



Синус и косинус. Метрические соотношения в треугольнике

Синус, косинус и формулы для треугольника:
коротко и понятно.



Зачем это нужно в геометрии

Эти понятия помогают находить стороны по углу, проверять вычисления и уверенно работать с чертежами. В задачах на прямоугольный треугольник они часто дают самый быстрый и наглядный путь к ответу.



Элементы прямоугольного треугольника



1 Прямой угол

В прямоугольном треугольнике один угол равен 90° , а остальные два — острые. Именно их используют как опорные при вычислении синуса и косинуса.

2 Гипотенуза

Сторона напротив прямого угла называется гипотенузой. Она всегда длиннее каждого катета и служит общей основой для тригонометрических отношений.

3 Катеты у угла

Катет напротив выбранного острого угла называют противолежащим, а катет рядом с ним — прилежащим. От выбора угла зависит, какое отношение будет синусом или косинусом.

4 Выбор опорного угла

Для одного и того же треугольника значения $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ меняются, если меняется выбранный острый угол. Поэтому сначала всегда нужно определить, относительно какого угла ведётся рассмотрение.

Определение синуса острого угла

Формула

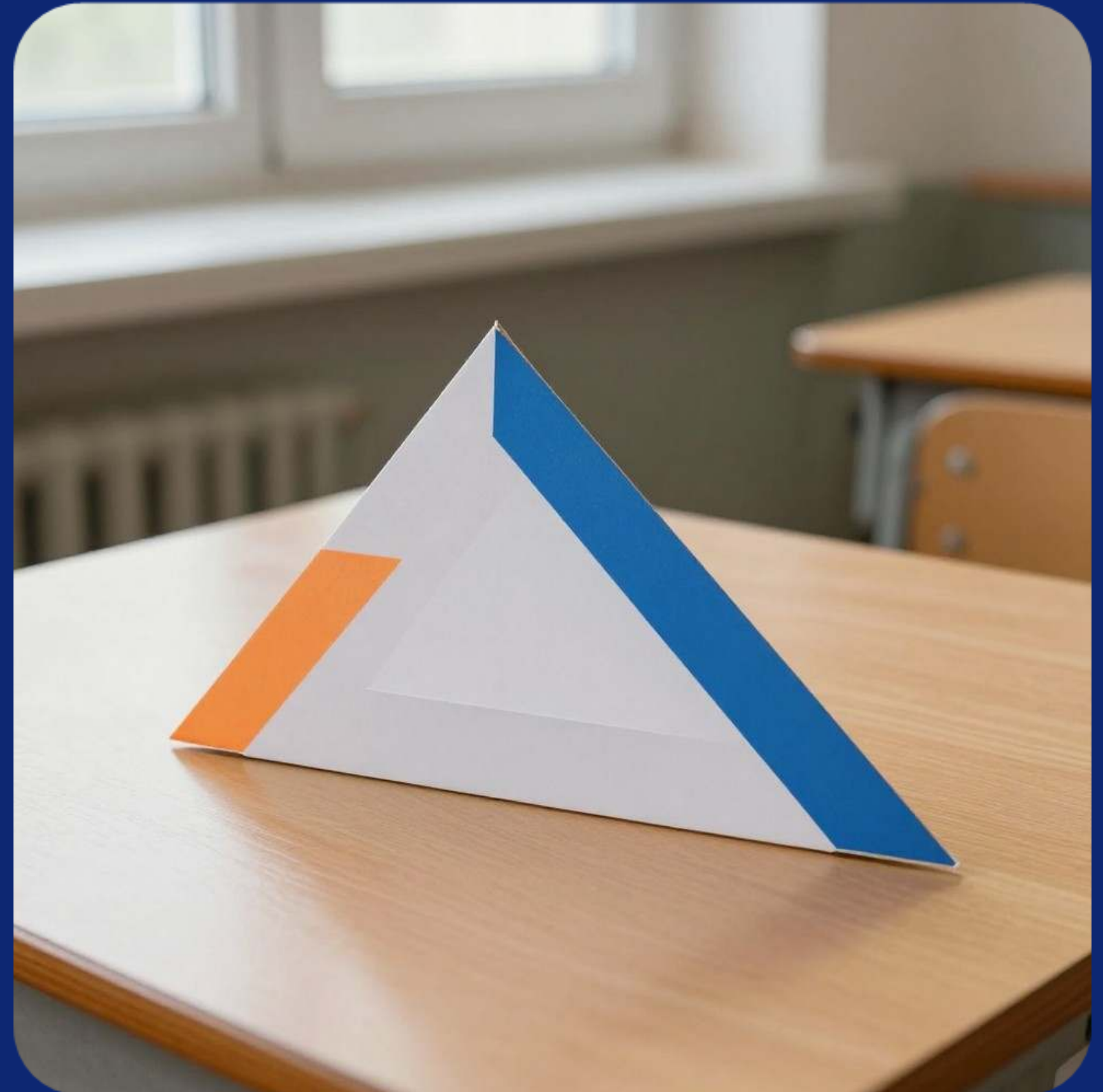
- 01** Синус острого угла равен отношению противолежащего катета к гипотенузе: $\sin \alpha = a/c$. Это отношение показывает, насколько «высоко» расположен катет относительно самой длинной стороны.

Диапазон значений

- 02** Для острого угла синус всегда больше 0 и не превышает 1. Чем больше угол, тем больше значение синуса, поэтому по нему удобно сравнивать разные углы.

Практическое применение

- 03** Если известны угол и одна сторона, синус позволяет найти неизвестный катет или гипотенузу. Для этого достаточно подставить данные в формулу и выполнить простое вычисление.



Определение косинуса острого угла



1 Формула

Косинус острого угла равен отношению прилежащего катета к гипотенузе: $\cos \alpha = b/c$. Он показывает, какую часть гипотенузы составляет сторона, соседняя с углом.

2 Как ведёт себя значение

Для острого угла косинус тоже лежит между 0 и 1, но при увеличении угла уменьшается. Это удобно помнить, когда нужно быстро оценить результат.

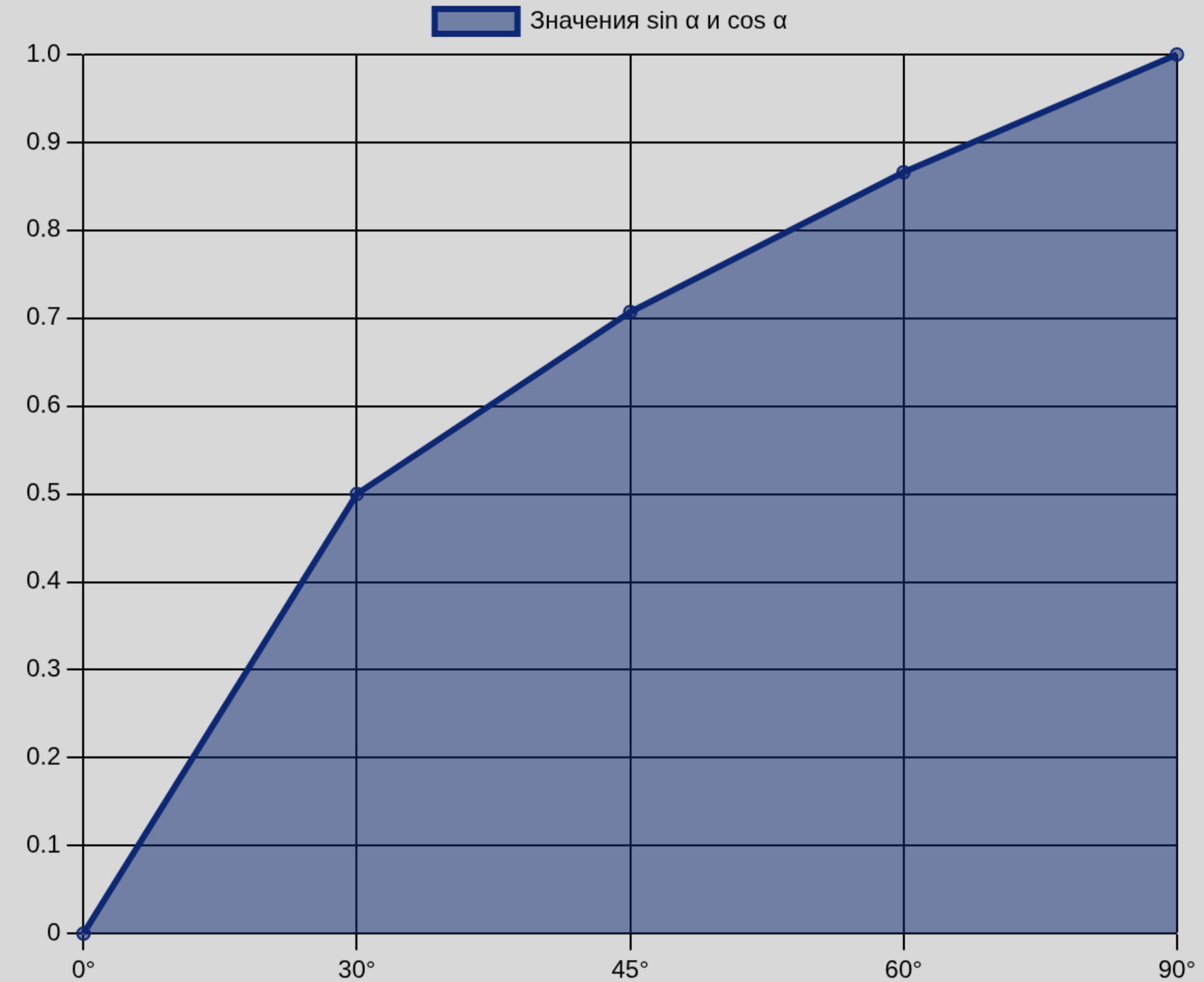
3 Когда использовать

Косинус особенно полезен, если известны угол и гипотенуза, а нужно найти прилежащий катет. В таких задачах он помогает сразу перейти к вычислению без дополнительных построений.

Как меняются $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ при увеличении угла

На графике видно, что обе функции связаны с одним и тем же углом, но изменяются в противоположных направлениях.

Рост синуса и спад косинуса показывают их взаимную зависимость: при увеличении угла один показатель увеличивается, другой уменьшается.



Точные значения для углов 0°, 30°, 45°, 60° и 90° из школьной таблицы значений тригонометрических функций.

Почему значения не зависят от размера треугольника



● Подобие треугольников

Если у двух прямоугольных треугольников совпадает острый угол, то они подобны. Значит, их стороны отличаются только масштабом, а не отношениями между сторонами.

● Одинаковые отношения

В подобных треугольниках соответствующие отношения сторон равны. Поэтому $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ зависят только от величины угла, а не от длины конкретных сторон.

● Удобство в задачах

Это свойство позволяет измерять недоступные расстояния по чертежу, не строя треугольник нужного размера. Достаточно знать угол и одну сторону, чтобы получить остальные величины.

Значения синуса и косинуса для основных углов

Таблица помогает быстро вспомнить значения для самых часто используемых углов в школьных задачах.

Углы 30° и 60° дают взаимно поменявшиеся значения, а при 45° синус и косинус совпадают.

Угол	$\sin \alpha / \cos \alpha$
0°	$0 / 1$
30°	$\frac{1}{2} / \frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2} / \frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2} / \frac{1}{2}$
90°	$1 / 0$

Основное тригонометрическое тождество



Главное равенство

Для любого угла α выполняется $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Это одно из самых важных соотношений, потому что оно связывает две тригонометрические величины в одно целое.

Связь с Пифагором

В прямоугольном треугольнике это тождество естественно вытекает из теоремы Пифагора. Если разделить стороны на гипотенузу, получится равенство, которое работает для любого острого угла.

Проверка ответа

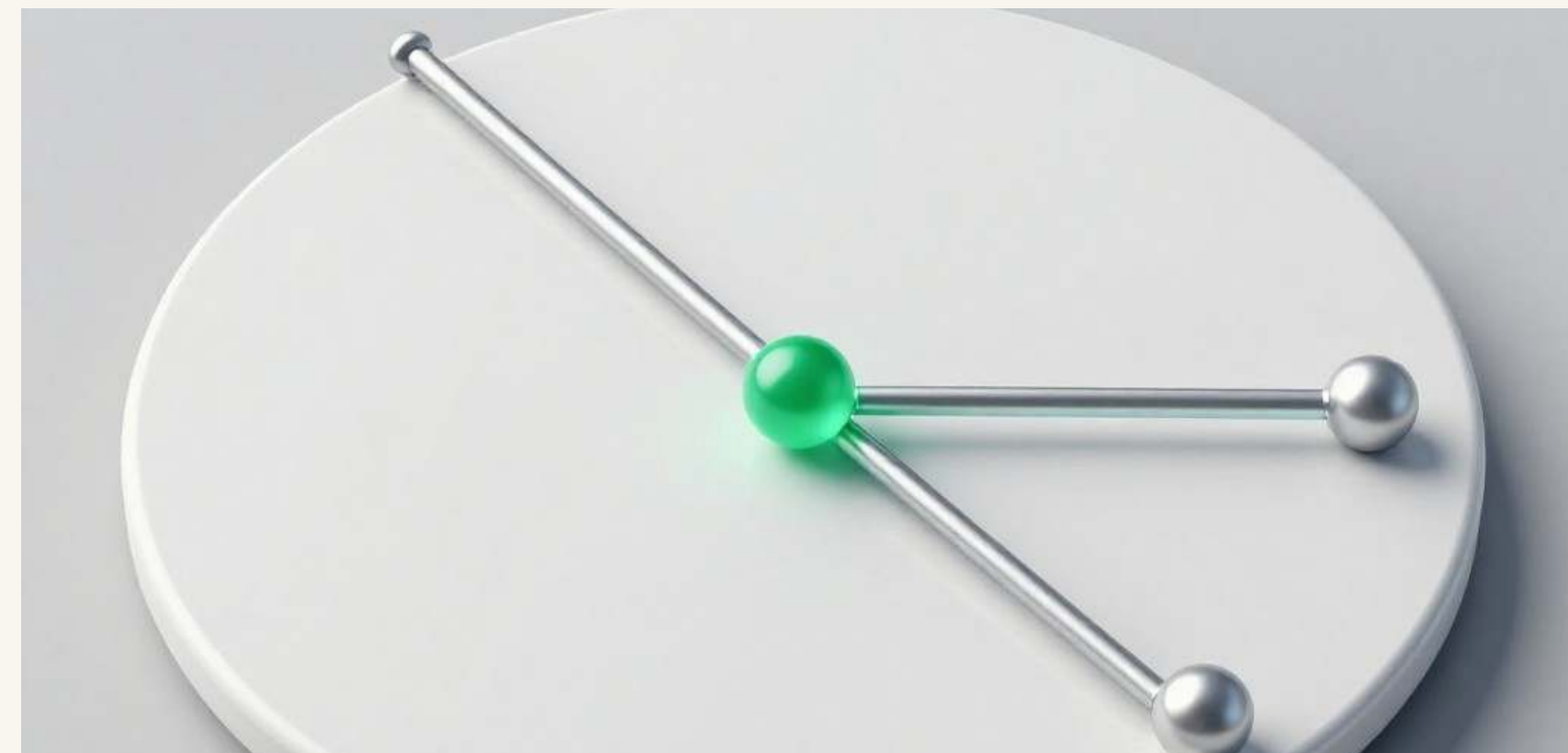
Тождество удобно использовать для контроля вычислений. Если известен синус, по нему можно найти косинус, а затем проверить, действительно ли сумма квадратов даёт 1.

Единичная окружность и координаты точки



Точка на окружности

На единичной окружности радиус равен 1, поэтому расстояние от центра до любой точки постоянно. Если повернуть радиус на угол α , его конец задаёт точку, которую удобно описывать через координаты. Так на плоскости появляется наглядная связь между углом и положением точки.



Координаты как значения функций

Горизонтальная координата такой точки равна $\cos \alpha$, а вертикальная — $\sin \alpha$. Поэтому тригонометрические значения можно понимать не только как отношения сторон в треугольнике, но и как координаты, которые сразу показывают положение на окружности.

Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике

Высота к гипотенузе

- 01 Если из прямого угла опустить высоту на гипотенузу, она разделит её на два отрезка. Эти части называют проекциями катетов на гипотенузу и обозначают m и n .

Связь катетов и проекций

- 02 Квадрат каждого катета равен произведению гипотенузы на его проекцию: $a^2 = c \cdot m$ и $b^2 = c \cdot n$. Эти формулы помогают находить стороны без использования углов.

Связь высоты и отрезков

- 03 Для высоты к гипотенузе тоже существует удобное правило: $h^2 = m \cdot n$. Оно показывает, что высота зависит сразу от двух проекций и связывает все элементы треугольника.

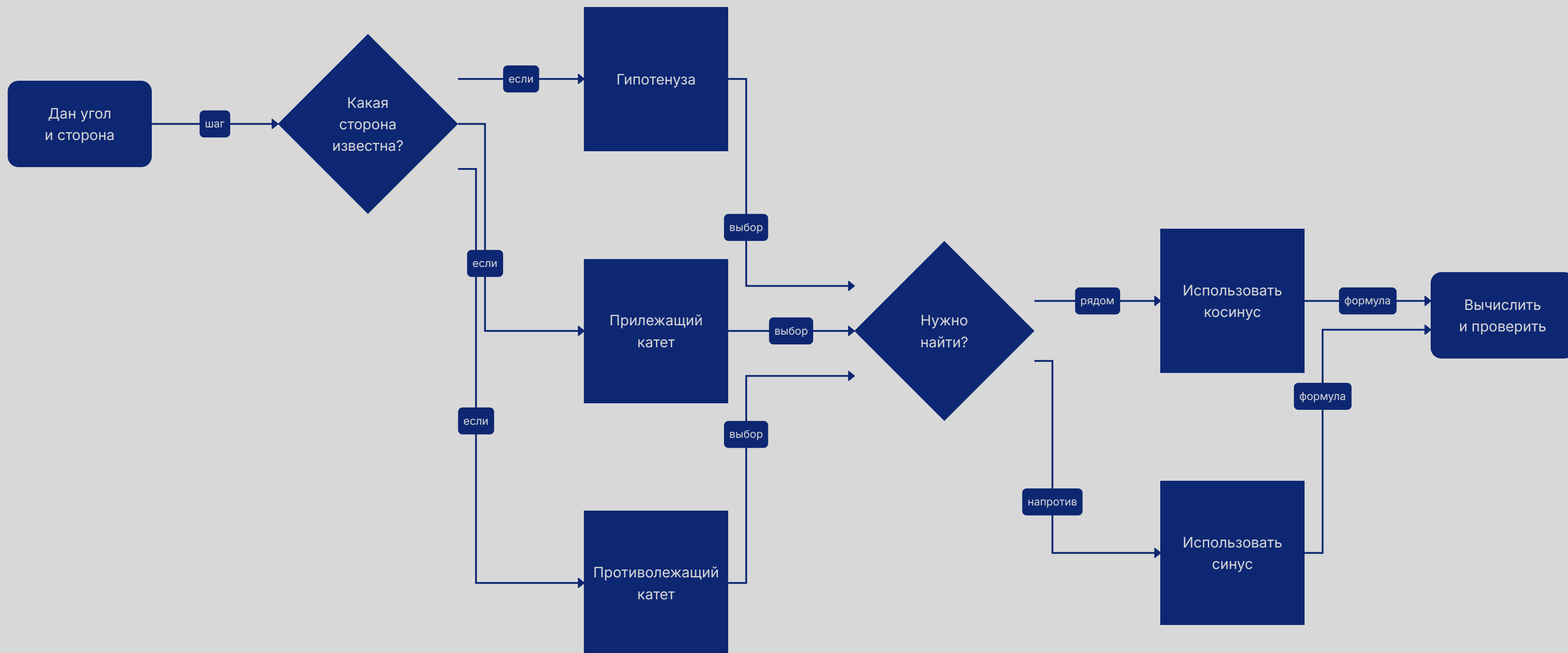
Одна общая система

- 04 Ещё одно важное соотношение: $c = m + n$. Вместе с теоремой Пифагора эти формулы образуют единую систему, в которой каждая величина помогает вычислить другую.



Алгоритм решения задачи по углу и стороне

Последовательность действий для выбора подходящей тригонометрической формулы



Формулы для нахождения сторон

1

Если известна гипотенуза

Когда известны гипотенуза c и острый угол α , противолежащий катет находят по формуле $a = c \cdot \sin \alpha$. Это удобно, если нужно вычислить сторону напротив выбранного угла.

2

Для прилежащего катета

Если требуется катет, лежащий рядом с углом, используют формулу $b = c \cdot \cos \alpha$. Она сразу связывает известную гипотенузу с нужной стороной без дополнительных построений.

3

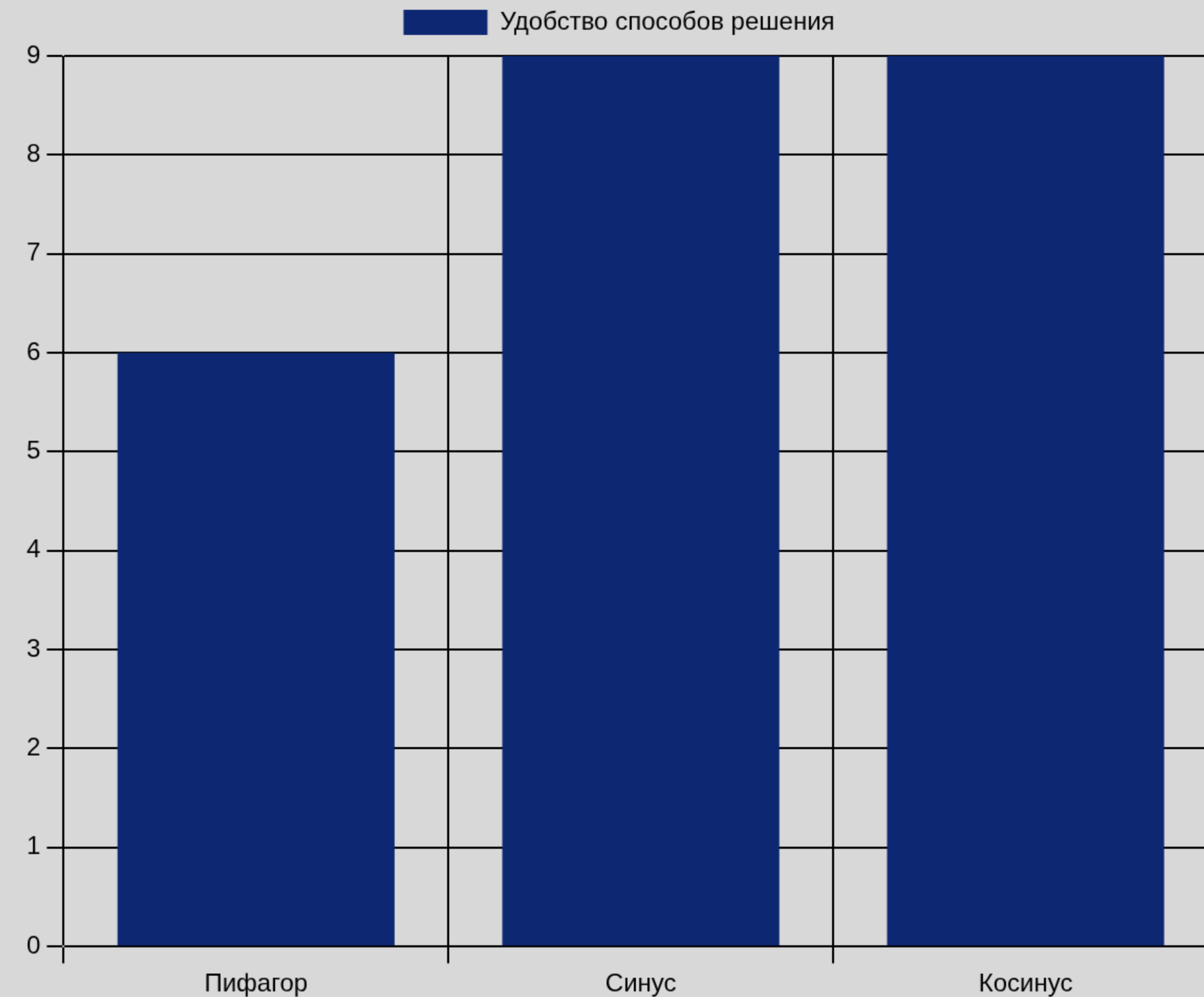
Если известен катет

Когда дана сторона и угол, а гипотенуза неизвестна, формулы записывают через деление: $c = a / \sin \alpha$ или $c = b / \cos \alpha$. Так можно восстановить недостающую длину.

Сравнение способов нахождения неизвестной стороны

Выбор способа зависит от того, что дано в задаче: две стороны или угол с одной стороной. Это экономит время при решении.

Если известен угол, синус и косинус обычно удобнее: они сразу используют данные задачи. При двух сторонах теорема Пифагора остаётся самым прямым способом.



Сравнение учебных способов решения прямоугольного треугольника; качественная оценка для учебной диаграммы.

Основные метрические формулы

Величина	Формула
Катет a	$a^2 = c \cdot m$
Катет b	$b^2 = c \cdot n$
Высота h	$h^2 = m \cdot n$
Гипотенуза	$c = m + n$
Проверка	$a^2 + b^2 = c^2$

Формулы показывают, как связаны между собой катеты, гипотенуза, высота и проекции в прямоугольном треугольнике.

Все формулы связаны между собой и позволяют находить неизвестную величину через уже известные элементы треугольника.

Пример вычисления по синусу и косинусу

- **Дано условие**

Пусть в прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 10 см, а острый угол — 30° . Этого достаточно, чтобы найти оба катета, используя значения синуса и косинуса.

- **Находим катет напротив**

Противолежащий катет равен $10 \cdot \sin 30^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$ см. Здесь синус показывает, какая часть гипотенузы приходится на сторону напротив выбранного угла.

- **Находим второй катет**

Прилежащий катет равен $10 \cdot \cos 30^\circ \approx 10 \cdot 0,866 = 8,7$ см. Проверка показывает, что меньший угол даёт более длинный прилежащий катет.

Где встречаются синус и косинус в жизни



Высота без лестницы

Если нужно узнать высоту дерева, здания или флагштока, измеряют расстояние до основания и угол подъёма. По этим данным можно вычислить высоту, не поднимаясь наверх и не пользуясь прямым измерением, которое часто бывает неудобным.

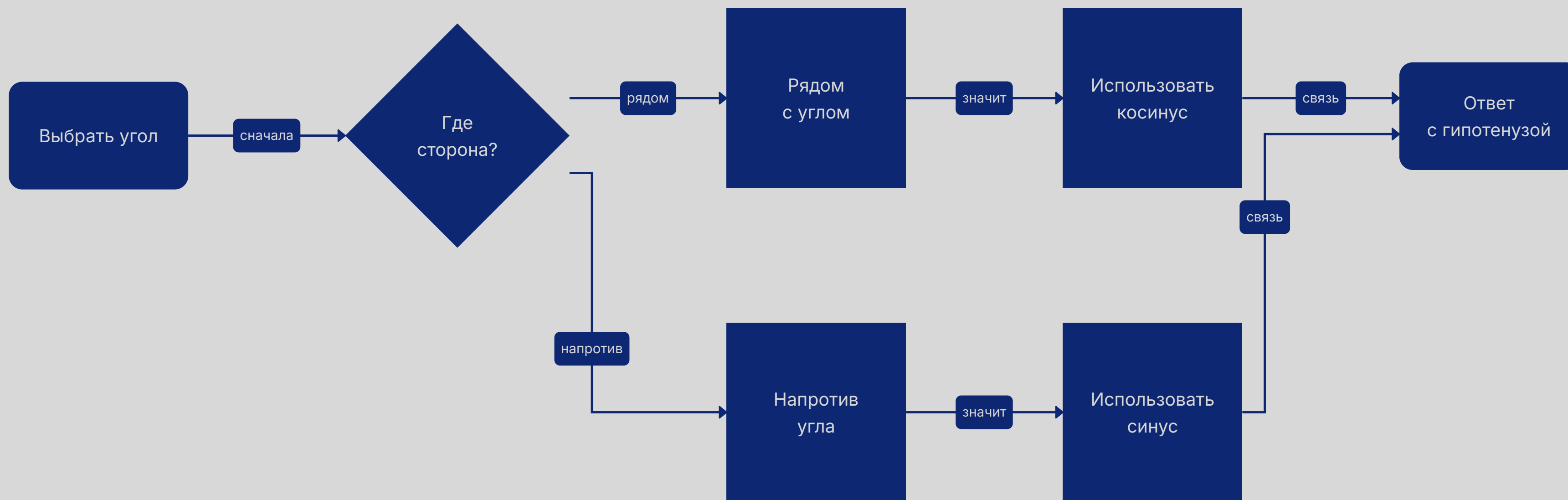


Наклон и чертёж

Синус и косинус помогают в строительстве и на чертежах, когда нужно задать наклон крыши, пандуса или лестницы. На схеме сразу видно, какая сторона является высотой, а какая — основанием, поэтому расчёты становятся понятнее.

Как не перепутать синус и косинус

Пошаговая проверка: где находится искомая сторона относительно выбранного угла



Типичные ошибки и проверка ответа

01

Не путать катеты

Сначала нужно точно определить, какой катет лежит напротив угла, а какой — рядом с ним. Если перепутать их местами, формула даст неверный результат, даже если вычисления выполнены правильно.

02

Следить за гипотенузой

В формулах синуса и косинуса обязательно участвует гипотенуза. Частая ошибка — поставить в числитель катет, когда по условию нужно использовать отношение к самой длинной стороне треугольника.

03

Проверять диапазон

Для острого угла синус и косинус всегда находятся между 0 и 1. Если получилось число больше 1, значит, в вычислениях допущена ошибка или неверно выбрана формула.

04

Использовать тождество

Полезная проверка — равенство $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Если оба значения найдены верно, их квадраты должны дать единицу, что помогает быстро заметить неточность.

Почему эти формулы так полезны

Синус, косинус и метрические соотношения делают прямоугольный треугольник понятной и удобной моделью. С их помощью легче находить стороны, проверять ответы и видеть связи между углами и длинами.