

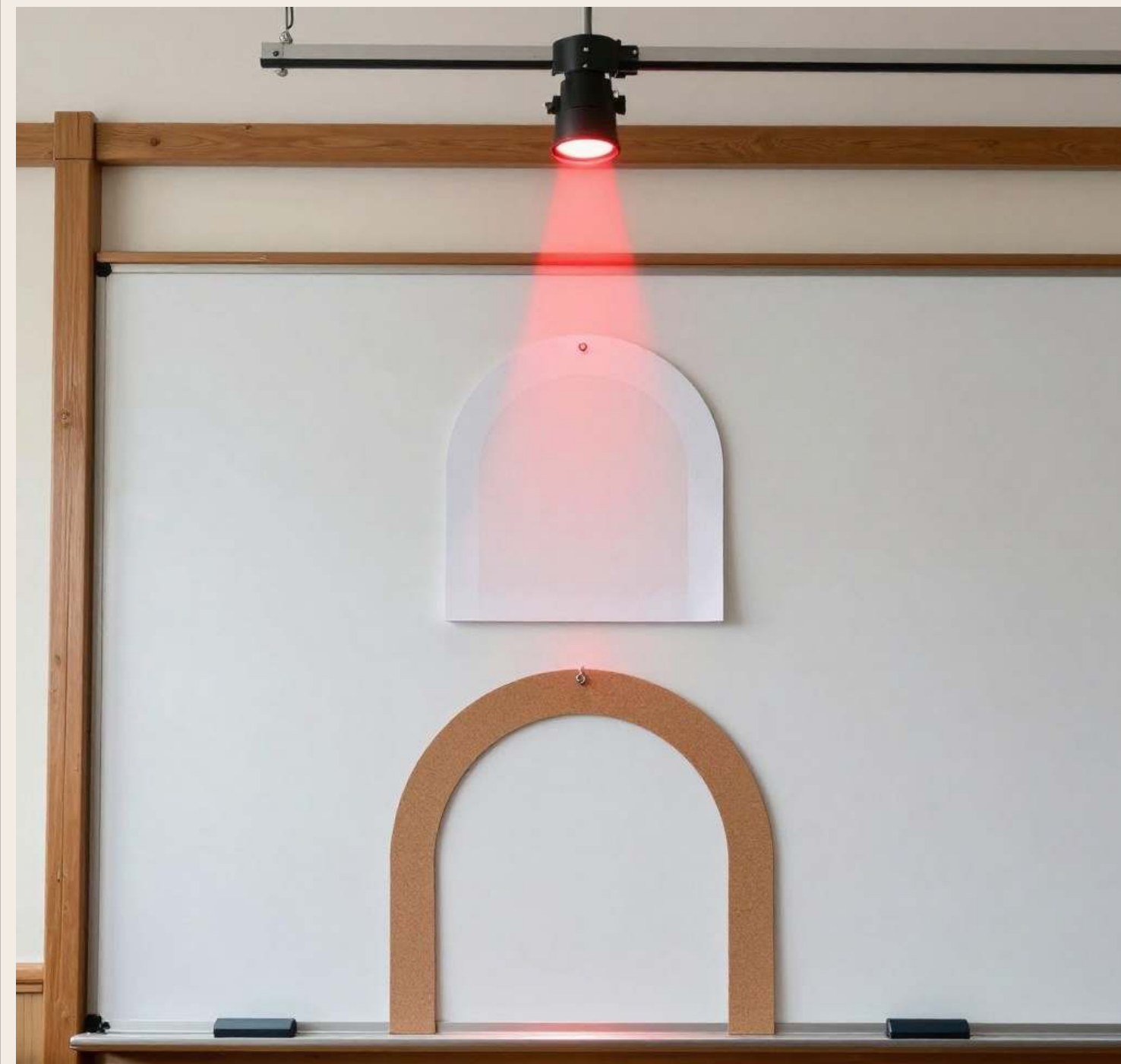


Гомотетия в геометрии: изменение размера без изменения формы

Гомотетия помогает увидеть, как фигуры остаются «того же вида», но меняют размеры.

Где встречается гомотетия и зачем она нужна

Гомотетия работает там, где сравнивают размеры в масштабе: карты, планы, макеты зданий, фотографии и рисунки. Формы объектов сохраняются, а размеры увеличиваются или уменьшаются одинаково — как при масштабировании.



Определение гомотетии

1

Гомотетия — это преобразование плоскости: каждой точке A соответствует образ A' . Точки A , O и A' всегда лежат на одной прямой, проходящей через центр O .

2

Связь между расстояниями выражается формулой $OA' = |k| \cdot OA$. Если $k > 1$, фигура увеличивается; при $0 < k < 1$ — уменьшается, то есть расстояния к центру меняются в $|k|$ раз.

3

При отрицательном коэффициенте k точка A' оказывается по другую сторону от центра O . Тогда меняется направление луча, а модуль $|k|$ по-прежнему задаёт степень изменения размера.

Центр гомотетии и направление лучей



1

Центр как неподвижная точка

Центр гомотетии — это неподвижная точка O : при преобразовании она остаётся на месте. Для любой точки исходной фигуры её образ строится так, чтобы обе точки «смотрели» на центр с одной прямой.

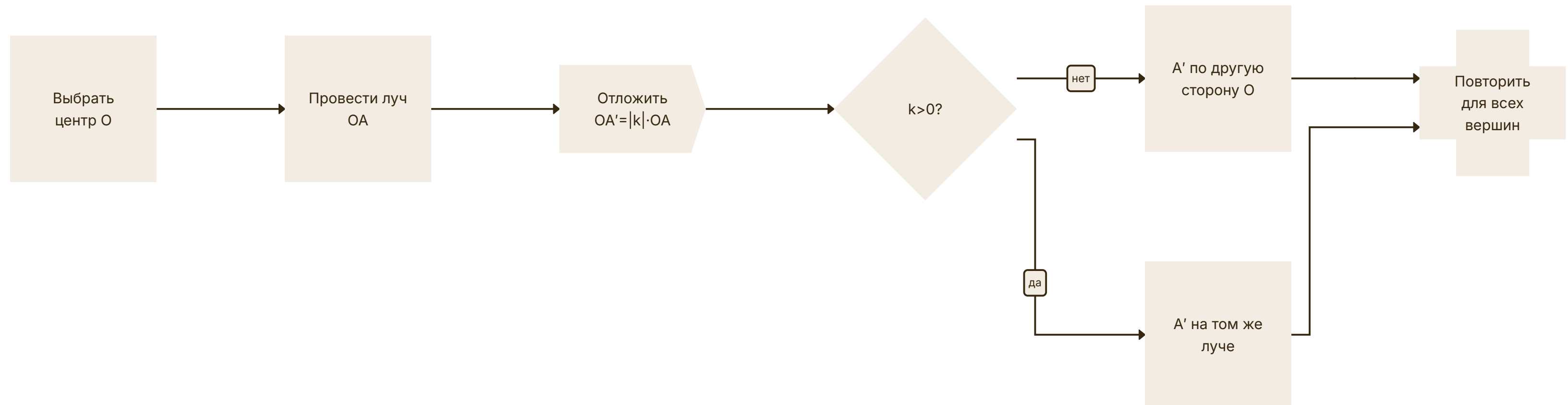
2

Луч как линия соответствия

Если у фигуры есть вершины A, B, C , то после гомотетии получаются вершины A', B', C' . Они расположены на лучах OA, OB, OC соответственно, поэтому удобно строить пример с треугольником и тремя лучами от центра.

Построение образа точки при гомотетии

Алгоритм для одной точки; для всей фигуры действия повторяются для каждой вершины



Коэффициент гомотетии и результат преобразования

k	Изменение	Пример смысла	Результат
3	увеличение	в 3 раза	больше
2	увеличение	в 2 раза	больше
1	без изменения	равен 1	тот же размер
1/2	уменьшение	в 2 раза	меньше
-1	направление смены	центральная	зеркальное по центру

Знак k задаёт направление расположения образа, а модуль $|k|$ — во сколько раз меняются размеры относительно центра.

Легко помнить: линейные размеры умножаются на $|k|$, а при $k < 0$ образ «уходит» на противоположную сторону от центра.

Как меняется размер фигуры при разных коэффициентах



Для одинаковой формы график линейных размеров показывает, что изменение пропорционально $|k|$: чем больше $|k|$, тем сильнее «вытягивается» фигура.

Если k отрицательный, модуль $|k|$ по-прежнему определяет масштаб, но знак меняет расположение точек относительно центра.

Расчёт по правилу $OA' = |k| \cdot OA$ (для линейных размеров).

Свойства, которые сохраняются при гомотетии

При гомотетии сохраняются углы между соответствующими сторонами: «наклон» фигуры относительно своего вида не меняется. Поэтому форма не превращается в другую — фигуры остаются подобными.

1

Прямые линии переходят в прямые, а параллельные отрезки остаются параллельными. Меняются только длины и расстояния до центра, но геометрическое «строение» не ломается.

2

Порядок вершин сохраняется: соединяя полученные образы вершин в том же порядке, вы получаете корректный контур. Итог — исходная фигура и образ всегда подобны по форме.

3

Гомотетия и подобие фигур



Равные углы и пропорции

У подобных фигур соответствующие углы равны, а соответствующие стороны относятся как одно и то же число. Это помогает сравнивать фигуры разного размера без «перерисовки» на глаз.



Одинаковый коэффициент сторон

Для двух подобных треугольников отношение длин соответствующих сторон одинаково. Когда один треугольник получен гомотетией из другого, это отношение обязательно постоянно.



Из гомотетии следует подобие

Если образ получен гомотетией, исходная фигура и её образ обязательно подобны. Такая связь делает тему ключевой для задач на масштаб и пропорции.

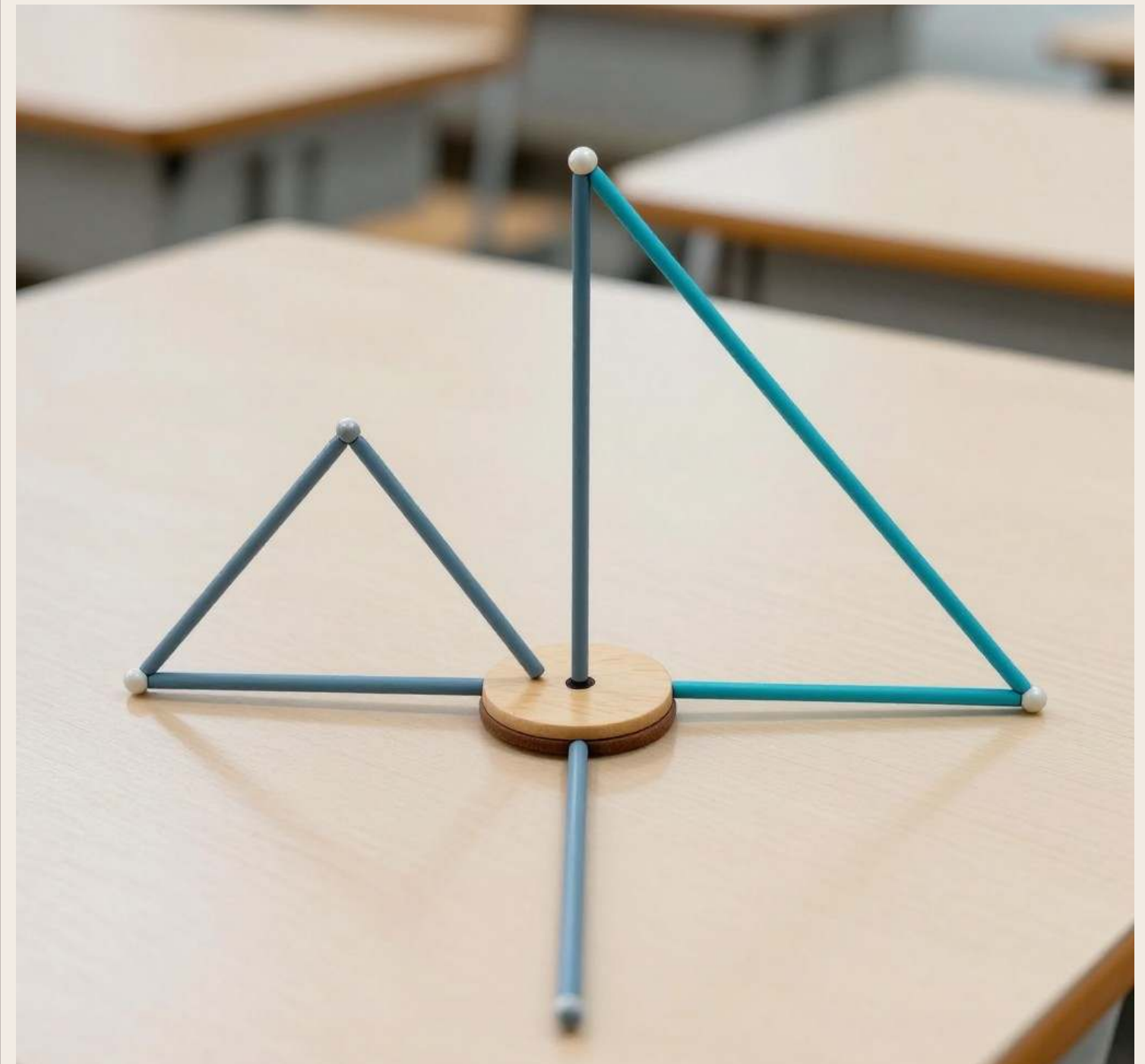
Пример с треугольником

1

Если треугольник ABC увеличить в 2 раза относительно центра O , то получится треугольник $A'B'C'$. Тогда $A'B' = 2AB$, $B'C' = 2BC$, а $C'A' = 2CA$.

2

При этом углы треугольников остаются равными, потому что стороны меняются во всем размере одинаково. На рисунке удобно показать центр O и лучи к соответствующим вершинам, чтобы видеть связь точек.



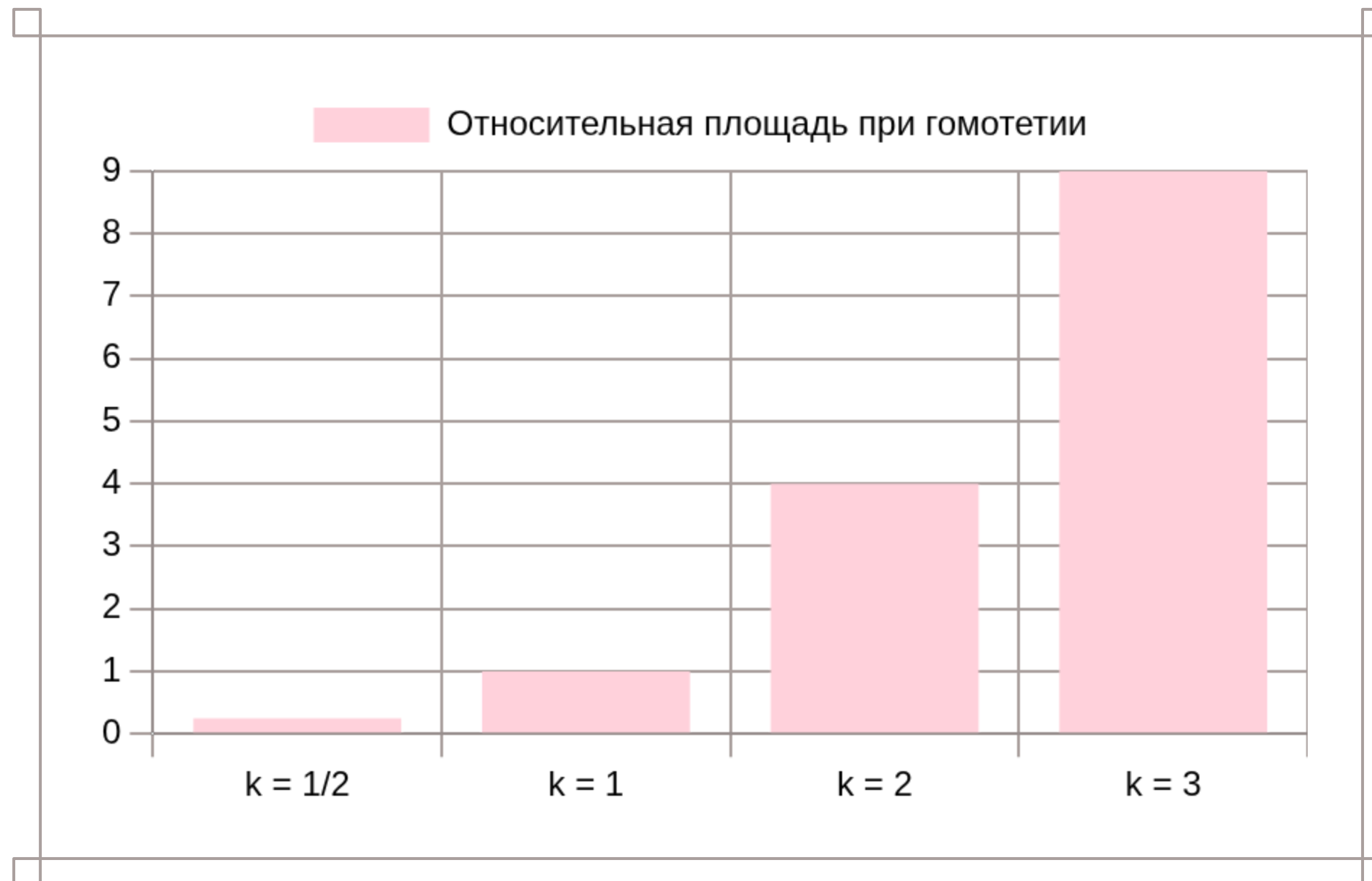
Как изменяются длины и площадь

Коэффициент k	Длины	Площадь
2	в 2 раза больше	в 4 раза больше
3	в 3 раза больше	в 9 раз больше
$1/2$	в 2 раза меньше	в 4 раза меньше
1	без изменений	без изменений

- При гомотетии линейные размеры масштабируются модулем коэффициента, а площадь — квадратом. Поэтому увеличение размеров «ощущается» сильнее на площади, чем на длинах.
- Площадь меняется быстрее: она зависит от k^2 , тогда как длины зависят от $|k|$.

Курс геометрии, школьные свойства гомотетии и масштабирования

Площадь фигуры при разных коэффициентах



Например, при удвоении длин линейные размеры становятся больше в 2 раза, а площадь увеличивается не в 2, а в 4 раза.

График подтверждает правило: $S_{\text{образа}} = S_{\text{исходной}} \cdot k^2$, поэтому при росте $|k|$ площадь растёт заметно быстрее.

Правило из школьной геометрии: площадь при гомотетии умножается на k^2 (для $k \geq 0$)



$$k = 2$$

это означает, что образ точки уходит вдвое дальше от центра в каждом направлении

Школьное правило преобразований координат при гомотетии

Если центр гомотетии в начале координат, то точка (x, y) переходит в (kx, ky) . При $k=2$ обе координаты удваиваются, форма сохраняется на любых клетках.

Отрицательный коэффициент гомотетии

1

Когда k отрицательный, образ точки оказывается на луче, противоположном тому, где лежит исходная точка относительно центра O , то есть меняется ориентация по направлению.

3

Отрицательный коэффициент связывает увеличение и центральную симметрию: сначала точка «раздвигается» по расстоянию, а затем направление относительно центра разворачивается.

2

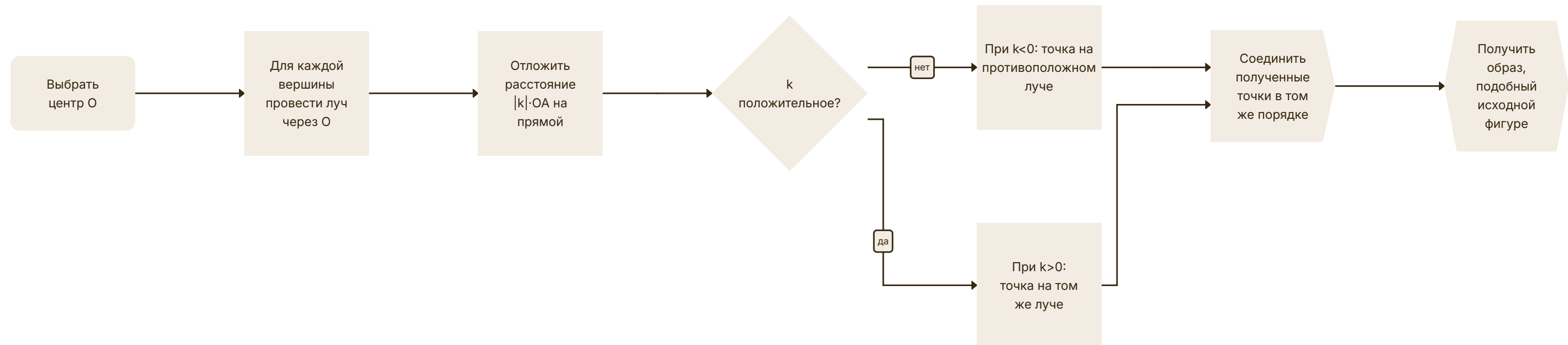
По модулю $|k|$ определяется, как сильно меняются расстояния до центра: при $k = -2$ точка удаляется от O в 2 раза, как и при обычном «плюс» в размере.

4

При построении важно не путать знак: сначала откладывают величину $|k|$ на прямой через центр O , затем выбирают сторону в зависимости от минуса.

Построение фигуры при гомотетии

Последовательность шагов для получения образа по заданному центру O и коэффициенту k



Гомотетия в жизни и технике



Карты и планы

На планах классов и домов масштабирует размеры так, чтобы форма помещений оставалась той же. Это удобно: расстояния берут с чертежа, не теряя пропорции.



Чертежи деталей

В машиностроительных чертежах важно передавать точные пропорции. Изменение масштаба происходит без искажения формы, что упрощает изготовление по размерам.



Архитектурные макеты

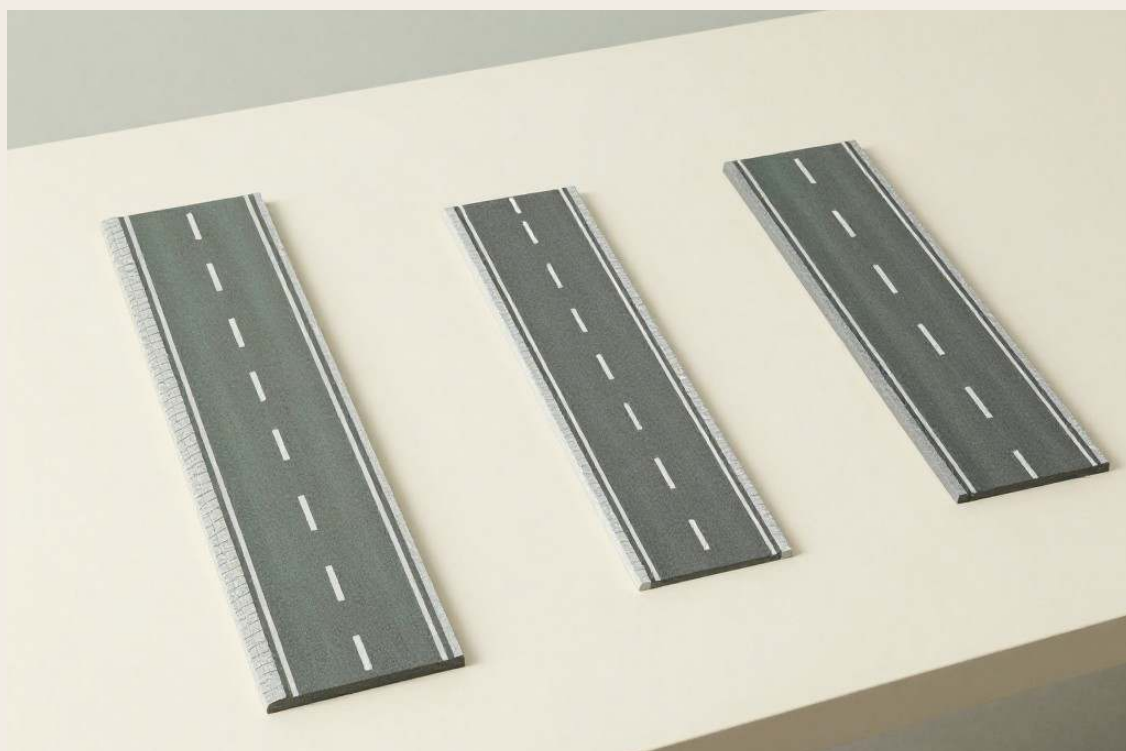
При создании макетов зданий используют гомотетию: модель сохраняет узнаваемые очертания, но становится меньше или больше. Так проект становится наглядным.



Изменение изображения

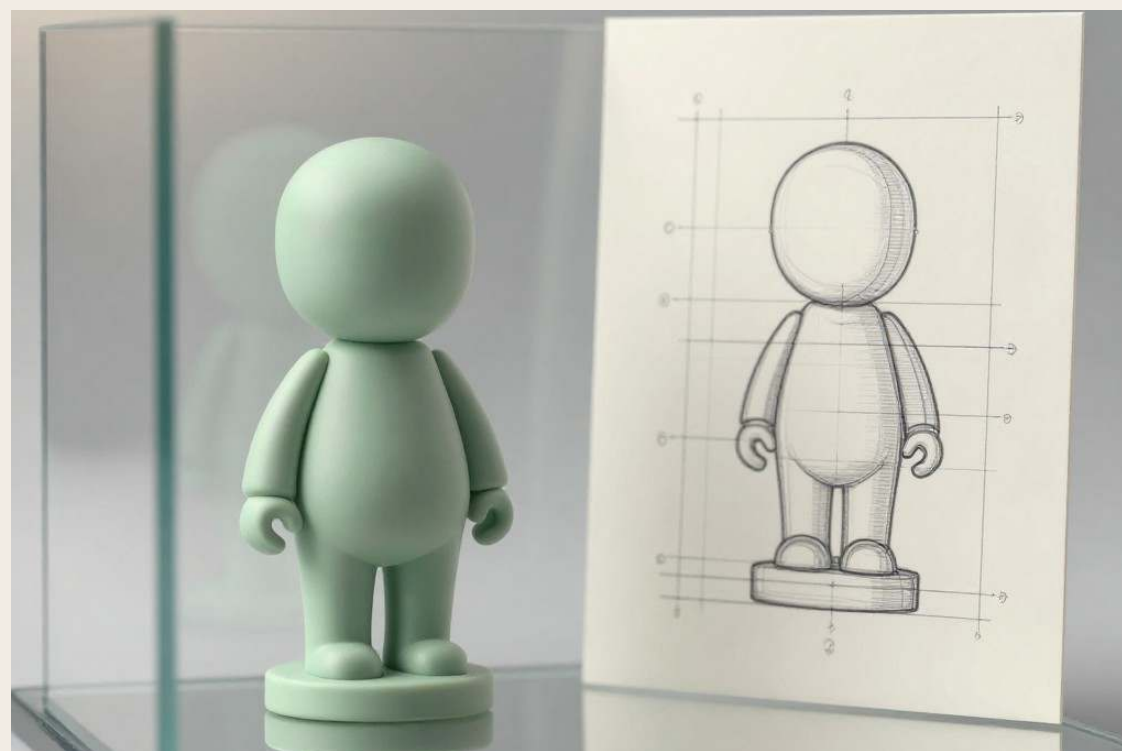
При увеличении фотографии на экране телефона меняются только размеры элементов, а геометрические формы не «ломаются». Это тот же принцип масштабирования.

Один объект в разных масштабах



Макет дороги: «как на карте»

Вы видите один и тот же участок в трёх версиях: в натуральную величину, в увеличенном и в уменьшенном варианте. Подписи показывают, что форма проезжей части и разметка остаются «одинаковыми по виду», меняется только масштаб.



Фигурка в витрине и её чертёж

Технический рисунок совпадает с самим предметом по очертаниям, хотя размеры различаются. На картинке удобно сравнить: контуры остаются подобными, а различие в размерах соответствует одному и тому же коэффициенту.



Школьная аппликация: уменьшили — но не «сломали»

Одна и та же геометрическая фигура повторяется в разных размерах на бумаге с клетками. Если уменьшить её с помощью гомотетии, все углы сохраняются, а для построения достаточно умножить расстояния до выбранного центра на один коэффициент.

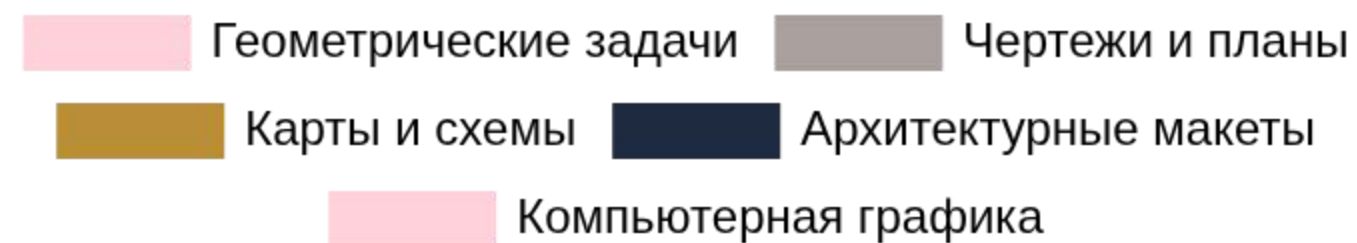
Типичные ошибки при выполнении гомотетии

Ошибка	Что делают неверно	Как исправить
Путаница знака k	образ ставят на неверной стороне	учесть: минус меняет направление
Меняют только одну сторону	длины подбирают отдельно для разных ребер	масштабировать каждую вершину одинаково
Неверный центр	лучи проводят не из точки O	сначала отметить точный центр
Неправильный порядок	точки соединяют не теми сторонами	соединять в том же порядке вершин
Нет прямой через центр	расстояния откладывают не на OA	каждая точка образа лежит на прямой через O

В таблице перечислены частые сбои при построениях. Во всех случаях страдает правило: все точки образа строятся от одного центра и по одному и тому же коэффициенту k .

Чтобы избежать ошибок, каждый раз возвращайтесь к правилу: один центр O , один коэффициент k , построение по прямым через центр.

Где применяется гомотетия чаще всего



На практике гомотетия помогает переносить форму из одного масштаба в другой без искажений. Поэтому её используют и в учебных задачах, и в моделировании.

Самые разные сферы объединяет одно: требуется сохранить очертания, меняя только размеры. Это и есть идея гомотетии.

Обобщение типичных учебных и практических применений масштабирования и подобия (без единого статистического источника)



Гомотетия: форма остаётся, меняется масштаб

Гомотетия изменяет размер фигуры, но сохраняет её форму. Центр задаёт направление образа, а коэффициент k — насколько меняются размеры: длины умножаются на $|k|$, площадь — на k^2 .