

Свойства и графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$

Периодические функции с асимптотами и симметрией

Зачем изучать $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ в 10 классе

Тангенс и котангенс связывают тригонометрию с графиками, стандартными углами и уравнениями. Эти функции помогают уверенно работать с областью определения, периодом, асимптотами и монотонностью.



Определение функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$

○ Тангенс

Функция $y = \operatorname{tg} x$ определяется как отношение $\sin x$ к $\cos x$, поэтому она существует только там, где $\cos x$ не равен нулю. Это сразу задаёт её особые точки.

○ Котангенс

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ равна отношению $\cos x$ к $\sin x$ и не определена при $\sin x = 0$. Из-за этого её график тоже распадается на отдельные ветви.

○ Точки разрыва

Для тангенса запрещены значения $x = \pi/2 + \pi k$, а для котангенса — $x = \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. В этих точках появляются разрывы и вертикальные асимптоты.

○ Геометрический смысл

Обе функции удобно понимать через единичную окружность: они выражают отношение координат точки, а значит тесно связаны с углом поворота и направлением луча из начала координат.

Сравнение основных свойств функций

Таблица показывает, чем похожи $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ и чем они отличаются.

Общие черты — период π , нечётность и множество значений $\mathbb{R}$; главное различие — сдвиг нулей и асимптот на $\pi/2$.

Свойство	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
Область определения	$\mathbb{R}$ без $\pi/2 + \pi k$	$\mathbb{R}$ без πk
Нули	$x = \pi k$	$x = \pi/2 + \pi k$
Ветви	возрастают	убывают

Тангенс на единичной окружности

○ Отношение координат

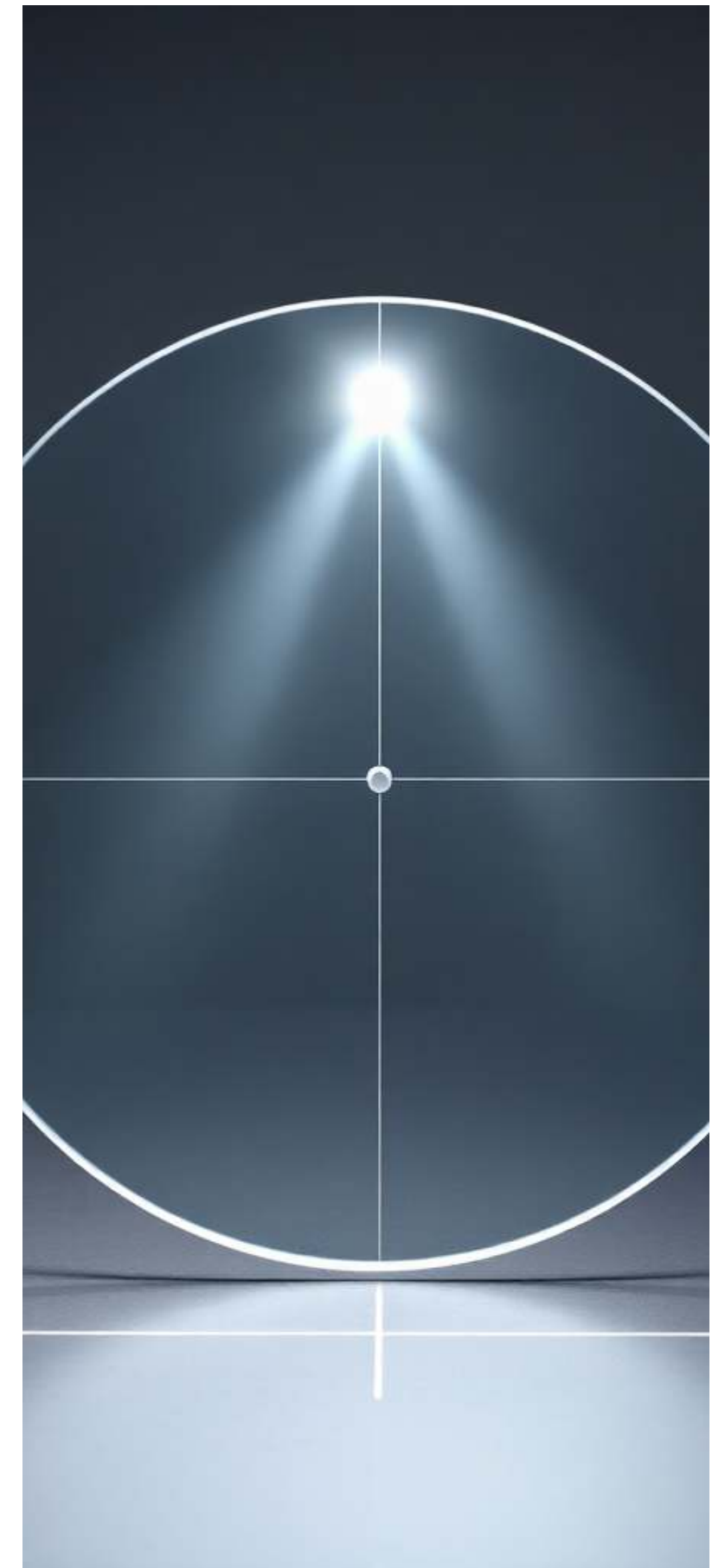
Для точки на единичной окружности $\operatorname{tg} \alpha$ равен y/x . Поэтому тангенс удобно рассматривать как отношение ординаты к абсциссе точки, соответствующей углу α .

○ Проблемные углы

Когда точка попадает на вертикальную ось, абсцисса равна нулю, и тангенс не определён. Это происходит при углах $\pi/2$ и $3\pi/2$, где график разрывается.

○ Связь с наклоном

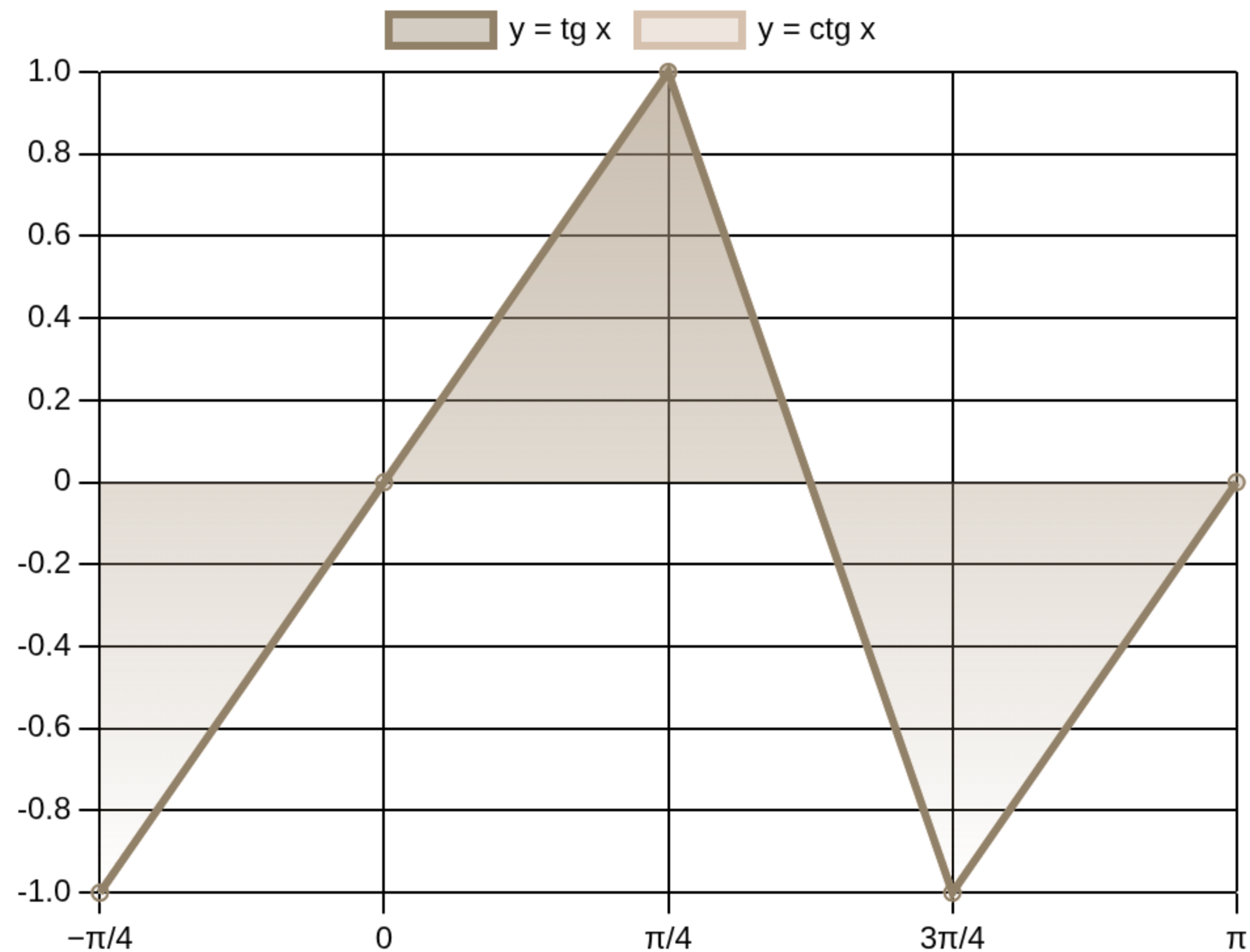
Чем больше угол наклона луча к оси Ox , тем быстрее меняется значение тангенса. Именно поэтому график резко уходит к бесконечности у вертикальных направлений.



Периодичность графиков $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$

На выбранных опорных точках виден повтор одинакового рисунка через промежуток длиной π .

Если одна и та же форма повторяется через π , значит именно π является периодом функций.



Опорные значения $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ из стандартных углов, школьный курс алгебры

$\pi/2$

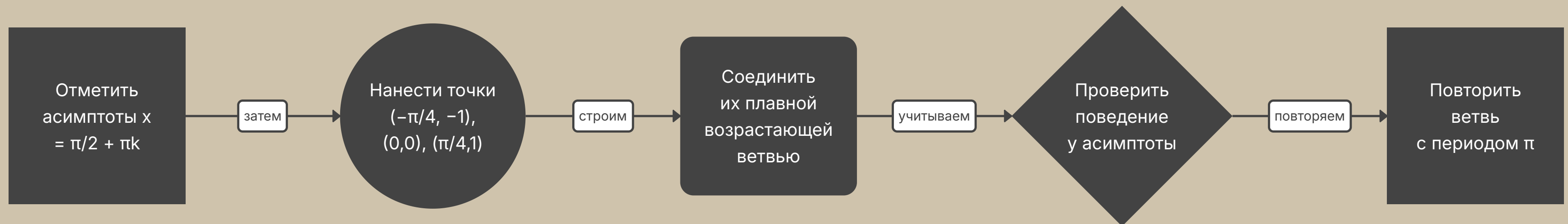
— сдвиг, который разделяет точки разрыва $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$.

Именно этот сдвиг показывает, что обе функции исключают разные углы, но принимают любые действительные значения.

Свойства функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$, школьный курс алгебры

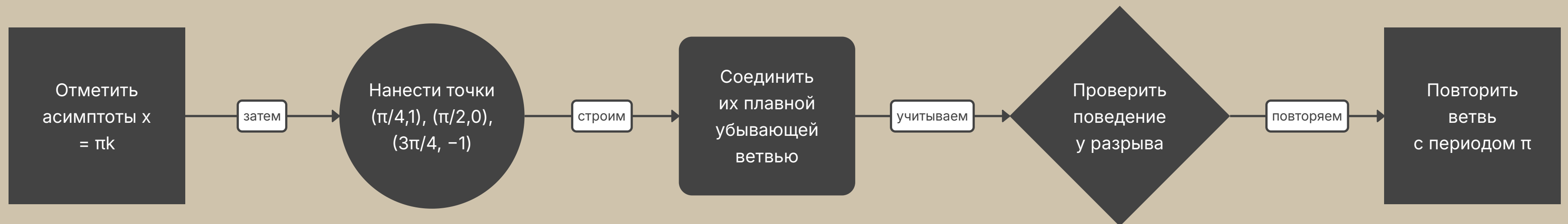
Как построить график $y = \operatorname{tg} x$

Алгоритм построения по опорным точкам, асимптотам и периоду



Как построить график $y = \operatorname{ctg} x$

Алгоритм построения по опорным точкам, асимптотам и периоду



Монотонность функций на промежутках определения

01

Тангенс возрастает

На каждом промежутке между асимптотами график $y = \operatorname{tg} x$ идёт вверх. Это помогает быстро узнавать функцию на рисунке и сравнивать её значения без вычислений в нескольких точках.

02

Котангенс убывает

График $y = \operatorname{ctg} x$, наоборот, на каждом промежутке определения спускается сверху вниз. Такое направление ветвей служит самым надёжным признаком при различении двух функций.

03

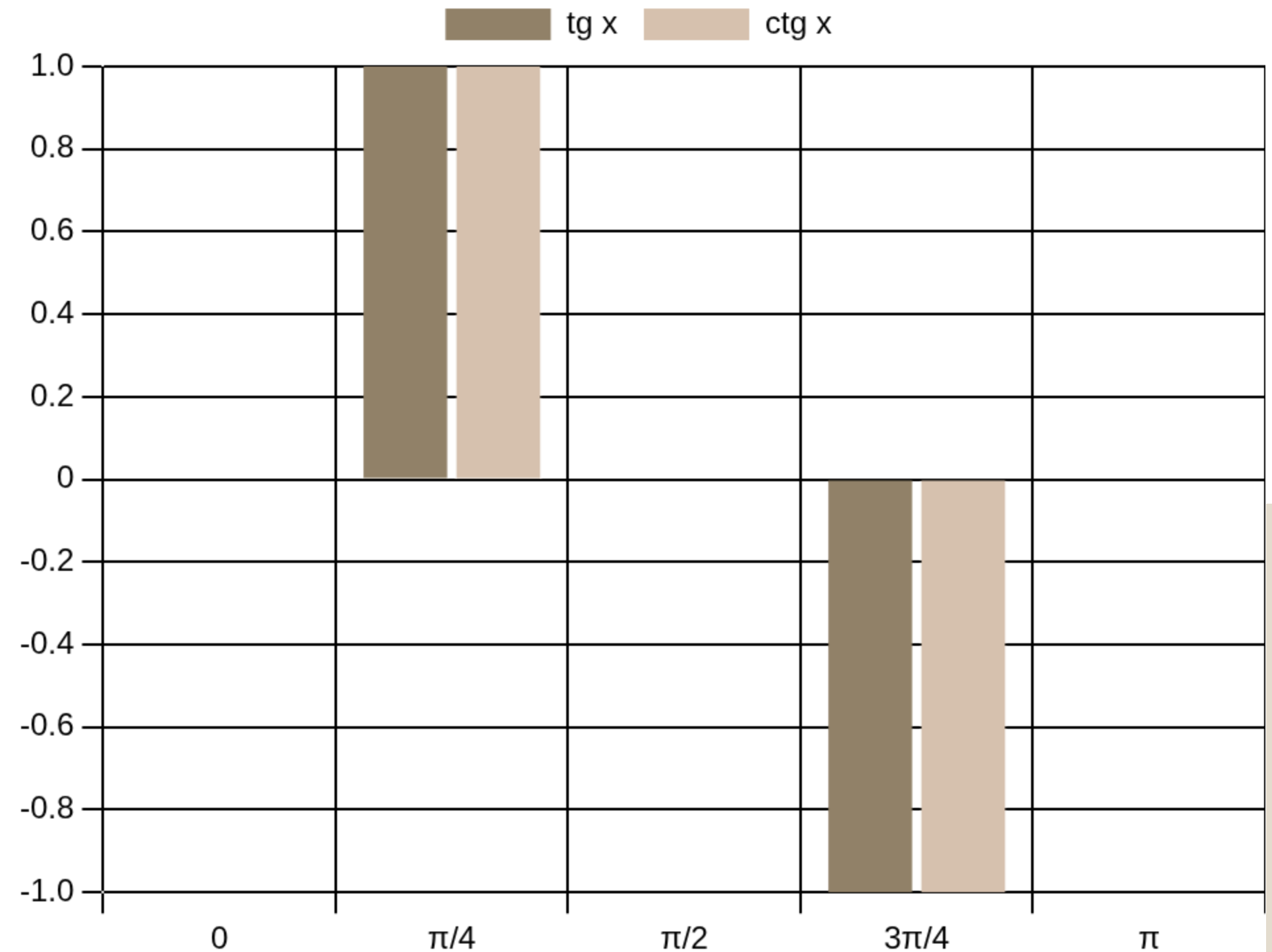
Практическое значение

Зная монотонность, удобно решать неравенства и проверять расположение корней графическим способом. Один взгляд на ветвь часто даёт больше информации, чем длинные алгебраические преобразования.

Нули, знаки и характерные значения

Опорные точки помогают быстро увидеть смену знака и расположение нулей на каждом промежутке длиной π .

Значения ± 1 удобно использовать как ориентиры: они показывают форму ветвей и помогают не перепутать $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$.



Учебные значения функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ в точках $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$.

Нечётность и симметрия графиков

○ Симметрия относительно начала

Так как $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$, каждой точке графика соответствует симметричная точка с противоположными координатами. Поэтому обе кривые сохраняют центральную симметрию.

○ Связь между функциями

Тангенс и котангенс взаимно обратны там, где обе функции определены: $\operatorname{ctg} x = 1 / \operatorname{tg} x$. Из-за этого их ветви имеют похожий вид, но по-разному расположены относительно осей.

○ Как это помогает на графике

Если отметить одну точку на ветви, симметричная точка сразу находится отражением через начало координат. Это ускоряет построение и позволяет проверять правильность рисунка без вычислений.



Стандартные значения тангенса и котангенса

x	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
0	0	не опр.
$\pi/4$	1	1
$\pi/2$	не опр.	0

Таблица показывает самые употребимые значения на острых и прямом углах; именно они чаще всего встречаются в построении графиков.

Значения в точках 0, $\pi/4$ и $\pi/2$ задают основные опорные точки и помогают быстро восстанавливать форму графиков и решать простые уравнения.

Стандартные значения тригонометрических функций.

Вертикальные асимптоты и поведение у разрывов



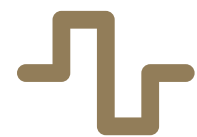
Подход к асимптоте

У $\operatorname{tg} x$ значения резко растут при приближении к $x = \pi/2 + \pi k$ слева и падают справа. Это создаёт разрыв и отделяет одну ветвь от другой.



Разрывы котангенса

У $\operatorname{ctg} x$ асимптоты проходят через $x = \pi k$. Справа функция стремится к $+\infty$, а слева — к $-\infty$, поэтому соседние ветви никогда не соединяются в одну линию.



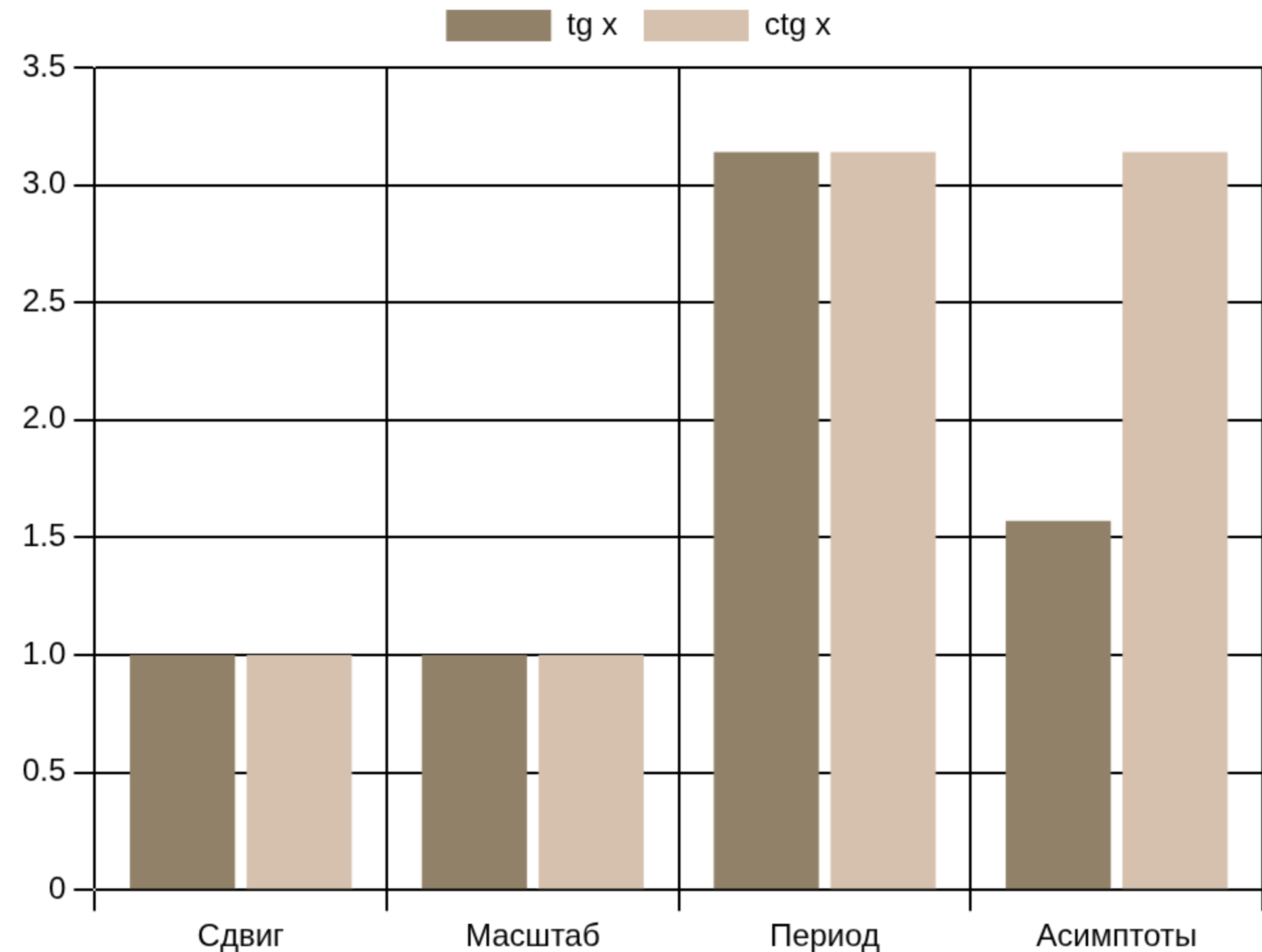
Форма графика

Каждая ветвь живёт только на своём промежутке определения и повторяется через π . Именно асимптоты задают ритм графика и делают его узнаваемым на рисунке.

Преобразования графиков $\text{tg } x$ и $\text{ctg } x$

Параметры формул меняют не только положение графика, но и расстояние между асимптотами, поэтому важно отслеживать каждый коэффициент отдельно.

Сдвиги, растяжения и отражения изменяют форму предсказуемо: сначала анализируют параметры, затем переносят опорные точки и асимптоты.



Свойства преобразований функций вида $y=A \cdot f(Bx-a)+b$.

Решение простейших уравнений с $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$

1

Найти опорное значение

Сначала заменяют уравнение стандартным значением a и вспоминают соответствующий угол. Для школьных задач особенно удобны 0 , ± 1 , $\sqrt{3}$ и $1/\sqrt{3}$, потому что они связаны с известными углами.

2

Записать главное решение

Для $\operatorname{tg} x = a$ находят $x = \operatorname{arctg} a$, а для $\operatorname{ctg} x = a$ — $x = \operatorname{arcctg} a$. Это даёт одно базовое решение на выбранном промежутке.

3

Учесть период

Поскольку обе функции периодичны с периодом π , к найденному углу добавляют πk , где $k \in \mathbb{Z}$. Так получают все решения, а не только одно.

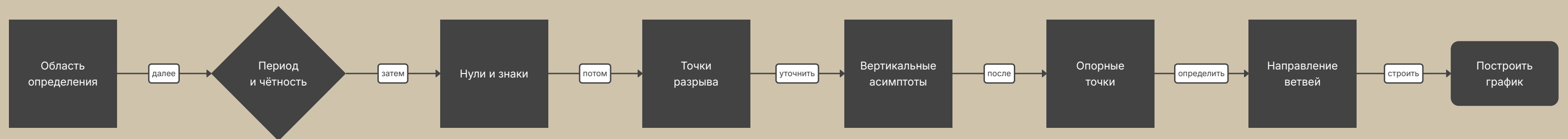
4

Проверить область определения

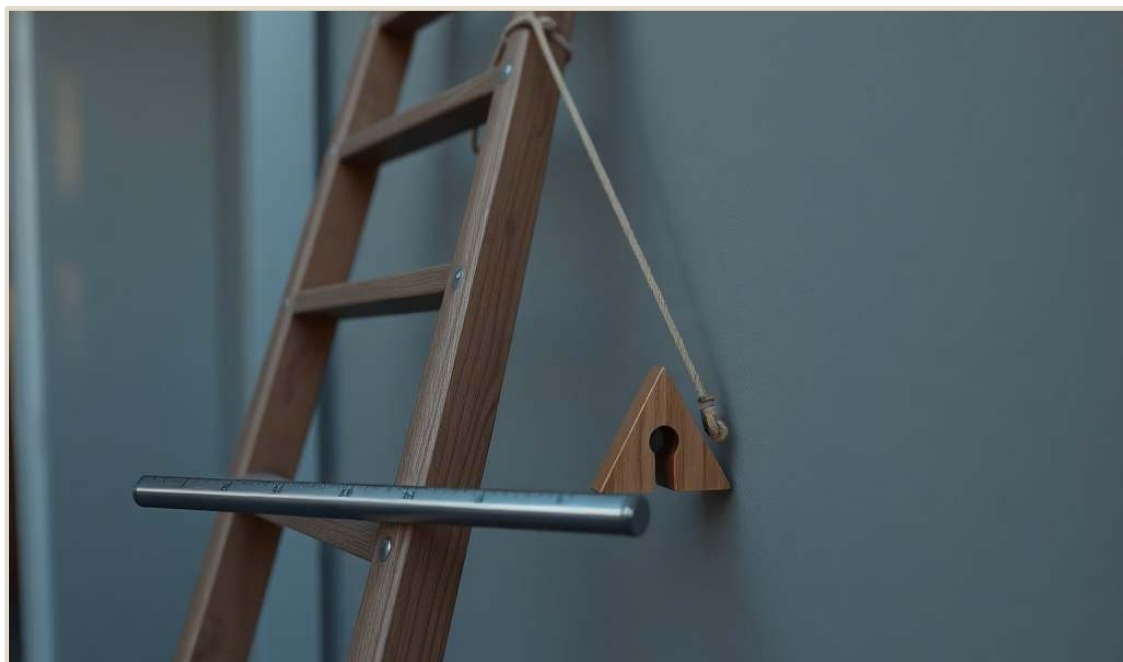
При записи ответа важно убедиться, что найденные значения не попадают в точки разрыва. Иначе формально верная запись может не соответствовать исходному уравнению.

Алгоритм исследования графика тригонометрической функции

Последовательность шагов для анализа $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ и их преобразований

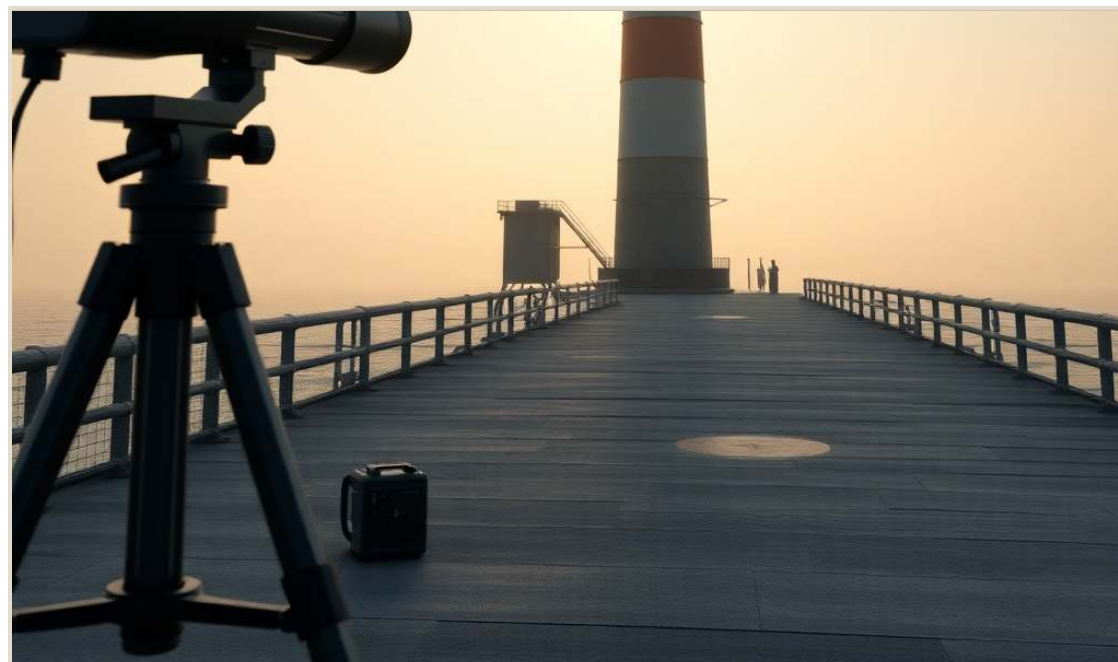


Применение тангенса и котангенса в задачах



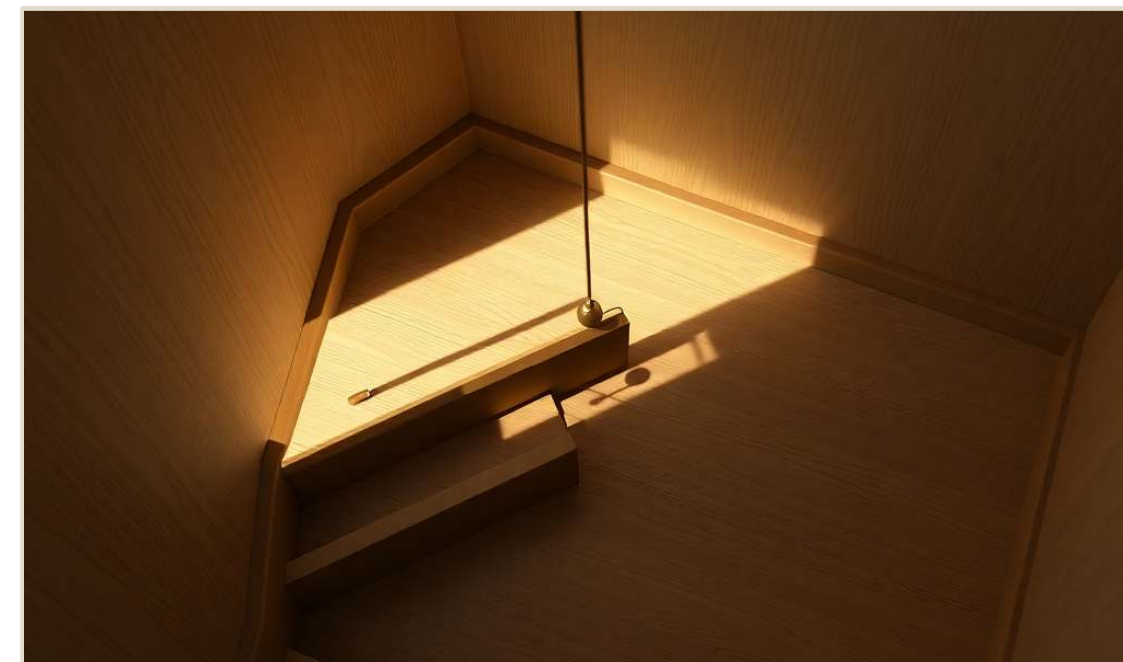
Угол и наклон прямой

Тангенс помогает связать угол наклона с отношением катетов в прямоугольном треугольнике. В задачах на геометрию и физику это удобно, когда нужно перейти от длины к углу или наоборот.



Высота и расстояние

При вычислении высоты объекта по известному расстоянию до него тангенс позволяет построить наглядную модель. Достаточно знать угол наблюдения и один катет, чтобы найти второй без сложных преобразований.



Обратное отношение сторон

Котангенс особенно удобен там, где известен прилежащий катет и нужно выразить противолежащий. Он часто появляется в задачах с углами при основании и при анализе треугольников.

Сводка различий между $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$

Краткое сравнение позволяет не путать нули, асимптоты и направление ветвей при чтении или построении графика.

Главное различие — в сдвиге на $\pi/2$: там, где у одной функции нули, у другой находятся асимптоты, и наоборот.

Признак	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
Нули	πk	$\pi/2 + \pi k$
Асимптоты	$\pi/2 + \pi k$	πk
Монотонность	возрастает	убывает

Свойства функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$.

Тангенс и котангенс: две похожие, но не одинаковые функции

Тангенс и котангенс имеют общий период π , но отличаются положением нулей, асимптот и направлением ветвей. Знание их свойств делает графики понятными и задачные решения — уверенными.