

Область определения и множество значений тригонометриче- ских функций

Как устроены синус, косинус, тангенс
и котангенс?



Зачем изучать тригонометрические функции в 10 классе

Эти функции помогают читать графики, решать уравнения и описывать периодические процессы в математике, физике и информатике.



Синус и косинус: область определения

01

Любое действительное x

Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ определены при любом действительном значении аргумента, потому что на единичной окружности каждому углу соответствует точка с координатами без ограничений.

02

Нет запрещённых значений

Для синуса и косинуса не возникает деления на ноль и других препятствий, поэтому область определения обеих функций совпадает со множеством всех действительных чисел.

03

Периодичность

Значения этих функций повторяются после прибавления $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, поэтому один и тот же вид графика сохраняется на всей числовой оси.

Множество значений синуса и косинуса

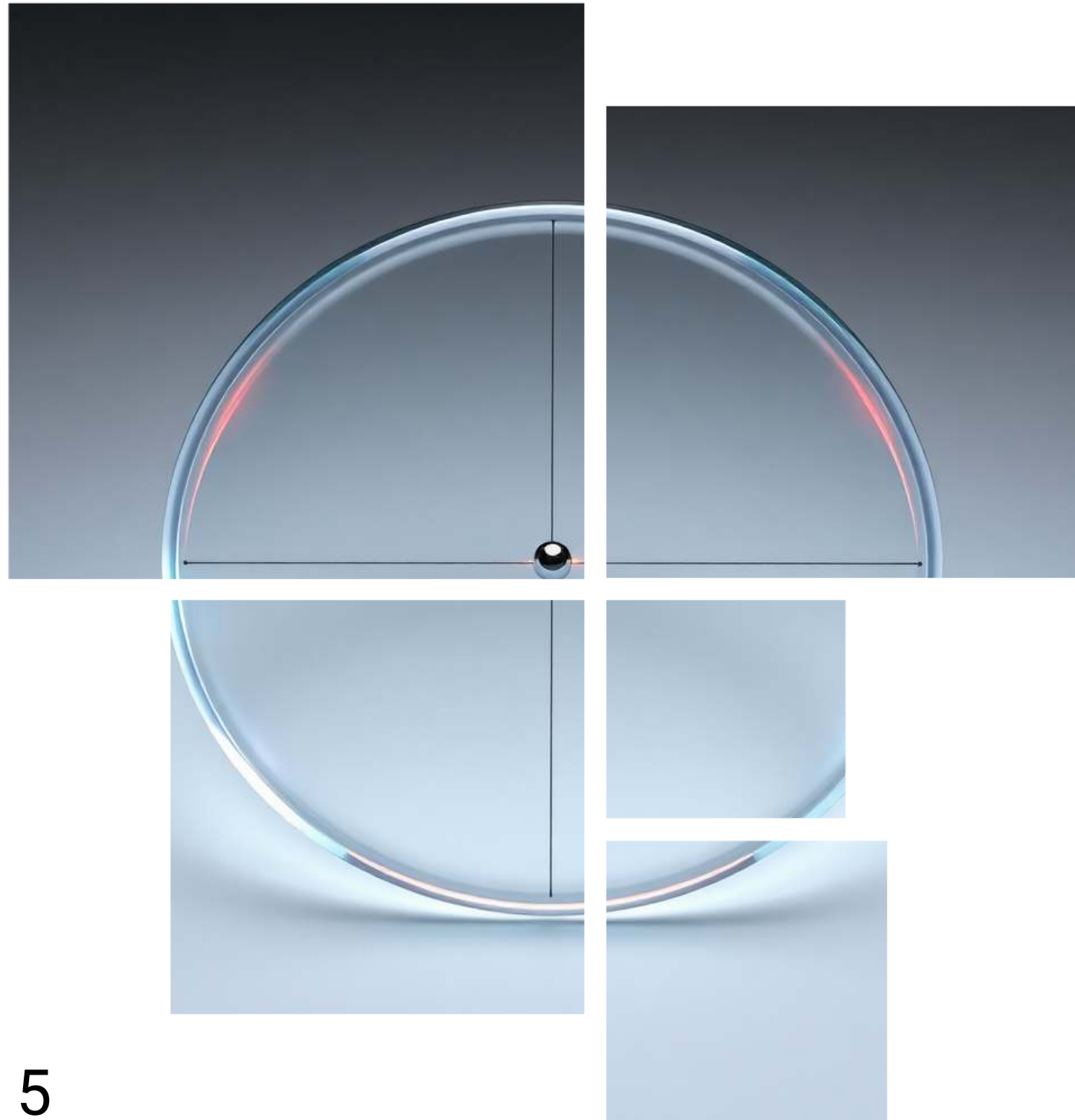
Обе функции ограничены одним и тем же промежутком, хотя достигают его границ в разных точках окружности.

Синус и косинус не выходят за пределы $[-1; 1]$, значит их значения заранее ограничены геометрией единичной окружности.

Свойства тригонометрических функций,
школьный курс алгебры



Единичная окружность как источник ограничений



■ Координаты точки

На единичной окружности каждая точка имеет координаты $(\cos x; \sin x)$, поэтому обе величины связаны с геометрией окружности и не могут быть произвольными.

■ Границы отрезка

Так как радиус окружности равен 1, абсцисса и ордината любой точки лежат между -1 и 1, что сразу объясняет пределы значений синуса и косинуса.

■ Опорные углы

Положения 0 , $\pi/2$, π и $3\pi/2$ показывают крайние случаи: именно здесь координаты достигают 1, 0 или -1, подтверждая ограниченность функций.

Тангенс: точки, где функция не определена

01

Формула дроби

Тангенс задаётся как $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$, поэтому его существование зависит от того, обращается ли знаменатель в ноль.

02

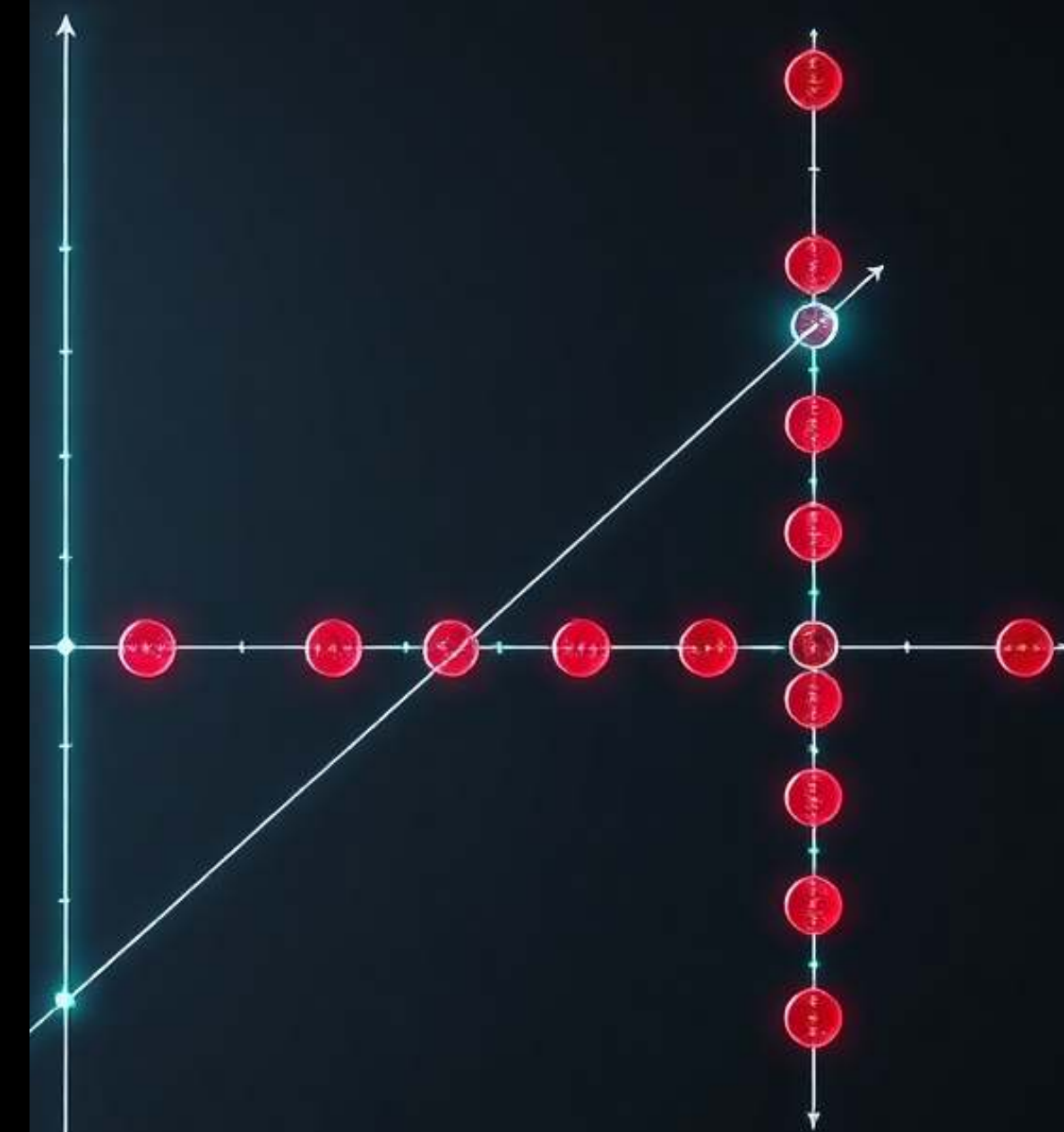
Запрещённые аргументы

При $x = \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, значение $\cos x$ равно нулю, а деление на ноль невозможно. Именно в этих точках функция не определена.

03

Период и область

Во всех остальных точках действительной оси тангенс существует, а его период равен π , поэтому график повторяется чаще, чем у синуса и косинуса.

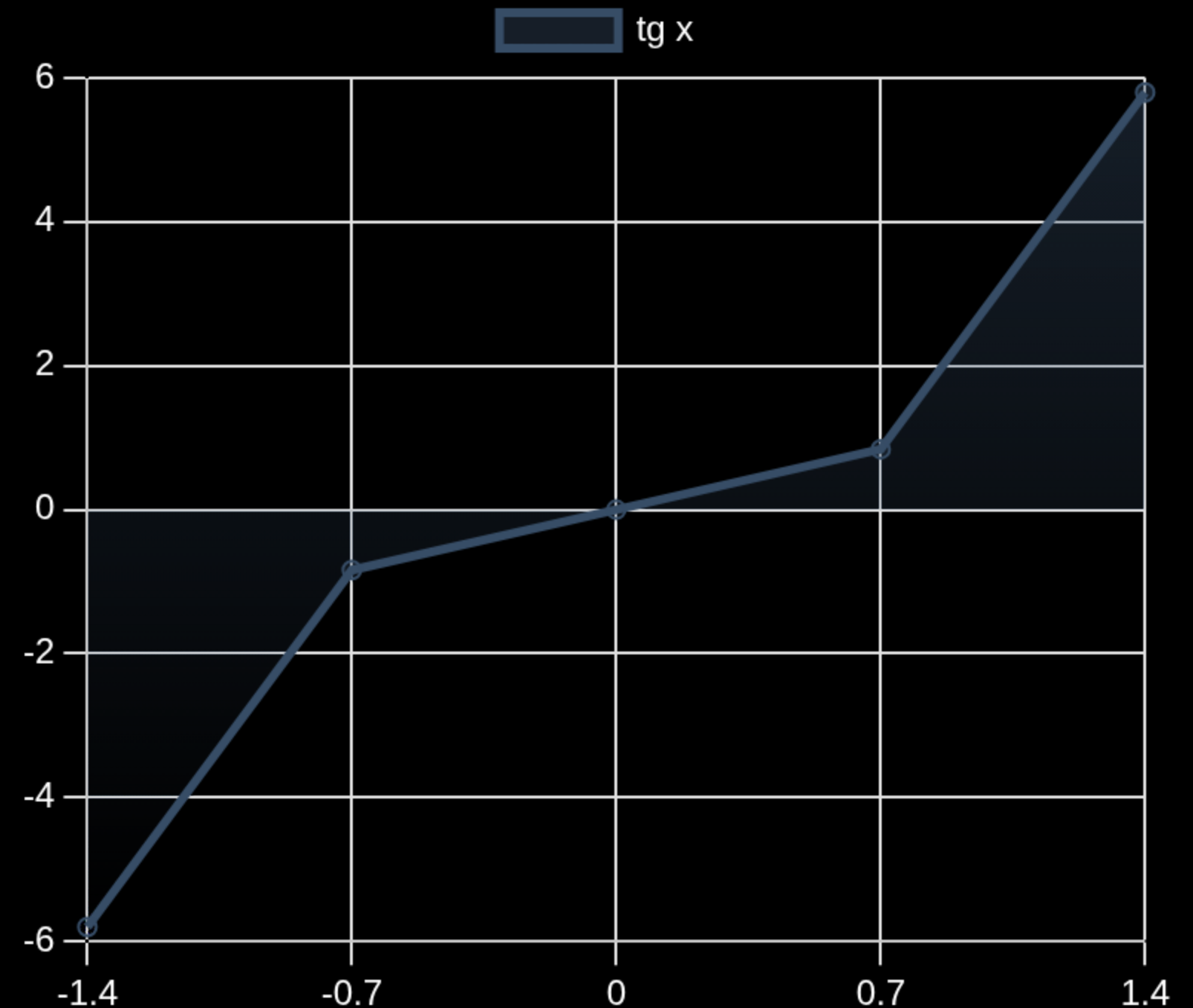


Множество значений тангенса

На каждом промежутке между асимптотами график остаётся непрерывным и возрастает, не имея верхнего или нижнего предела.

Тангенс принимает любые действительные значения, поэтому его множество значений совпадает с $\mathbb{R}$, несмотря на разрывы в области определения.

Схематизация по графику $y = \operatorname{tg} x$



Котангенс: область определения и множество значений

01

Нули знаменателя

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ записывается как $\cos x / \sin x$, поэтому она не определена там, где $\sin x = 0$, то есть при $x = \pi k$.

02

Все остальные x

На любых других значениях аргумента котангенс существует, а его график повторяется с периодом π , как и у тангенса.

03

Диапазон значений

Множество значений котангенса совпадает со множеством всех действительных чисел: функция не ограничена ни сверху, ни снизу и может принимать любые числа.

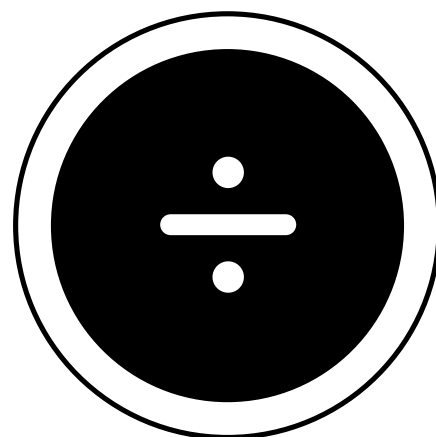
Сводная таблица свойств четырёх тригонометрических функций

Сравнение основных характеристик помогает быстро увидеть различия между двумя группами функций.

Синус и косинус ограничены по значениям, а тангенс и котангенс отличаются наличием исключений в области определения.

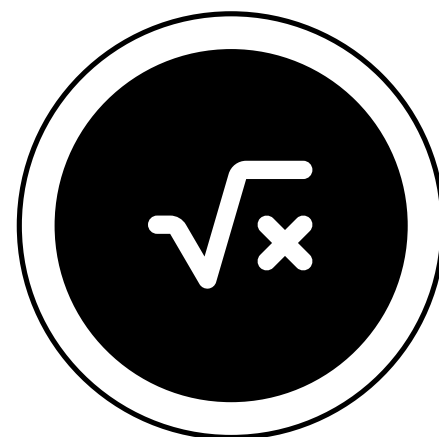
Функция	Область	Значения	Период
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$[-1; 1]$	2π
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$[-1; 1]$	2π
$\operatorname{tg} x$	$x \neq \pi/2 + \pi k$	$\mathbb{R}$	π
$\operatorname{ctg} x$	$x \neq \pi k$	$\mathbb{R}$	π

Почему у тангенса и котангенса возникают ограничения



Деление на ноль

Ограничения появляются из-за дробного вида формул: $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$, $\operatorname{ctg} x = \cos x / \sin x$. Если знаменатель равен нулю, значение функции не существует.



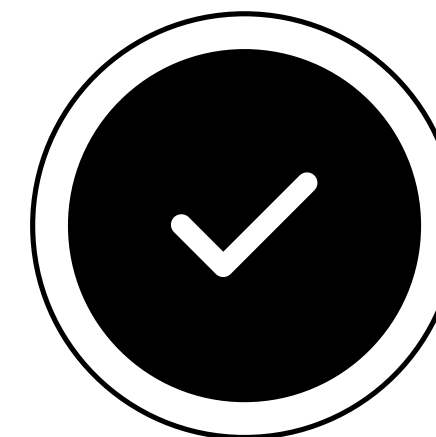
Проверка знаменателя

При исследовании области определения сначала выделяют все знаменатели. Затем исключают значения аргумента, при которых выражение теряет смысл, особенно в тригонометрических дробях.



Правило для формул

Это правило работает не только для $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$, но и для более сложных выражений, где тригонометрическая функция стоит в знаменателе

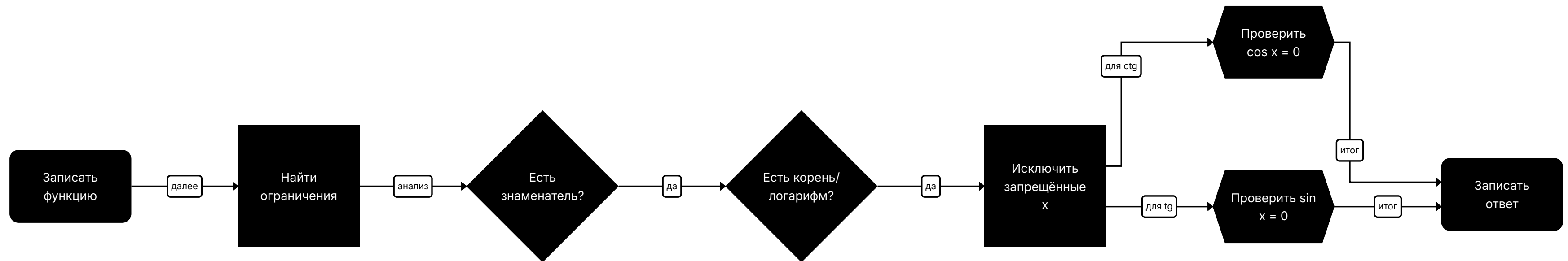


Верная запись ответа

После исключения запрещённых значений область определения записывают через промежутки или объединения множеств. Такой подход делает ответ строгим и удобным для проверки.

Алгоритм нахождения области определения функции

Последовательность действий при анализе выражений с дробями, корнями, логарифмами и тригонометрическими функциями.

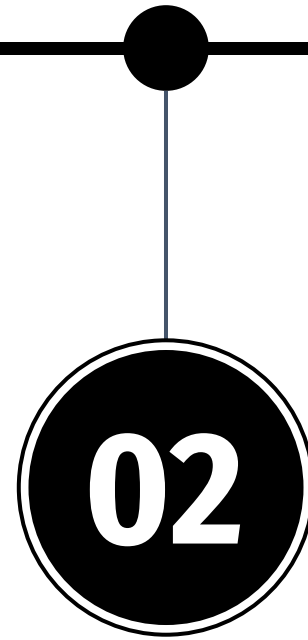


Как по графику находят множество значений



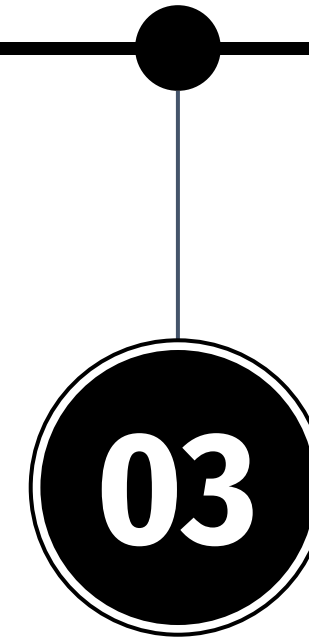
1. Считывают границы

Сначала находят на графике наибольшее и наименьшее значения функции и отмечают точки, где они достигаются. Это сразу задаёт основу множества значений.



2. Учитывают вид функции

Для $\sin x$ и $\cos x$ ориентируются на горизонтальные границы $y=1$ и $y=-1$. Для $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ смотрят на асимптоты и отсутствие ограничений сверху и снизу.



3. Проверяют сдвиги

Если график поднят или опущен, все границы множества значений смещаются вместе с ним. Поэтому важно сравнивать рисунок с исходной функцией, а не только с её формой.

Типичные ошибки при определении области и множества значений

- **Запрещённые аргументы**

Нельзя включать в область определения точки $\pi/2 + \pi k$ для тангенса и πk для котангенса: именно там знаменатель обращается в ноль, и функция теряет смысл.

- **Путают область и значения**

Часто область определения записывают как множество значений, хотя это разные характеристики. Первая отвечает за допустимые x , а вторая — за возможные результаты функции.

- **Выход за границы**

Для $\sin x$ и $\cos x$ нельзя расширять множество значений за пределы отрезка $[-1; 1]$. Эти функции связаны с координатами точки на единичной окружности.

- **Игнорируют исключения**

Неверно писать, что $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ определены при всех действительных x . У них бесконечно много исключений, которые задаются одной общей формулой.

Forbidden arguments: restriction applied for angles for outside way on lines to 1.

Nextident to ransible for arguments gie x ffassible for chriidbal recthe a alognment.

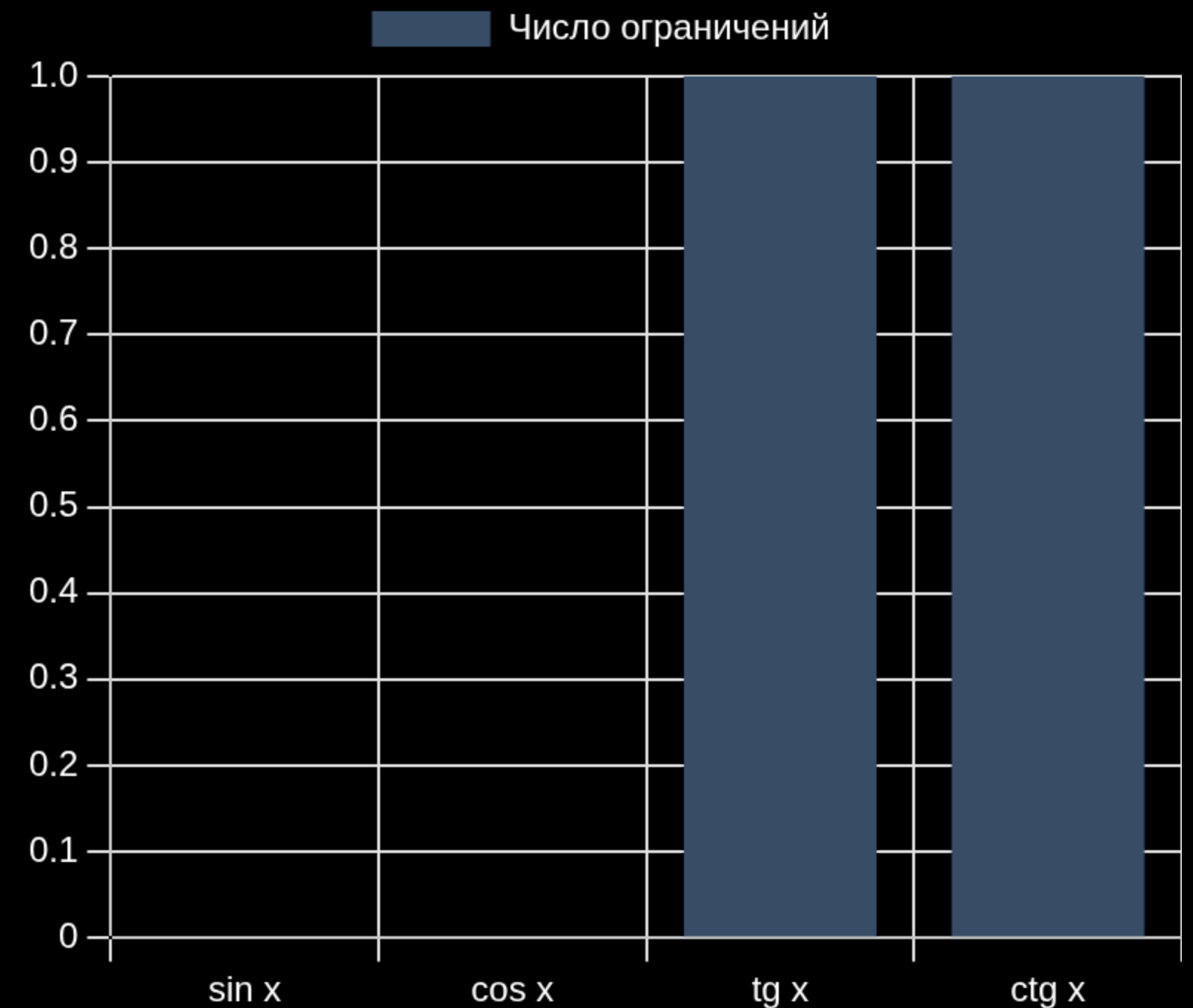
Next l rargunert for tangent and cotaangent

Сравнение числа ограничений у четырёх функций

На диаграмме показаны только типы ограничений: отсутствие исключений или наличие бесконечного множества запрещённых точек, заданного общей формулой.

$\sin x$ и $\cos x$ не имеют запрещённых аргументов, а $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ ограничены нулями знаменателя.

Свойства базовых тригонометрических функций, школьный курс алгебры



Примеры нахождения области определения и множества значений

01

$$y = 2\sin x - 3$$

Область определения равна $\mathbb{R}$, потому что синус определён при любых x . Множество значений получается с учётом амплитуды 2 и сдвига вниз на 3: от -5 до -1.

02

$$y = 1/\cos x$$

Здесь знаменатель не должен обращаться в ноль, поэтому исключаются все $x = \pi/2 + \pi k$. Во всех остальных точках функция существует и помогает увидеть, как дробь создаёт ограничения.

03

$$y = \operatorname{tg} x + 1$$

Сдвиг вверх на 1 не меняет область определения: исключаются те же значения $x = \pi/2 + \pi k$. Множество значений остаётся $\mathbb{R}$, потому что добавление константы не ограничивает тангенс.

Как преобразования меняют свойства функций

► Таблица показывает, как параметры a и b влияют на область определения и множество значений четырёх базовых тригонометрических функций.

► Для синуса область не меняется, а диапазон зависит от a и b ; для tg и ctg вертикальный сдвиг не ограничивает значения, но исключения сохраняются.

Функция	Область	Значения
$a \sin x + b$	$\mathbb{R}$	$[b-a; b+a]$
$a \text{tg } x + b$	$x \neq \pi/2 + \pi k$	$\mathbb{R}$
$a \text{ctg } x + b$	$x \neq \pi k$	$\mathbb{R}$

Свойства преобразований
тригонометрических функций

Геометрический смысл ограничений на единичной окружности

Синус как ордината

Синус задаёт у-координату точки на единичной окружности. Поэтому его значения естественно ограничены от -1 до 1 и не могут выйти за эти пределы.

Тангенс как отношение

Тангенс равен $\sin x / \cos x$. Когда $\cos x = 0$, деление невозможно, и функция перестаёт быть определённой. Так появляются точки исключения.

Косинус как абсцисса

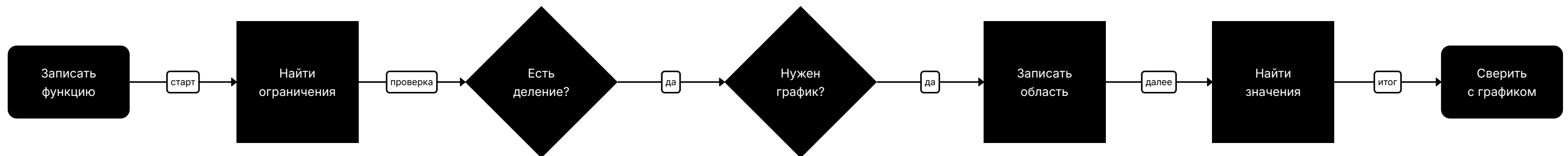
Косинус соответствует x-координате точки. На окружности радиуса 1 абсцисса тоже лежит только в пределах $[-1; 1]$, что объясняет границы значений.

Котангенс как отношение

Котангенс равен $\cos x / \sin x$. При $\sin x = 0$ знаменатель обращается в ноль, поэтому функция не определена именно в этих угловых положениях.

Проверка ответа при решении задач

Порядок самопроверки при нахождении области определения и множества значений тригонометрических функций.



Краткое сравнение основных свойств

$\sin x$ и $\cos x$

Обе функции определены на всей числовой прямой, принимают значения только из отрезка $[-1; 1]$ и повторяются с периодом 2π . Их поведение задаёт единичная окружность.

$\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$

У этих функций есть исключения в области определения, но множество значений совпадает со всеми действительными числами. Их период короче и равен π .

Главный признак различия

Ключевое различие связано с делением на ноль: у $\sin x$ и $\cos x$ его нет, а у $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ оно определяет запретные точки аргумента.

Главный вывод по теме

Область определения и множество значений позволяют быстро и точно описывать тригонометрические функции. Единичная окружность ограничивает $\sin x$ и $\cos x$, а деление на ноль создаёт исключения у $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$.