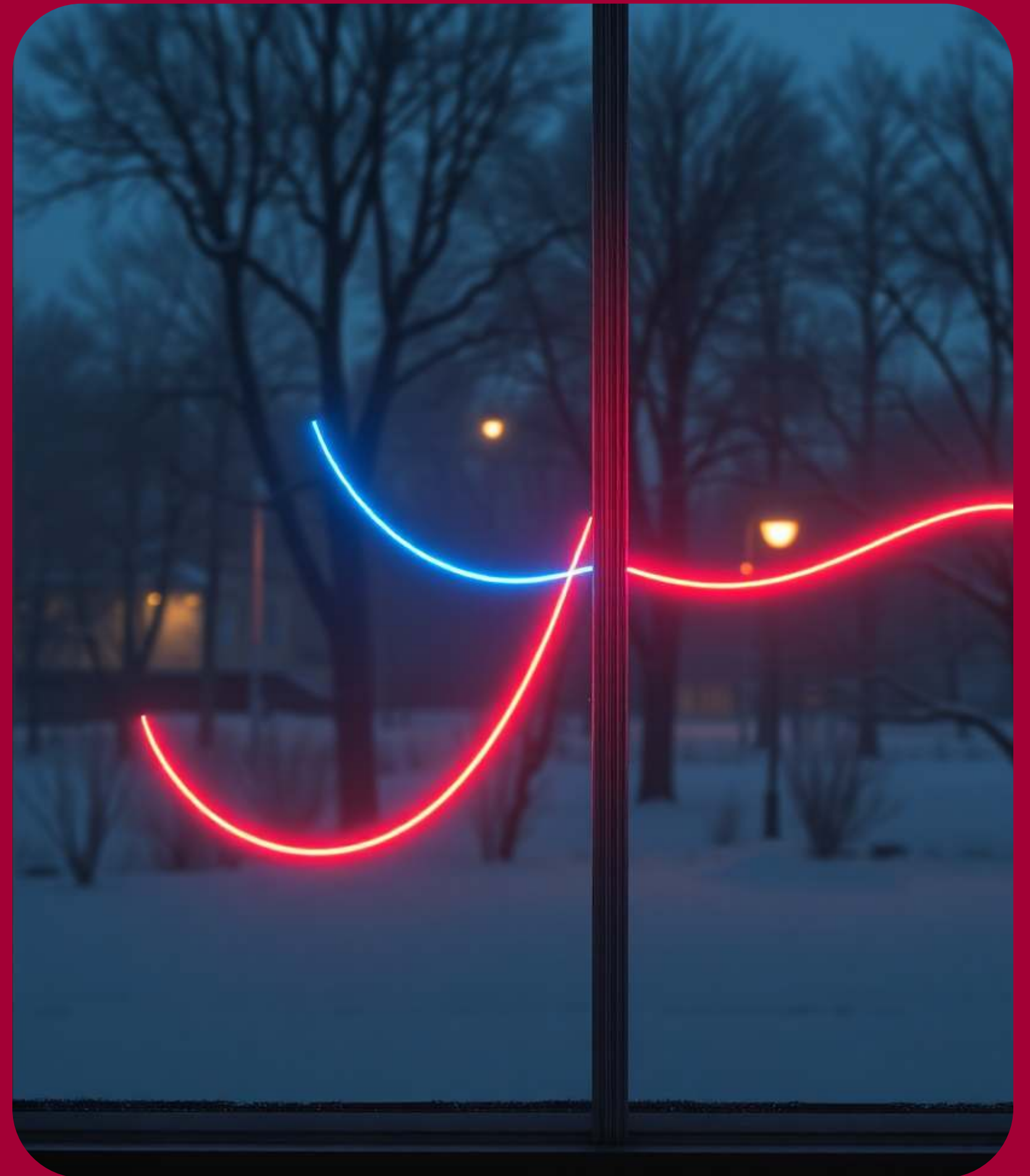


Чётность и нечётность функции: симметрия на графике и в формуле

Учимся узнавать симметрию
функции по формуле и графику.



Зачем это нужно на уроках алгебры

Чётность и нечётность помогают быстрее читать графики, упрощать выражения и проверять ответы. На этой теме удобно тренироваться в подстановке $-x$, а затем применять навык к линейным, квадратным, кубическим и дробным функциям.



Определение чётной функции

01

Главное условие

Функция называется чётной, если при замене x на $-x$ её значение не меняется: $f(-x)=f(x)$. Это верно для всех x из области определения.

02

Что это значит

Если взять две точки с абсциссами x и $-x$, то ординаты окажутся одинаковыми. Поэтому график как будто складывается пополам по вертикальной линии.

03

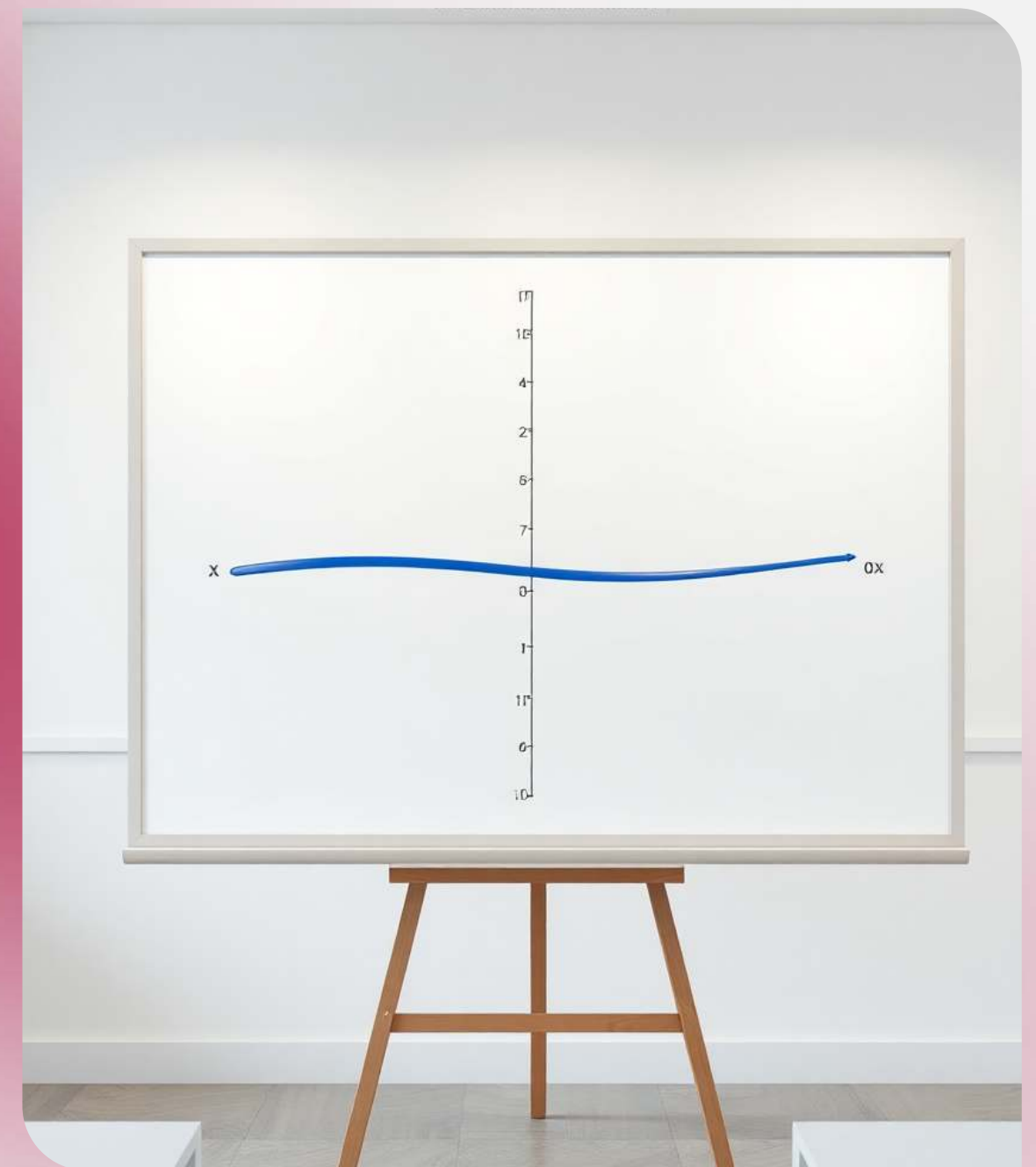
Как выглядит график

График чётной функции симметричен относительно оси Oy . Левая часть полностью повторяет правую после отражения, словно в зеркале.

04

Примеры

К чётным функциям относятся $y=x^2$, $y=x^4$ и $y=|x|$. У всех этих записей сохраняется одинаковое значение при подстановке противоположного числа.



Определение нечётной функции

Главное условие

Функция называется нечётной, если $f(-x) = -f(x)$. После замены x на $-x$ значение меняет знак, но сохраняет ту же величину.

Что происходит с точками

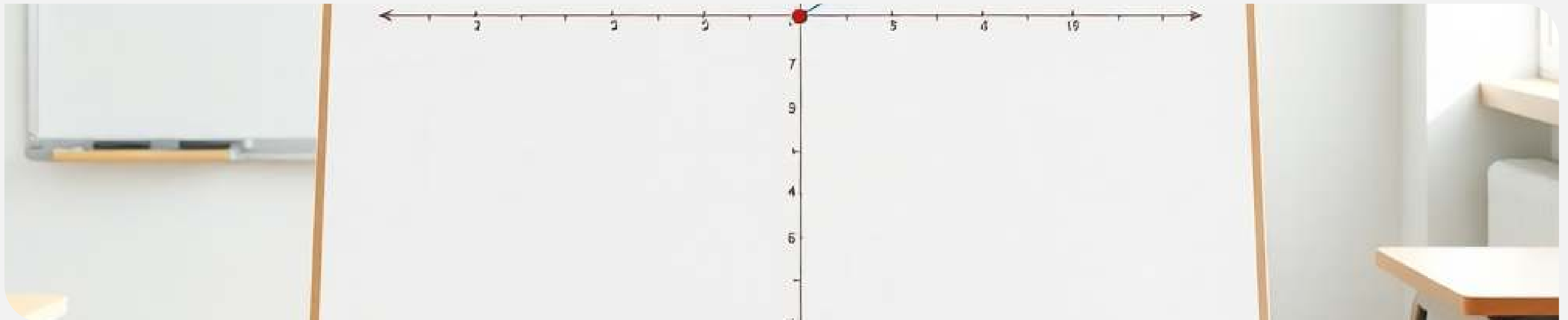
У точек x и $-x$ ординаты равны по модулю, но противоположны по знаку. Поэтому одна точка лежит выше оси, а другая — ниже.

Как выглядит график

График нечётной функции имеет центральную симметрию относительно начала координат. При повороте на 180° он совмещается сам с собой.

Примеры

К нечётным функциям относятся $y=x$, $y=x^3$ и $y=1/x$. Эти функции удобно проверять, сразу сравнивая $f(-x)$ с $-f(x)$.



Сравнение чётных и нечётных функций

Признак	Чётная	Нечётная	Пример
Формула	$f(-x)=f(x)$	$f(-x)=-f(x)$	—
Симметрия	ось Oy	начало координат	—
Примеры	$y=x^2,$ $y= x $	$y=x, y=x^3$	—
Особый случай	—	—	Нулевая функция

Сводная таблица показывает, как формула связана с симметрией графика и значениями в точках x и $-x$.

Главное различие — в формуле проверки и виде симметрии. Нулевая функция выделяется как единственный случай, подходящий сразу под оба признака.

Определения чётной и нечётной функции из курса алгебры 9 класса

Как проверить функцию на чётность и нечётность

Алгоритм проверки по формуле и области определения

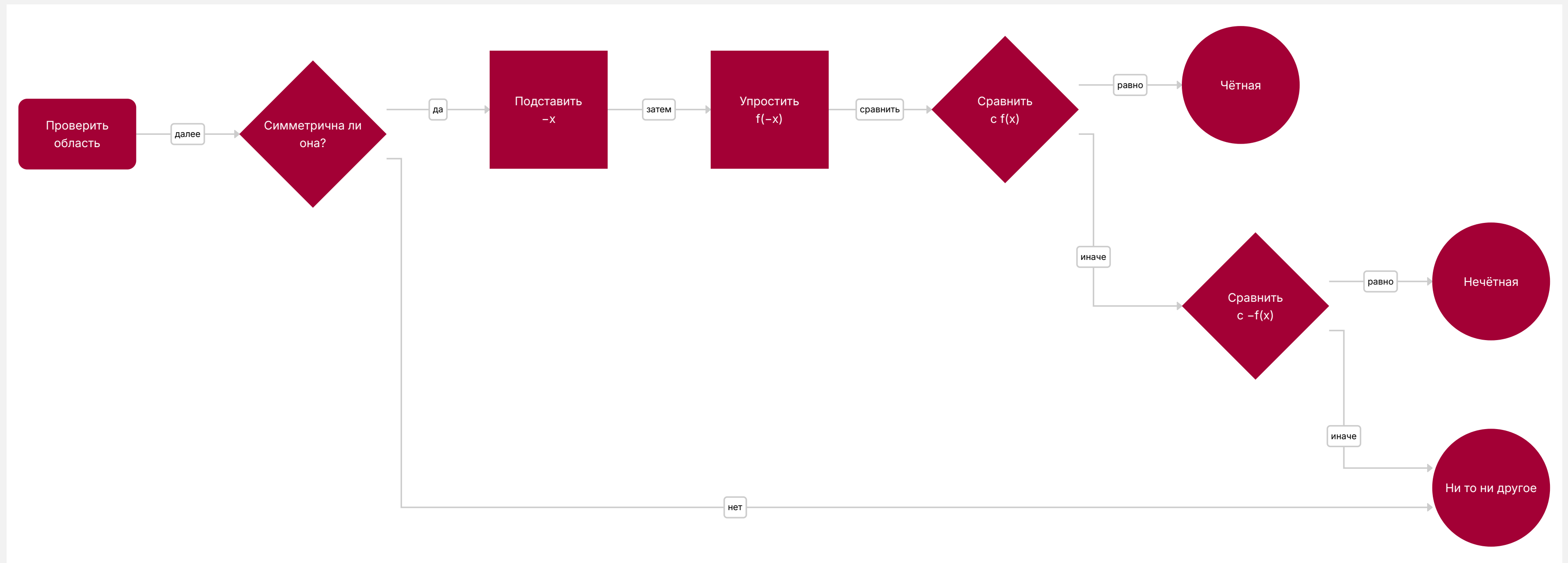
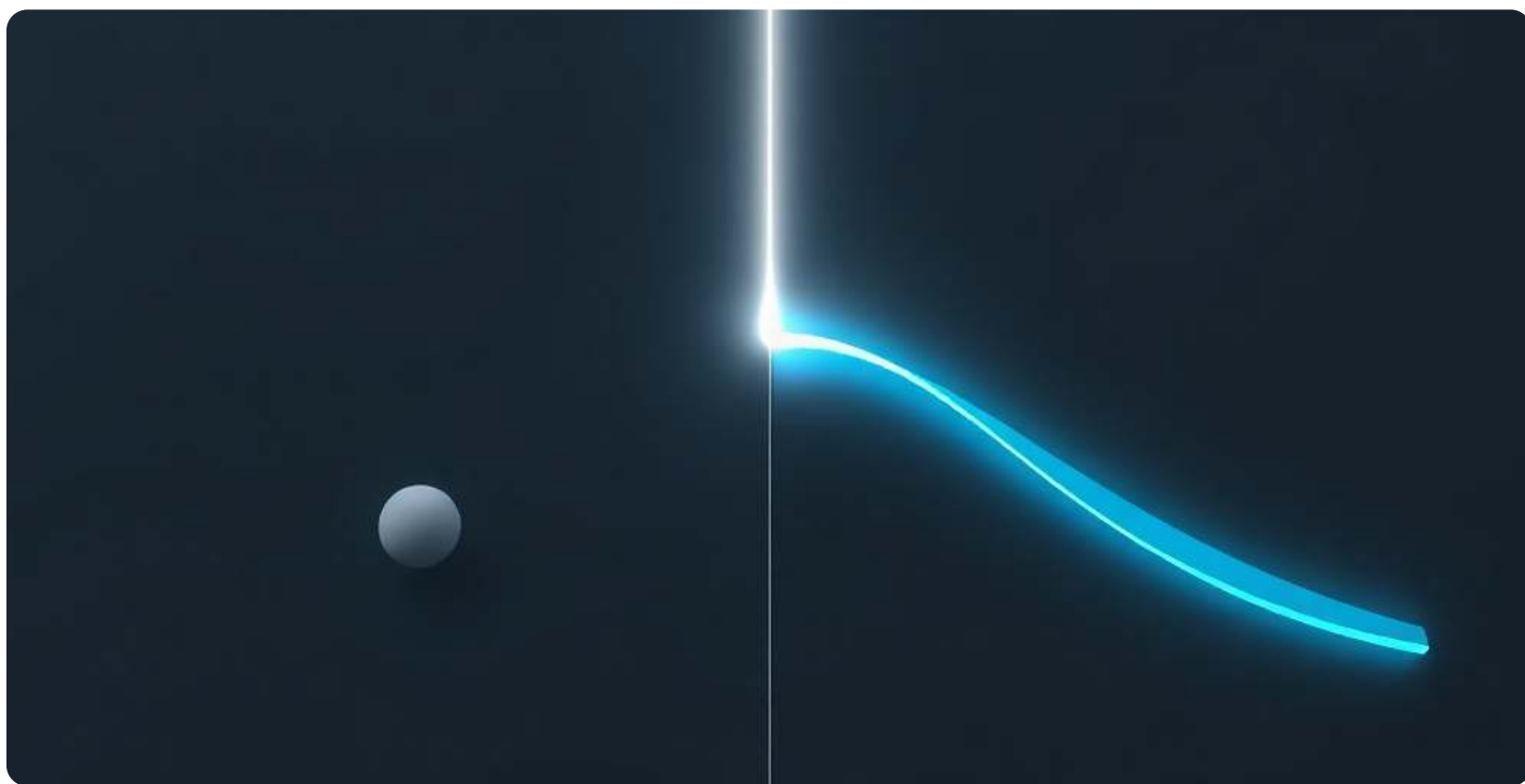


График чётной функции и ось симметрии

Зеркало по оси Oy

График чётной функции удобно представить как рисунок, который отражается сам в себе относительно оси Oy. Если отметить точку слева, то справа найдётся такая же точка на том же расстоянии от оси. Это хорошо видно на параболе $y=x^2$.



Когда формула помогает увидеть картинку

Запись $y=|x|$ тоже показывает симметрию без построения сложных таблиц. Достаточно заметить, что при x и $-x$ значение одинаково, поэтому обе половины графика выглядят одинаково. На иллюстрации можно выделить пары одинаковых точек.

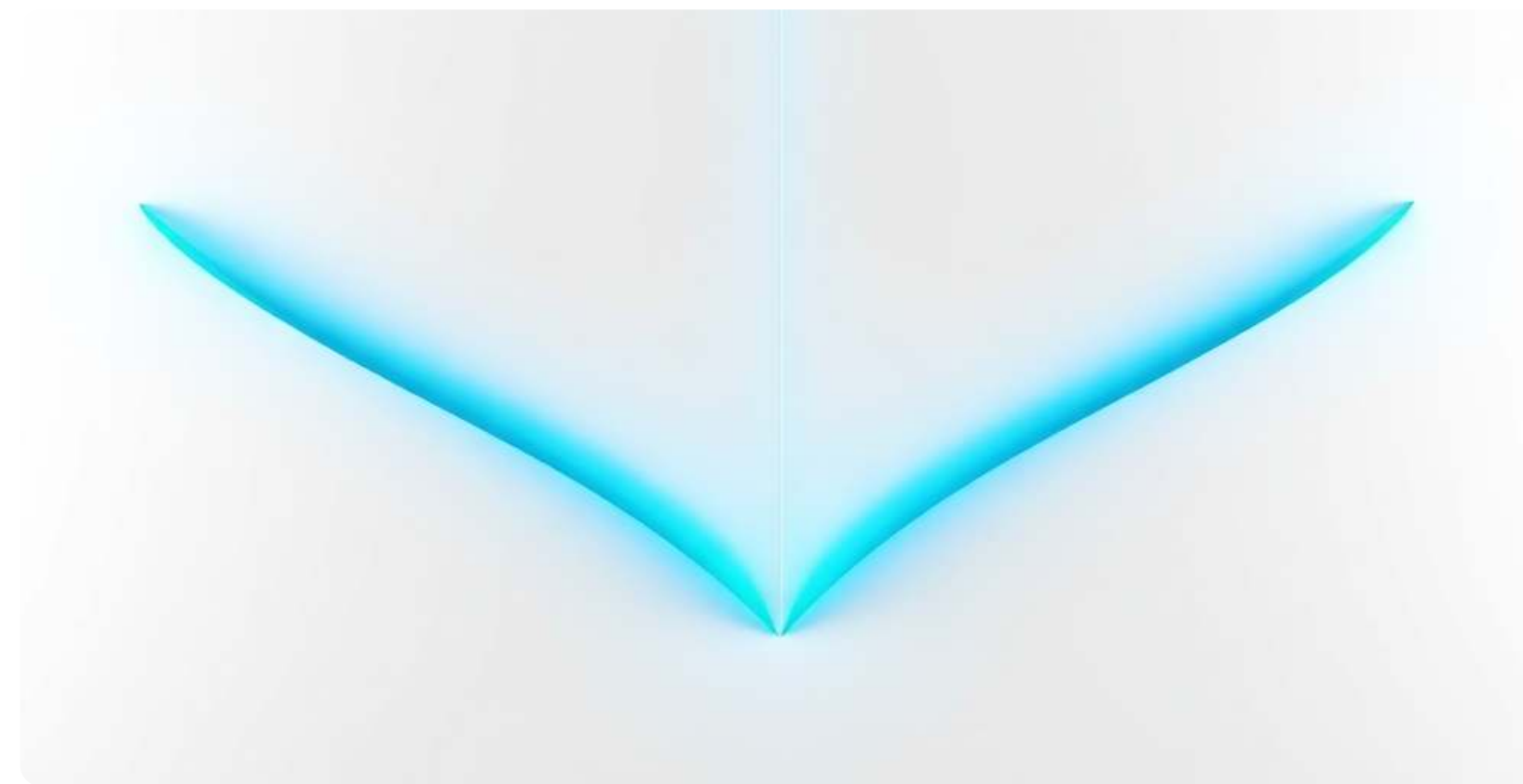


График нечётной функции и центральная симметрия

Поворот вокруг начала координат

График нечётной функции сохраняет вид после поворота на 180° вокруг начала координат. Каждой точке (x, y) соответствует точка $(-x, -y)$, и они как будто уравнивают друг друга. Это особенно заметно на графике $y=x^3$.



Симметрия на примере дробной функции

У функции $y=1/x$ ветви расположены в противоположных четвертях координатной плоскости. Если мысленно повернуть рисунок вокруг начала координат, он совпадёт сам с собой. Такая картинка помогает запомнить связь между знаком аргумента и знаком значения.

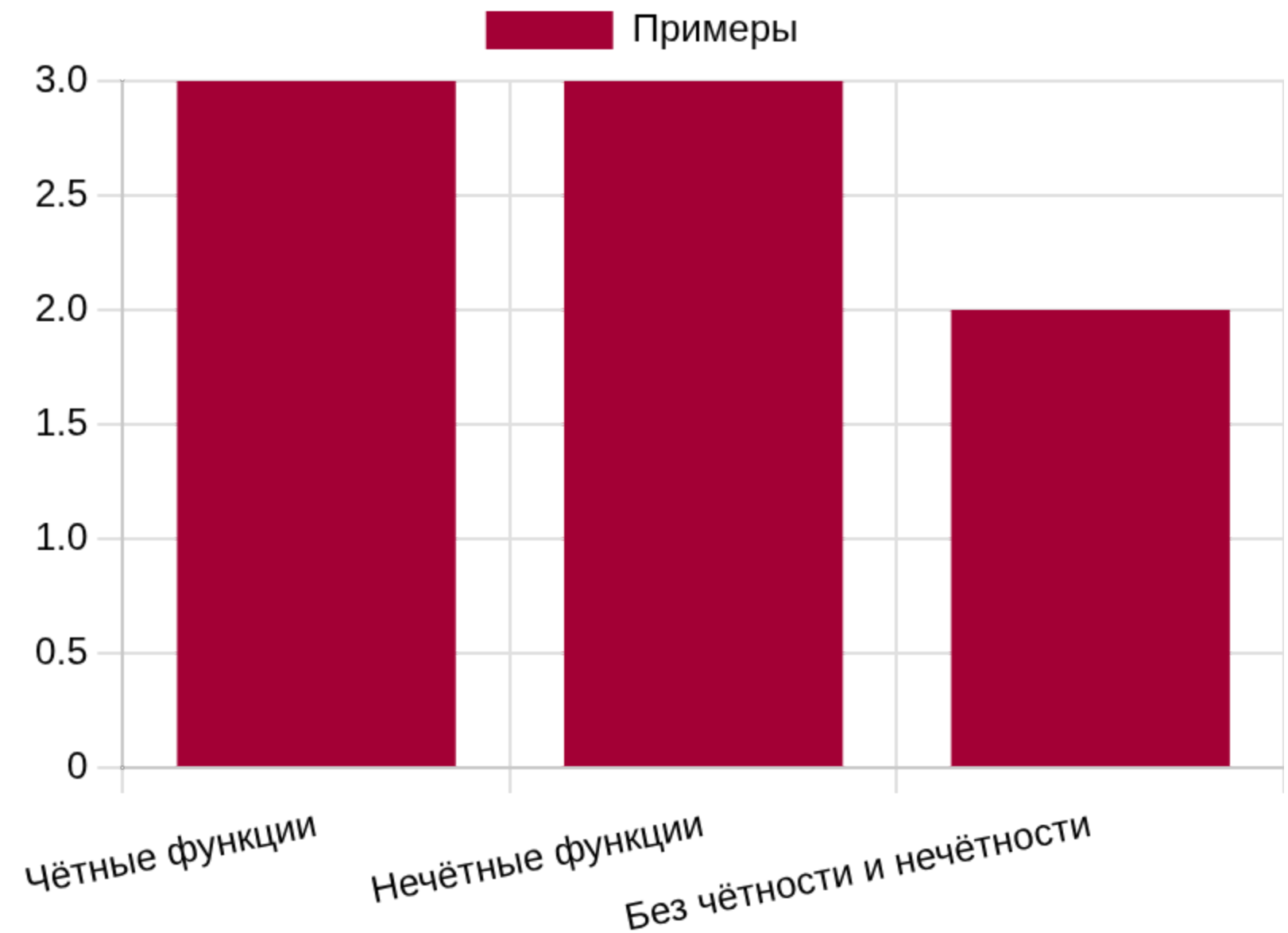


Примеры функций по типу симметрии

Диаграмма показывает, что в наборе есть по три примера чётных и нечётных функций, а также две функции без симметрии.

Даже на небольшом наборе примеров встречаются все три группы. Это помогает не путать симметрию графика с внешним видом записи.

Примеры функций из материала урока по теме «Чётность и нечётность функции»



2

значения — x и $-x$ — должны присутствовать в области определения, чтобы проверка была полной.

Без пары противоположных значений нельзя сравнить $f(x)$ и $f(-x)$. Поэтому симметрия области определения — обязательное условие проверки.

Определение чётной и нечётной функции в школьном курсе алгебры

Функции, которые не являются ни чётными, ни нечётными

○ Нет подходящего равенства

Если после замены x на $-x$ не получается ни $f(x)$, ни $-f(x)$, функция не относится ни к одному типу. Важно проверять именно полное выражение, а не отдельные числа.

○ Симметрии на графике нет

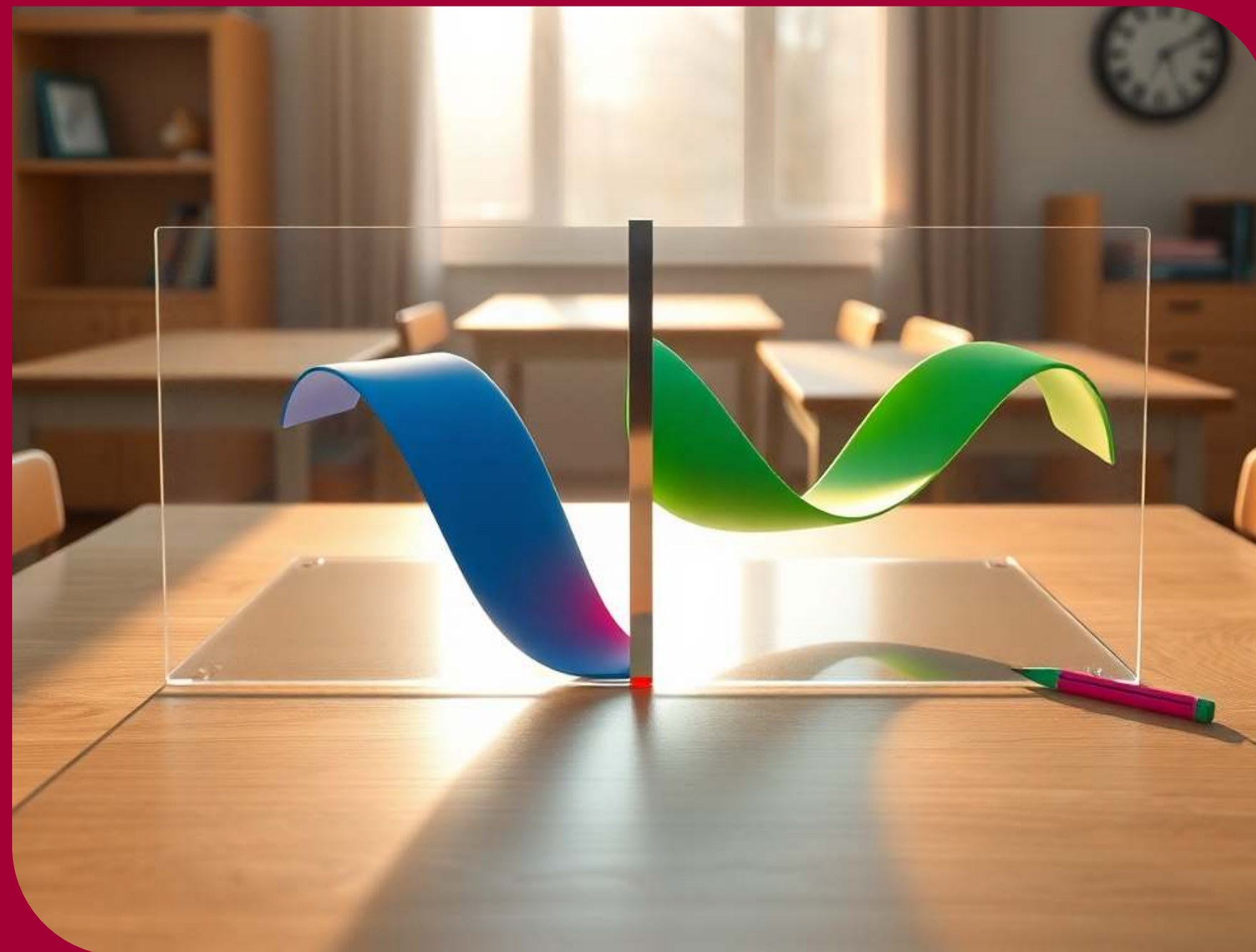
У таких функций обычно отсутствует отражение относительно оси Oy и центральная симметрия относительно начала координат. Поэтому их график нельзя получить простым отражением или поворотом.

○ Примеры из урока

К этой группе относятся $y=x^2+x$, $y=x^3+x^2$ и $y=\sqrt{(x^2+1)}+x$. Во всех случаях подстановка $-x$ изменяет формулу так, что условие чётности или нечётности не выполняется.

○ Почему это важно

Понимание этой группы помогает не делать поспешный вывод по виду записи. Даже красивое выражение может не иметь нужной симметрии, если проверка показывает другое поведение функции.



Проверка функций на конкретных примерах

Функция	$f(-x)$	Вывод
$y=x^2$	x^2	чётная
$y=x^3$	$-x^3$	нечётная
$y=x^2+x$	x^2-x	ни то ни другое
$y= x $	$ x $	чётная

Сравнение показывает, как работает проверка по подстановке $-x$ и почему итог зависит от результата упрощения.

Вывод определяется сравнением $f(-x)$ с $f(x)$ и $-f(x)$, а не внешним видом записи.

Примеры из школьного курса алгебры по теме чётности и нечётности функций.

1

функция одновременно является и чётной, и нечётной

Нулевая функция — единственный случай, когда выполняются оба условия сразу. Это удобное исключение помогает точнее формулировать правила и не путать общий случай с особым.

Свойства нулевой функции из определения чётности и нечётности.

Как степень и вид выражения связаны с чётностью

01

Только чётные степени

Если в записи встречаются только чётные степени, часто получается чётная функция. При подстановке $-x$ знак не меняется, поэтому формула остаётся прежней, как у $y=x^2$ и $y=x^4$.

02

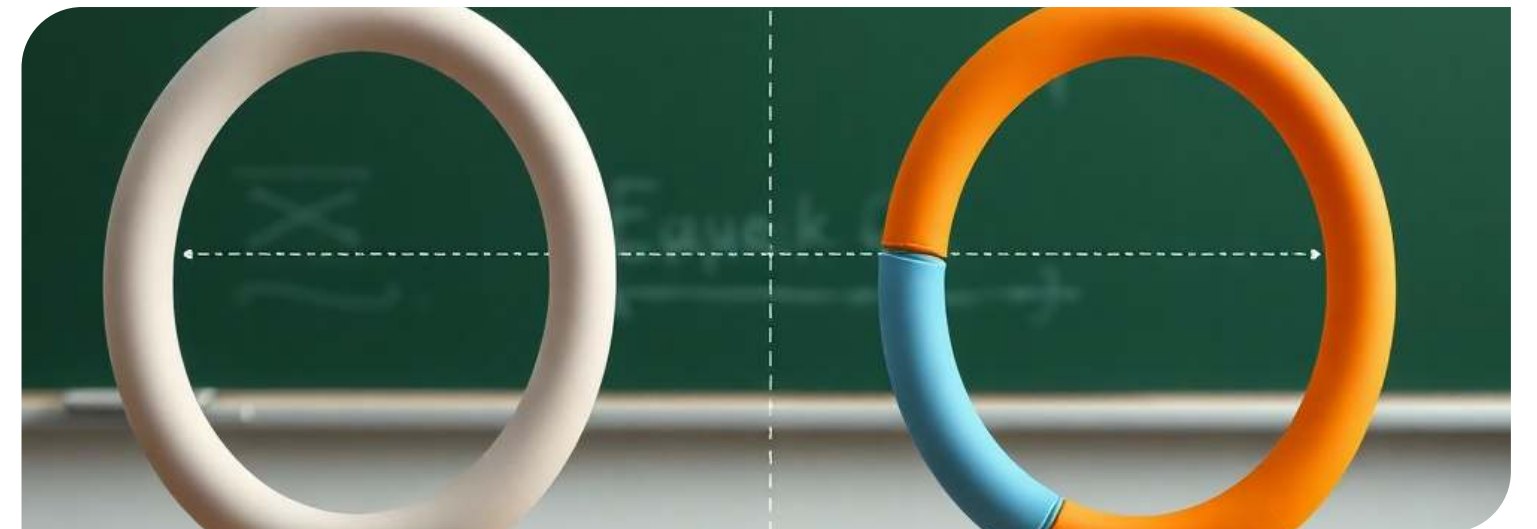
Только нечётные степени

Если в выражении присутствуют только нечётные степени, часто выходит нечётная функция. После замены x на $-x$ всё выражение меняет знак, как у $y=x$ и $y=x^3$.

03

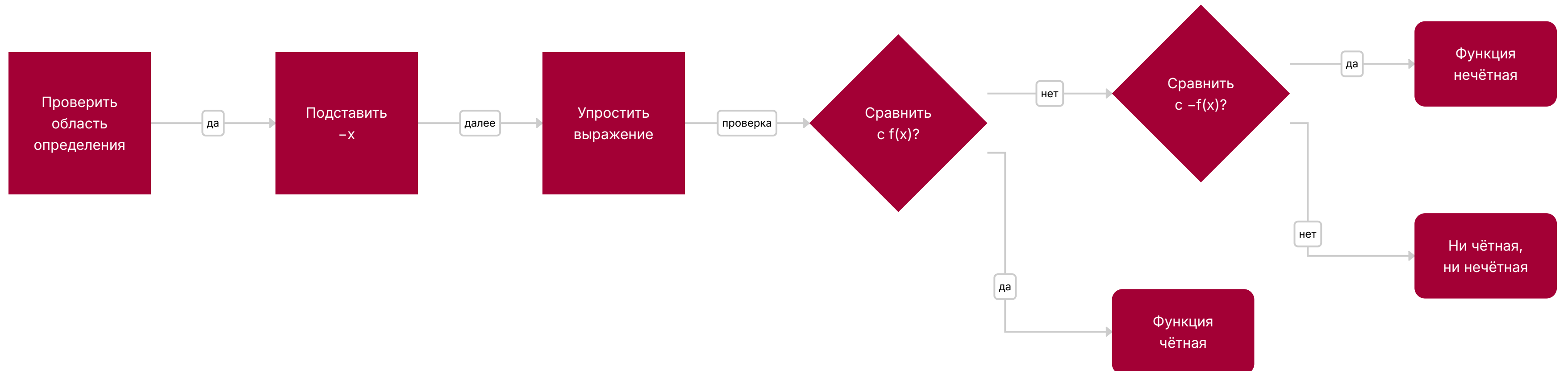
Смешанные выражения

Когда в формуле есть и чётные, и нечётные слагаемые, симметрия обычно нарушается. Тогда нужно обязательно выполнить проверку, потому что по виду записи тип функции определить нельзя.



Как не ошибиться при определении типа функции

Последовательность проверки по формуле и области определения.



Распределение рассмотренных функций по видам симметрии

Диаграмма основана на примерах, разобранных на уроке. Она показывает, что в наборе есть не только симметричные функции, но и выражения без нужной симметрии.

Число примеров у двух основных групп совпадает, а третья группа напоминает, что не каждая функция имеет чётность или нечётность.

Подсчёт примеров из материалов урока по теме чётности и нечётности.



Типичные ошибки при проверке функции



Забывают подставить $-x$

Ученики часто меняют x на x , а не на $-x$. В таком случае проверка теряет смысл, потому что сравнение проводится не с нужным выражением.



Не раскрывают скобки

После подстановки минус может оказаться внутри скобок, и его нужно правильно раскрыть. Если этого не сделать, легко получить неверный знак и ошибочный вывод.



Теряют знак минуса

При вычислениях минус перед выражением нередко пропадает, особенно в дробях и многочленах. Тогда $f(-x)$ становится неправильно упрощённой записью, а не результатом проверки.



Не смотрят область определения

Если область не симметрична относительно нуля, сравнение x и $-x$ невозможно для всех значений. Без этого нельзя уверенно говорить о чётности или нечётности.



Судят по одному примеру

Нельзя делать вывод по одному совпавшему значению. Свойство должно выполняться для всех x из области определения, иначе заключение будет неверным.

Памятка для быстрой проверки на уроке

Вопрос	Да	Нет
Есть пары x и $-x$?	проверять дальше	вывод нельзя
$f(-x)=f(x)$?	чётная	смотреть дальше
$f(-x)=-f(x)$?	нечётная	ни то ни другое

Короткие вопросы помогают быстро определить тип функции без лишних вычислений.

Сначала проверяют область определения, затем сравнивают $f(-x)$ с $f(x)$ и $-f(x)$, после чего делают окончательный вывод.

Алгоритм проверки чётности и нечётности функции из школьного курса алгебры.

Связь темы с другими разделами алгебры



Графики функций

Чётность и нечётность помогают быстрее понимать вид графика и искать симметрию. Это особенно полезно при чтении рисунка без подробных вычислений.



Преобразование формул

При подстановке $-x$ нужно аккуратно раскрывать скобки и упрощать выражения. Этот навык нужен не только здесь, но и во многих других темах алгебры.



Квадратные и кубические функции

Тема помогает лучше различать поведение парабол, кубических графиков и дробных функций. Такие примеры часто встречаются в задачах 9 класса.



Координатная плоскость

Понимание симметрии облегчает работу с точками и графиками на плоскости. Ученику проще предсказывать положение второй точки по первой.

Главный вывод по теме

Чётность и нечётность связывают формулу функции с её графиком: одно равенство даёт симметрию относительно оси Oy , другое — относительно начала координат. Проверка всегда начинается с области определения.