

Кратчайшие пути на плоскости

Прямая, отражение, граф и граница

Где встречаются кратчайшие пути



Эта тема встречается в физике, навигации, роботах и играх.
В каждом случае важно понять, что мешает движению: пустое пространство, граница, сетка или карта дорог.

2

**отрезка через
промежуточную точку
не короче прямого пути.**

Кратчайший маршрут через третью точку всегда состоит из двух частей, поэтому лишний излом только увеличивает длину.

Неравенство треугольника, школьная геометрия

Когда прямая недоступна

1.

Есть препятствие

Если между точками стоит стена или забор, прямой отрезок становится недоступным. Тогда ищут маршрут, который не пересекает препятствие и остаётся разрешённым на всём пути.

2.

Нужны допустимые ходы

Иногда допустим только путь вдоль границы или через специально отмеченные участки. В таком случае сравнивают уже не любые линии, а только те, что действительно можно пройти.

3.

Точка касания

Кратчайший вариант часто касается границы в одной точке и сразу уходит дальше. Это позволяет обойти преграду, не добавляя лишнего пути.

Метод отражения через линию



Отражаем точку

Сначала одну из точек отражают относительно линии препятствия. Тогда путь, который раньше изгибался у стены, можно заменить прямым отрезком до отражённого образа.

Длины совпадают

Расстояние при отражении не меняется, поэтому длина прямого отрезка совпадает с длиной исходного обхода. Из-за этого метод даёт точный ответ, а не приблизительный.

Где это полезно

Такой приём особенно удобен в задачах про свет, симметрию и движение к стене. Он превращает сложную ломаную в простую геометрическую картину.

Одна линия и коридор из двух линий

1. Одна линия

Если препятствие только одно, достаточно отразить одну точку и провести к её образу прямую. Это самый короткий способ обойти одиночную границу.

2. Два зеркала

Когда параллельных линий две, отражение повторяют шаг за шагом, как будто путь проходит по коридору из зеркал. Каждое пересечение линии заменяется новой симметричной копией точки.

3. Правило для коридора

Такой приём удобен тем, что сложный маршрут раскладывается на цепочку отражений. Затем вся конструкция снова сводится к одному прямому отрезку.

Почему угол «выбирается сам»

Касание не случайно

Если путь касается границы, в точке касания он не может входить и выходить как попало. После отражения обе части выглядят как одна прямая.

Симметрия углов

Углы падения и ухода оказываются одинаковыми по разные стороны линии. Поэтому маршрут как будто сам «выбирает» правильное направление в точке касания.

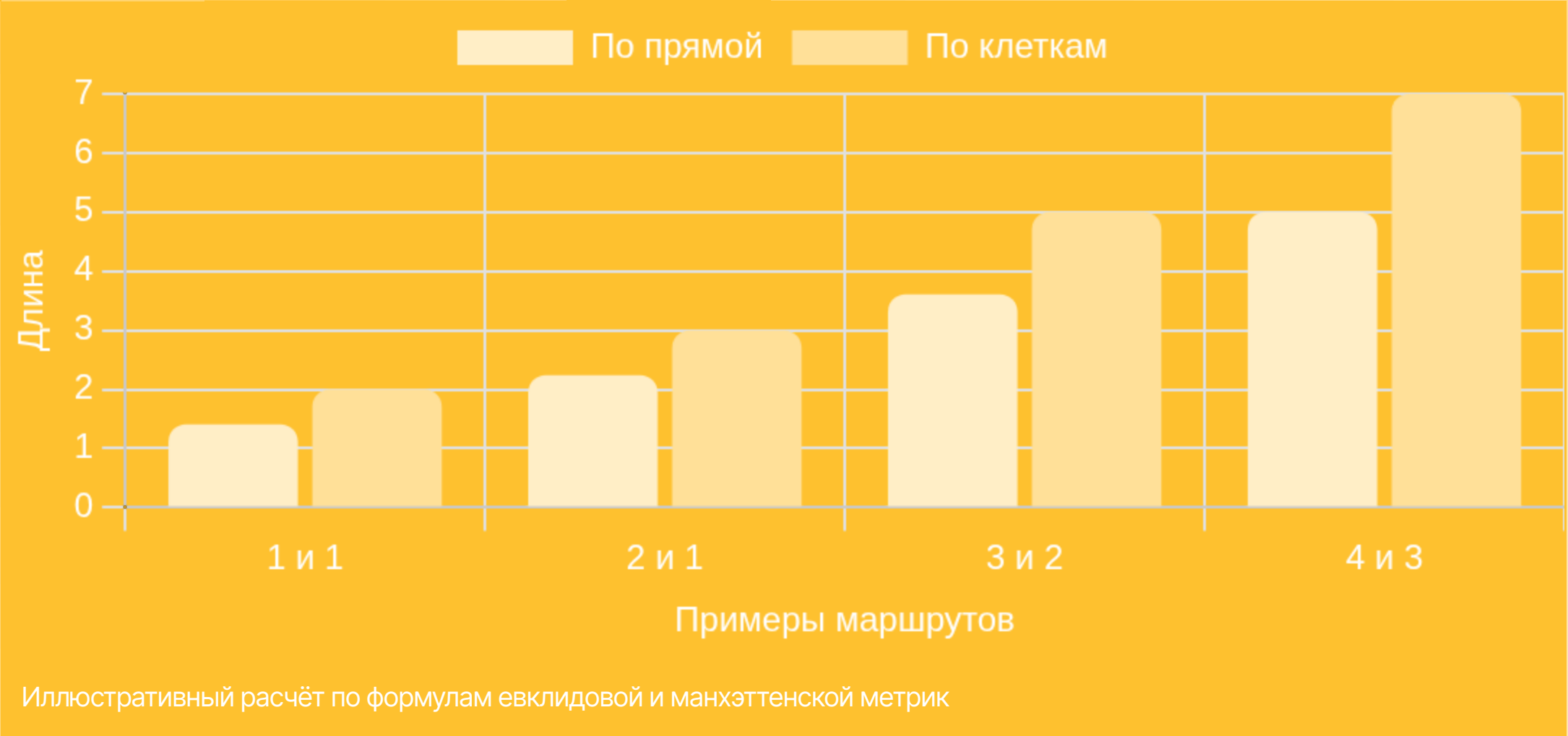
Форма оптимального пути

Из-за этого оптимальный путь не выглядит набором произвольных отрезков. Он складывается в аккуратную прямую к отражённой точке и обратно.

Прямая и путь по клеткам

На клетчатой карте одинаковые по виду маршруты могут иметь разную длину, если сравнивать прямой отрезок и ход по клеткам.

По клеткам путь считают шагами, поэтому он часто длиннее прямой. Совпадение бывает только в особых случаях, когда движение идёт строго по одной линии.



Как геометрию превращают в граф

Выделяют узлы

Удобно начинать с ключевых точек: старт, финиш, повороты и места, где можно двигаться только по разрешённым направлениям. Так задача становится наглядной и посчитанной.

Рёбра имеют вес

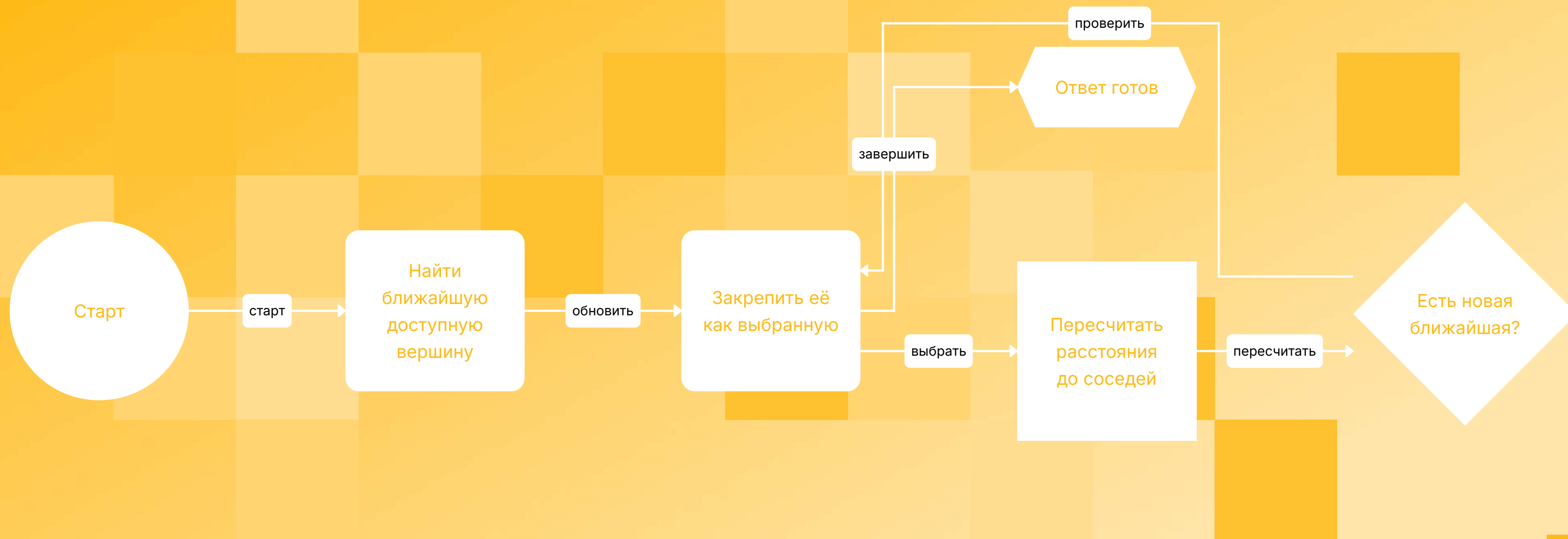
Каждое разрешённое перемещение между узлами превращается в ребро. Если участок длиннее, его вес тоже больше, поэтому сравнивают не только число шагов, но и их длину.

Модель упрощает поиск

Когда карта сложная, граф позволяет отделить геометрию от поиска пути. Сначала строят модель, потом применяют правила выбора самого короткого маршрута.

Идём по возрастанию расстояния

Схема показывает, как алгоритм идёт от уже известных расстояний к новым кандидатам.



Когда местный выбор подводит

Короткий старт — длинный конец

Мальчик выбирает поворот «на глаз»: кажется, что это сократит путь. Но дальше дорожка упирается в длинный обход, и выигрыш в начале исчезает.



Тупик на развилке

На карте есть развилка у забора. Если всегда поворачивать в сторону ближайшего прохода, можно прийти к тупику и вернуться назад, потеряв время.



Смотрим на всю длину

Самый разумный маршрут сравнивает не один шаг, а всю дорогу целиком. Иногда чуть более длинный первый участок даёт заметно более короткий итог.



Путь вокруг забора

Прямые отрезки

Если препятствие тянется непрерывно, маршрут не обязан повторять его форму. Обычно он состоит из прямых участков и одного или нескольких касаний к границе.

Укорачиваем без нарушения

Лишние извилины почти всегда удлиняют путь. Если кусок можно заменить более прямым переходом и не нарушить запрет, новый вариант будет короче.

Полезное касание

Иногда касание границы действительно нужно: оно связывает два отрезка в самый выгодный маршрут. Тогда путь выглядит аккуратно и не делает лишних петель.

Проверяем маршрут по шагам

Проверка участка

Сначала смотрят, нет ли участка, который можно сделать прямее без пересечения препятствия. Если да, маршрут уже вызывает сомнение.

Сравнение вариантов

Затем сравнивают с отражением или более точным касанием границы. Если новая схема короче, прежний путь нельзя считать лучшим.

Окончательный выбор

В конце оставляют только тот маршрут, который нельзя укоротить ни прямой, ни симметричной заменой, ни более удачным касанием.

Через линию к ответу

Отражаем точку

Точки стоят по разные стороны от линии, и прямая между ними запрещена. Тогда одну точку мысленно отражают через линию, а затем проводят обычный отрезок до её образа.



Строим короткий путь

Получившаяся прямая пересекает линию в нужном месте и задаёт оптимальный маршрут. Реальный путь состоит из двух отрезков: до линии и после неё.



Через две параллельные стены

1.

Первое отражение

Сначала отражают точку относительно первой стены, чтобы заменить один обход на симметричную копию по другую сторону.

2.

Второе отражение

Потом повторяют действие относительно второй параллельной стены. Теперь нужная цель оказывается в позиции, до которой можно провести обычную прямую.

3.

Прямая вместо ломаной

После этого исходная ломаная превращается в один отрезок на рисунке. Именно он показывает кратчайший вариант между стенами.



Вокруг островка



Касание вместо обхода

Обход вокруг островка редко бывает выгодным, если его можно заменить прямым подходом до точки касания. Тогда лишняя длина исчезает без нарушения границы.

Два прямых участка

После касания путь снова становится прямым: второй отрезок уходит к цели уже по безопасной стороне границы. Так сохраняется и короткая длина, и правило непреодоления.

Почему дуга хуже

Если идти по дуге вокруг островка, длина почти всегда растёт. Поэтому правильный маршрут ищут среди схем, где поворот нужен только в точке касания.



Сетка: шаги и длина

Маршрут	Шаги	Длина
По клеткам	6	6
С диагоналями	4	4,8

Сравним два способа пройти по сетке: пешком по клеткам и через диагонали. Важно учитывать не только шаги, но и их длину.

Меньше поворотов не всегда значит короче. Выигрывает маршрут с меньшей суммарной длиной, даже если шагов больше.

Дороги и прямое расстояние

На схеме сравниваются расстояния по прямой и по дорогам графа для нескольких пар городов. Видно, что путь по рёбрам может быть длиннее кратчайшего отрезка на плоскости.

Граф учитывает разрешённые дороги, а не идеальную прямую. Поэтому кратчайший путь по карте может отличаться от геометрического расстояния.

