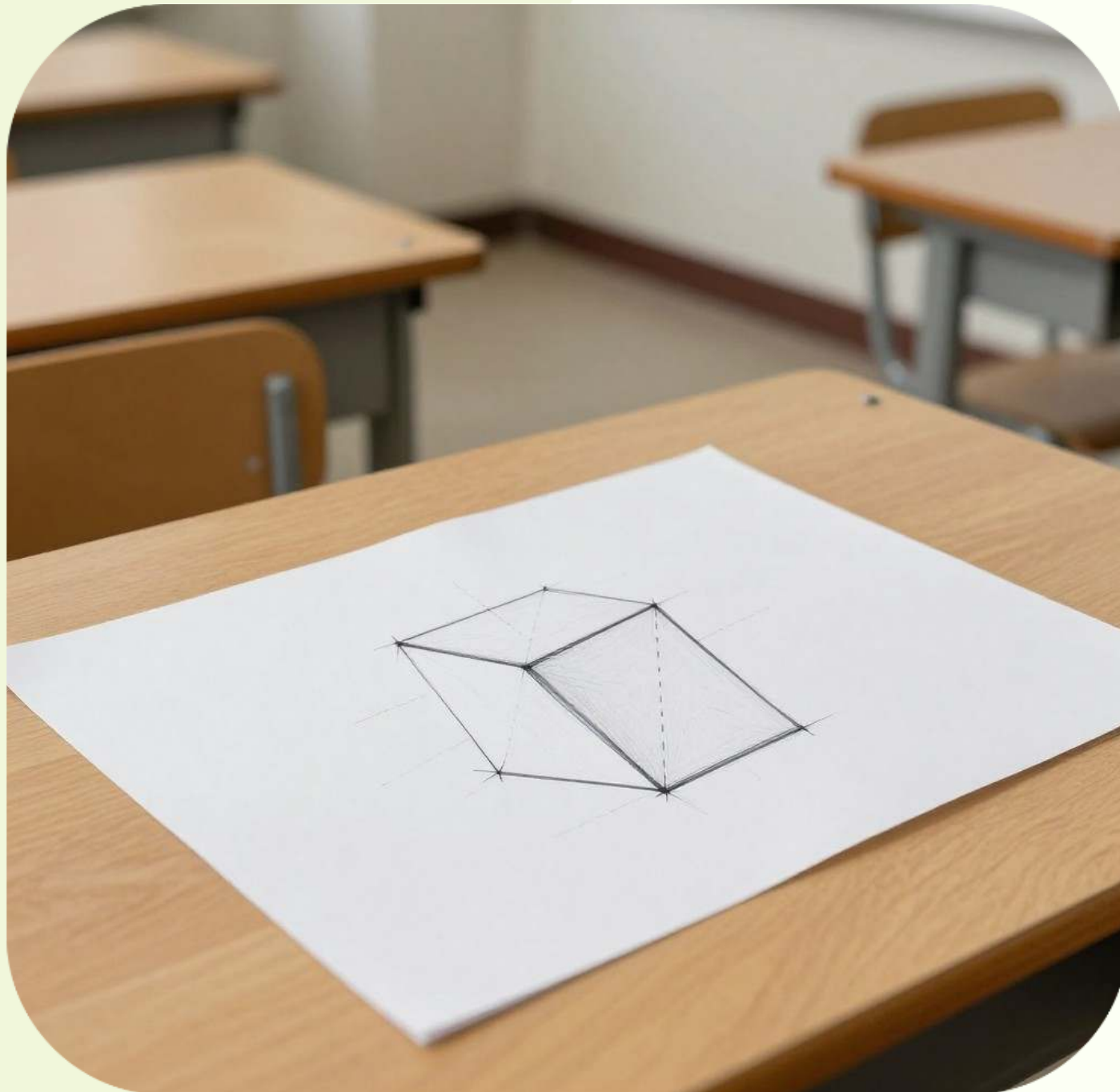
Пространственная модель и её чертёж

Условность рисунка и сохранение связей

На пространственном чертеже сохраняются важные отношения объектов, но размеры и углы часто показаны условно. Поэтому нельзя «доверять линейке» на глаз: нужно опираться на признаки и теоремы.

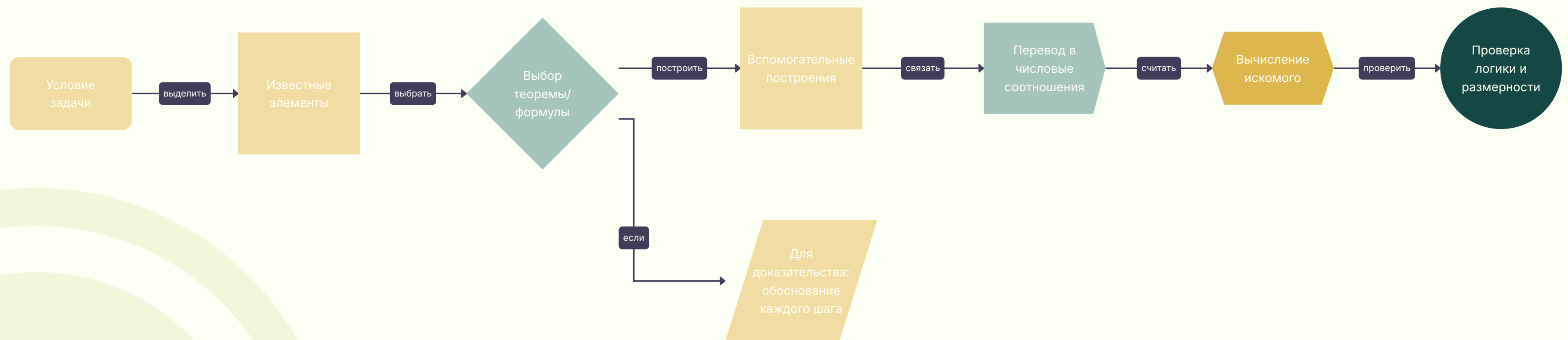
Какие элементы фиксирует чертёж

Обычно выделяют видимые и скрытые элементы: скрытые рёбра отмечают пунктиром, видимые — сплошными линиями. Такой рисунок помогает отслеживать вершины, рёбра, грани, основания



Алгоритм решения стереометрической задачи

Логика решения: от условия к доказанному ответу



Основные многогранники и их элементы

Фигура	Основания	Боковые грани	Рёбра/ вершины	Объём
Куб	1	квадраты	много рёбер	$V=a^3$
Прям. параллелепипед	1	параллелограммы	6 граней	$V=abc$
Призма	2	параллелограммы	боковые рёбра паралл.	$V=S_{осн} \cdot h$
Пирамида	1	треугольники	сходятся в вершине	$V=1/3$ $S_{осн} \cdot h$
Прав. треуг. пирамида	1	равн. треуг.	все боковые сходятся	$V=1/3$ $S_{осн} \cdot h$

Сравнение помогает быстро понять, какие части фигуры считать основаниями, боковыми гранями, а также какие формулы применять для площади поверхности и объёма.

По структуре фигуры легко определить формулу: призмы работают с произведением площади основания на высоту, пирамиды — с коэффициентом $1/3$.

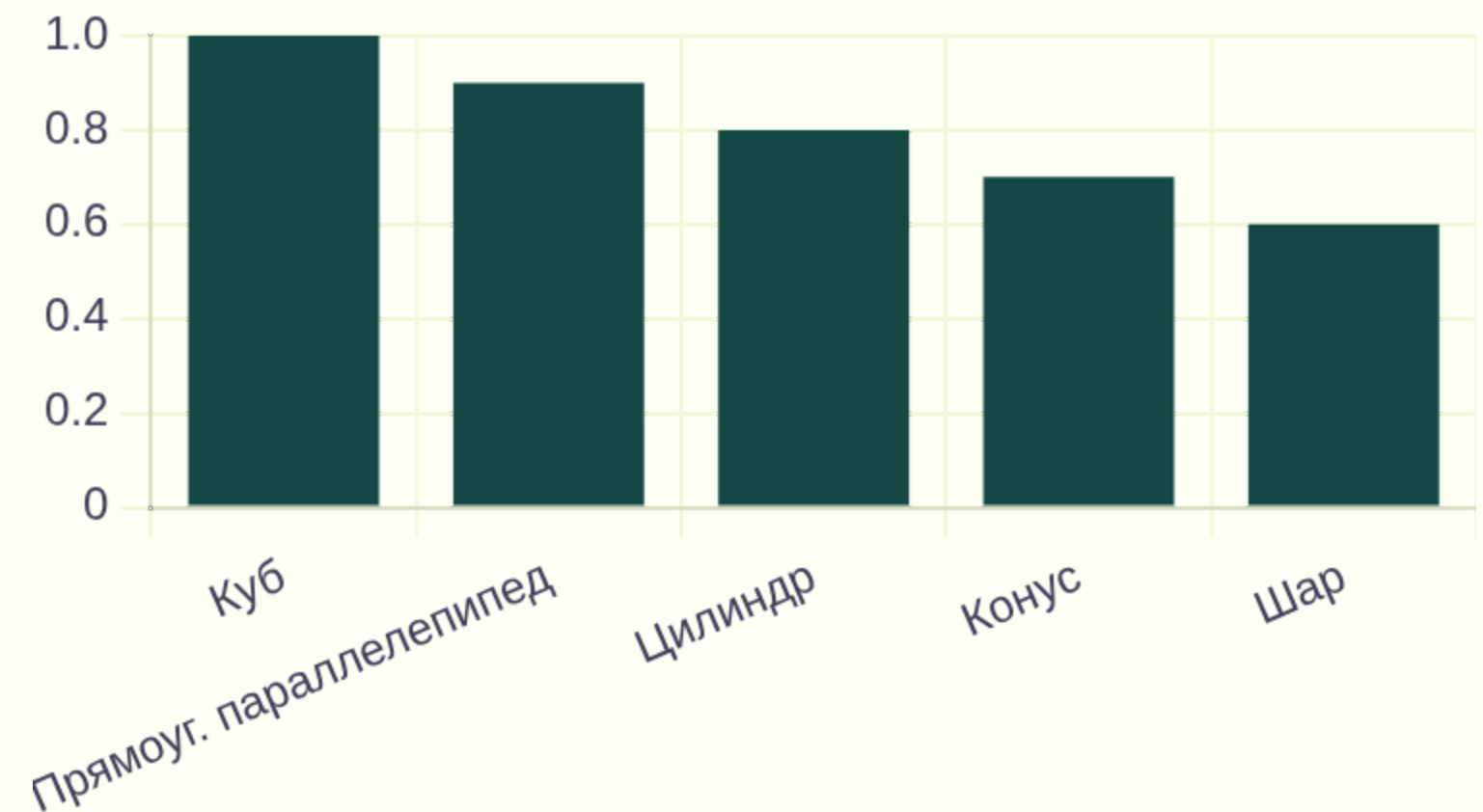
Школьный курс стереометрии, раздел многогранников

Сравнение площадей и объёмов для типовых тел

Ключевой принцип: объём растёт как кубическая величина, а площадь поверхности — как квадратная. Поэтому в формулах разные степени параметров.

Диаграмма подтверждает, что «геометрическая размерность» автоматически подсказывает правильную структуру формулы: степень параметров соответствует виду измерения.

Сопоставительные формулы объёма и площади поверхности (смысл единицы)



Школьные формулы стереометрии; точные выражения: $V=a^3$, $V=Soch \cdot h$, $V=1/3 Soch \cdot h$, $V=4/3\pi r^3$ и т.п.

Параллельность в прямых и плоскостях

Параллельные прямые в пространстве не пересекаются и имеют общий «направленческий смысл»: они могут лежать в одной плоскости либо в разных плоскостях. Это помогает переносить направления на другие построения.

Прямая параллельна плоскости, если у них нет общей точки. Тогда говорят, что прямая «не входит» в плоскость, но совпадает с её направлением через соответствующие линии.

Две плоскости параллельны, если они не пересекаются. Такие отношения лежат в основе доказательств параллельности сторон в призмах, параллелограммах и при анализе сечений многогранников.

Перпендикулярность и высота в пространстве

1

Если две прямые перпендикулярны, то образуется прямой угол. Важно помнить правило продолжения: перпендикулярность сохраняется для любых лучей, имеющих общий начальный участок с исходной прямой.

2

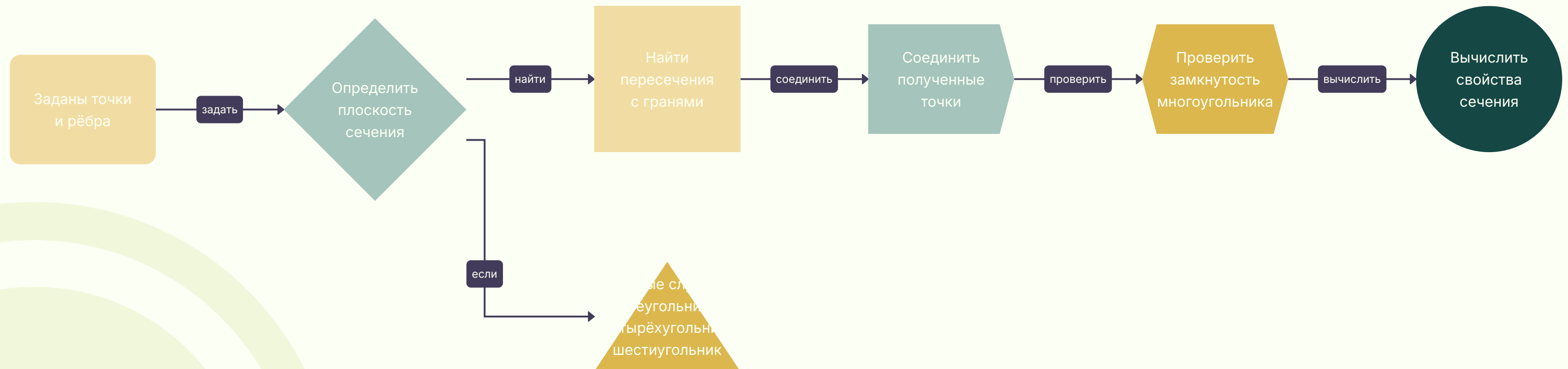
Прямая, перпендикулярная плоскости, перпендикулярна любой прямой этой плоскости, проходящей через точку пересечения. Так обычно находят углы и доказывают перпендикулярность в многогранниках.

3

Высота фигуры — это перпендикуляр, опущенный из вершины на основание или его продолжение. Для пирамиды и конуса высота напрямую определяет объём, а для параллелепипеда и призмы — расстояние между основаниями.

Построение и анализ сечения многогранника

Типичная схема для задач на сечения многогранников



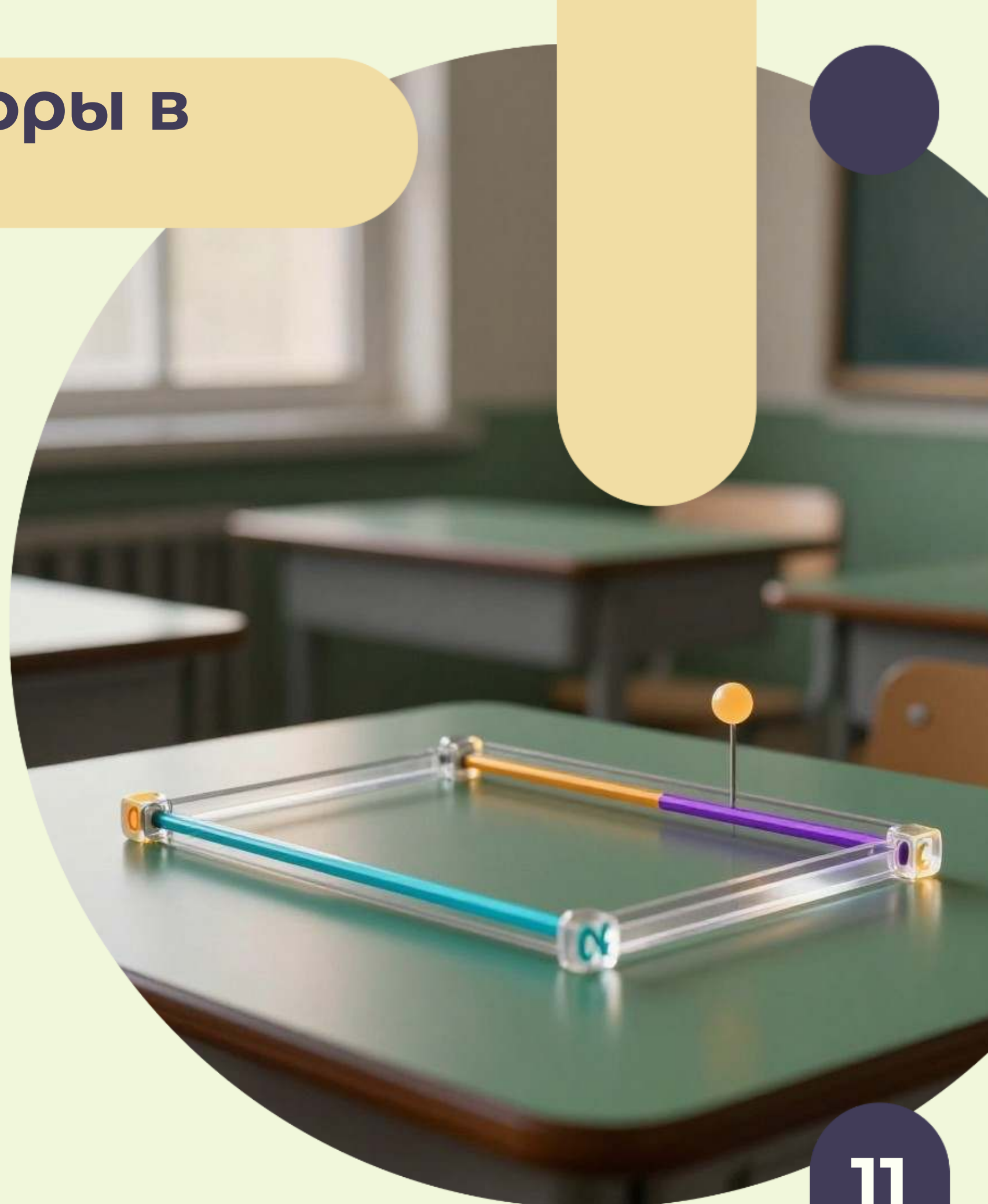
Координаты точки и векторы в пространстве

Координатная система и положение точки

В пространстве вводят прямоугольную систему координат с осями Ox , Oy и Oz , которые взаимно перпендикулярны. Точка задаётся тройкой (x, y, z) — расстояниями с учётом знаков до плоскостей координат. Это позволяет переводить чертёж в числа.

Вектор, длина и угол между направлениями

Вектор в пространстве задают началом и концом: он определяет направление и «связь» между двумя точками. Длина вектора равна $|a| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Для угла между векторами используют скалярное произведение: оно выражает согласованность направлений через координаты.



Углы и расстояния в координатном методе

Для большинства задач переходят к векторам и координатам: длины и скалярное произведение помогают находить углы, а расстояния выражают через формулы для проекций и перпендикуляров.

Диаграмма показывает, что один и тот же аппарат координат удобен для разных «геометрических» целей: угол, расстояние и перпендикулярность решаются в единой вычислительной логике.



Учебные формулы координатного метода (школьный курс геометрии), 2026

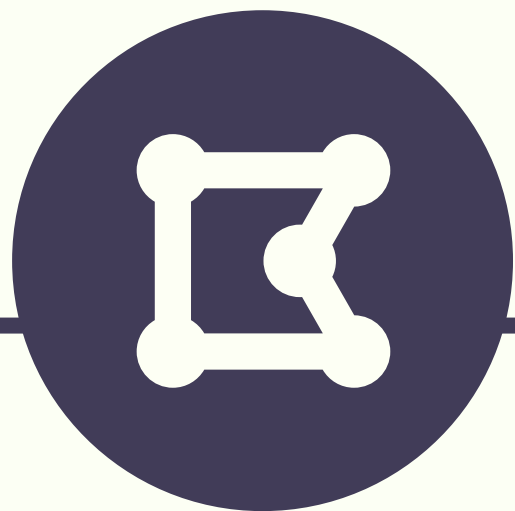
Основные формулы стереометрии для 11 класса

Тело	Площадь/длина	Объём
Куб	$S = 6a^2$	$V = a^3$
Прямоуг. параллелепипед	—	$V = abc$
Призма	$S_{бок} = P_{осн} \cdot h$	$V = S_{осн} \cdot h$
Пирамида	—	$V = \frac{1}{3} \cdot S_{осн} \cdot h$
Круг	$S = \pi r^2$	—
Окружность	$l = 2\pi r$	—
Цилиндр	—	$V = \pi r^2 h$
Конус	—	$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h$
Шар	—	$V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$

Таблица кратко собирает ключевые соотношения для поверхностей и объёмов основных тел: выбор формулы определяется типом фигуры и тем, что дано — размеры основания и высота (или радиус).

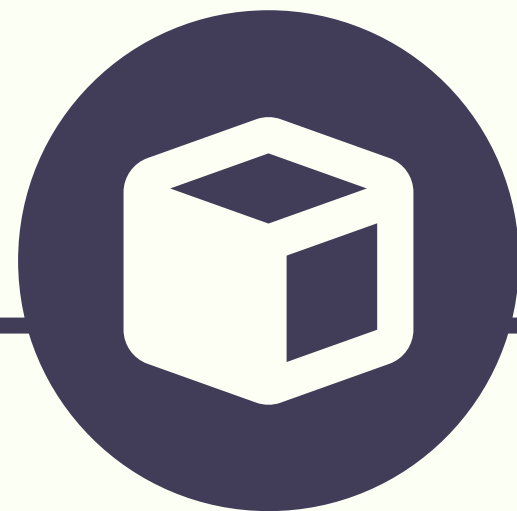
Общий принцип таблицы: объёмы многогранников часто сводятся к «площадь основания × высота» с нужным коэффициентом, а в телах вращения доминирует радиус r .

Теорема Пифагора в пространственных задачах



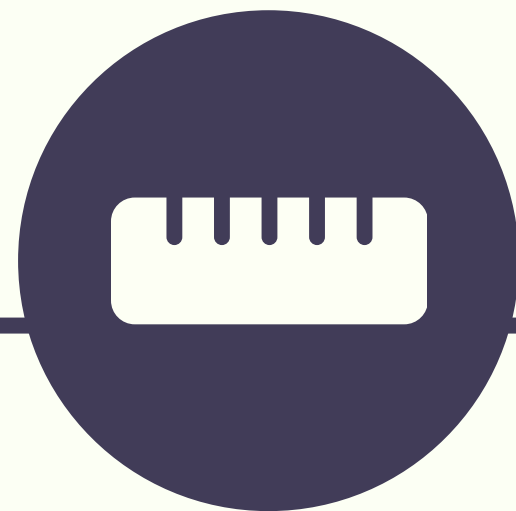
Переход к прямоугольным треугольникам

В пространстве теорема работает через прямоугольные треугольники, которые возникают в проекциях и сечениях. Если удаётся выделить прямой угол, длины становятся вычисляемыми.



Диагонали и наклонные рёбра

При известном прямоугольном треугольнике удобно находить диагонали прямоугольного параллелепипеда и наклонные рёбра. Схема часто состоит из двух шагов: сначала по рёбрам, затем по диагонали.



Высоты и расстояния

Высота фигуры и расстояние между точками обычно превращаются в гипотенузу или катет прямоугольного треугольника. Через перпендикулярность легко составлять нужные уравнения по Пифагору.

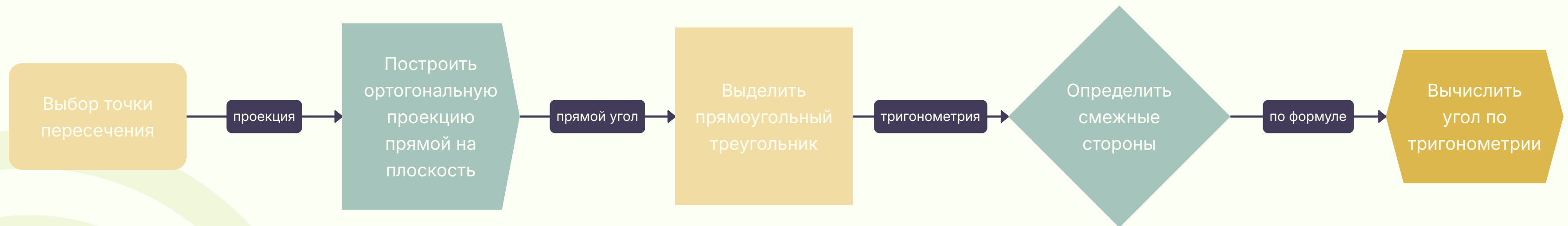


Цепочка последовательных треугольников

Во многих задачах 11 класса одна неизвестная выражается через несколько промежуточных вычислений. Последовательность прямоугольных треугольников позволяет «раскрыть» дистанцию шаг за шагом.

Пошаговый алгоритм: угол между прямой и плоскостью

Идея: угол между прямой и плоскостью равен углу между прямой и её ортогональной проекцией



Окружность, круг, цилиндр, конус и шар



1

Тела вращения получают, «поворачивая» плоскую фигуру вокруг оси. Цилиндр возникает при вращении прямоугольника вокруг стороны, конус — при вращении прямоугольного треугольника вокруг катета, а шар — при вращении полукруга вокруг диаметра.

2

В школьных задачах важно различать параметры: радиус r , высота h и образующая l . Осевое сечение сохраняет геометрию: оно показывает форму, по которой легче применять теоремы и формулы площади.

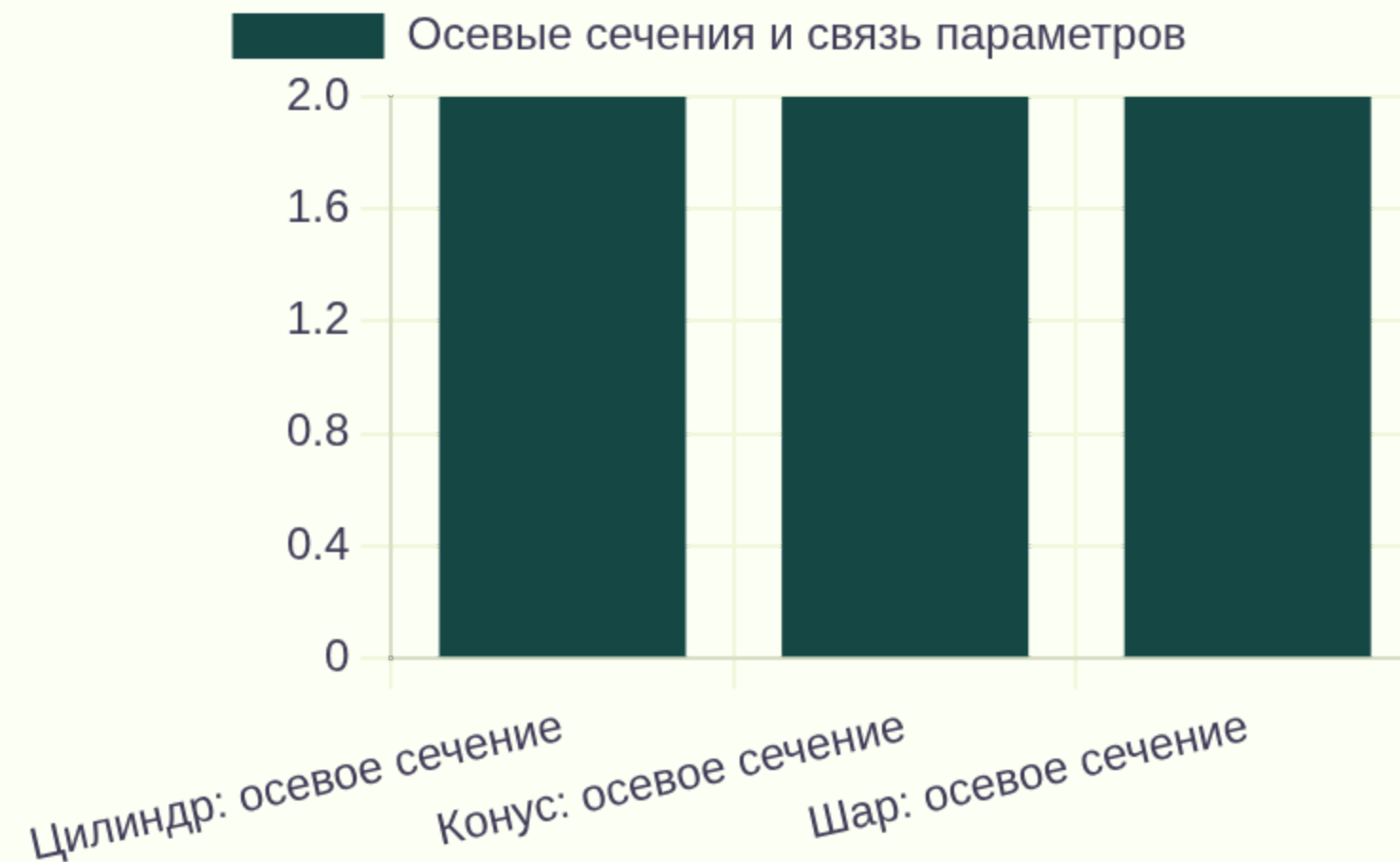
3

Осевое сечение цилиндра — прямоугольник, конуса — равнобедренный треугольник, шара — круг. Благодаря этому объёмная задача часто переводится в плоскую: размеры тела выражают через длины отрезков в сечении.

Сечения тел вращения и их свойства

В осевом сечении сразу видны высота и радиус (или образующая). Это позволяет быстро составлять прямоугольные треугольники и применять Пифагора для нужных отрезков.

Диаграмма подчёркивает общую закономерность: осевое сечение связывает геометрию тела с параметрами, а формулы площади боковой поверхности выводятся через длины в плоской фигуре.



Школьный курс стереометрии;
формулы боковой поверхности
цилиндра и конуса (2026)

Типичные ошибки в задачах по стереометрии

Часто неверно выбирают высоту: берут отрезок «на вид», хотя он должен быть перпендикуляром к основанию или к его продолжению. Из-за этого ошибается и объём, и расстояние.

Нередко путают диагональ грани и диагональ всего тела: в прямоугольных треугольниках неверно выбирают гипотенузу. Уточняйте, какой треугольник действительно прямоугольный.

Ещё одна распространённая ошибка — смешение бокового ребра и образующей у пирамиды и конуса. Формулы различаются, поэтому подстановка «не той» величины даёт систематически неправильный ответ.

В задачах на сечения теряется порядок построения точек пересечения граней: из-за этого полученный многоугольник соответствует другой плоскости. Перед расчётом проверьте замкнутость и количество сторон.

Минимальный набор теорем и фактов для 11 класса

Факт	Что даёт	Тип задач
Признак параллельности прямых и плоскостей	Параллельность	сечения, углы
Признак перпендикулярности прямой и плоскости	Перпендикулярность	расстояния, углы
Теорема о трёх перпендикулярах	Связь перпендикуляров	расстояния, высоты
Расстояние между точками	Формула длины	координатный метод
Длина вектора	$ a $ через координаты	координатные вычисления
Скалярное произведение	Угол и проекция	углы, проекции
Теорема Пифагора	Связь сторон в прямоугольном треугольнике	диагонали, высоты
Формулы объёмов основных тел	Объём по основаниям и высоте	объёмы, комбинированные задачи

В таблице собраны опорные утверждения, которые чаще всего используются в заданиях про параллельность, перпендикулярность, углы, расстояния, а также при вычислении площадей и объёмов.

Набор фактов закрывает главные запросы задач: определить нужные отношения (параллельность/перпендикулярность), свести вычисления к длинам в треугольниках или к координатным формулам.

Школьный курс геометрии
(стереометрия и координатный метод), 2026



Стереометрия становится вычисляемой

Успех в 11 классе определяется умением читать чертёж, выделять опорные элементы и выбирать подходящую теорему или формулу. Итог — уверенное решение задач и перевод геометрии в точные числа, включая сечения, углы, расстояния, площади и объёмы.