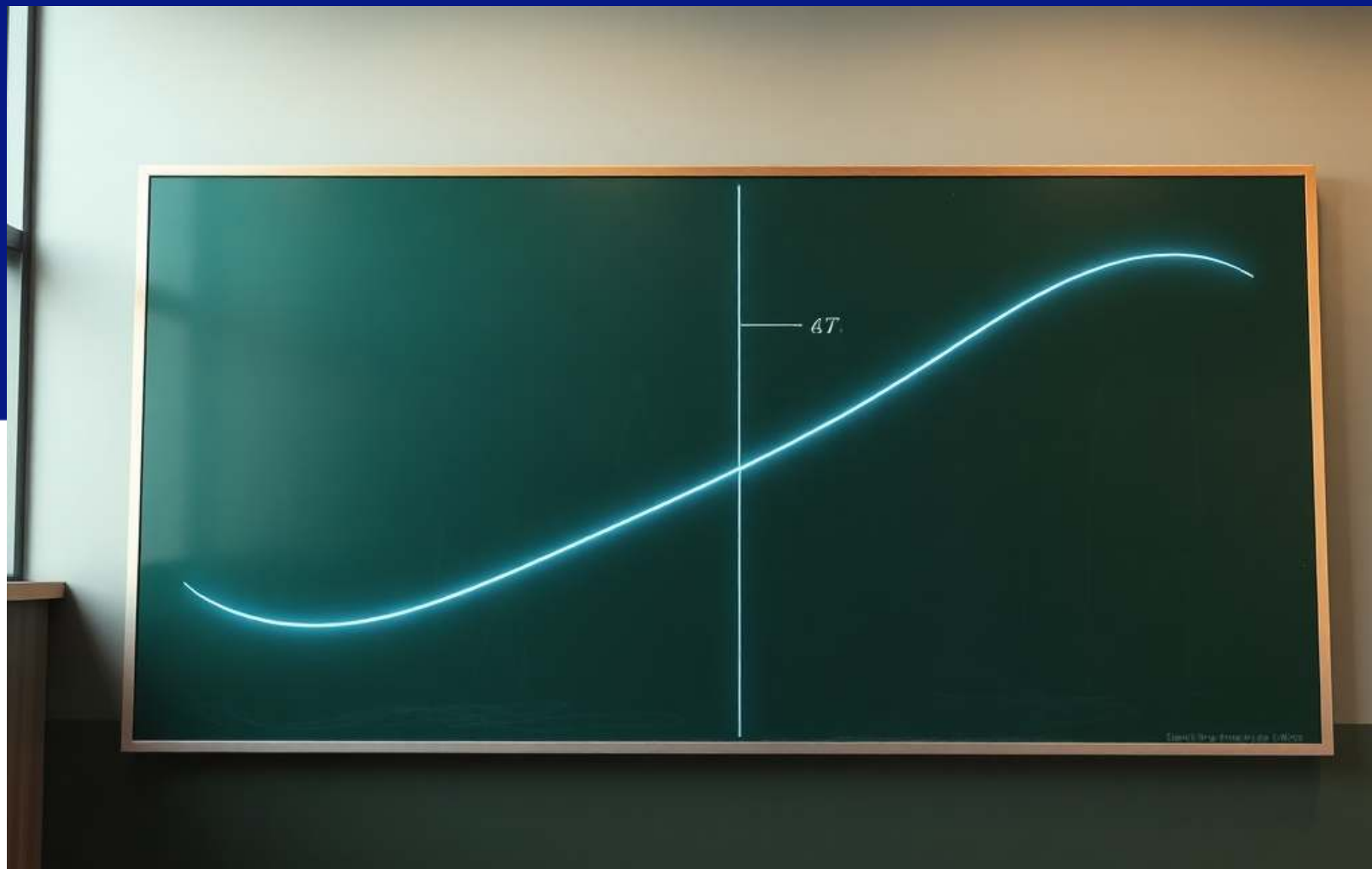


Тангенсоида и котангенсоида в курсе алгебры 10 класса



Графики $tg x$ и $ctg x$ раскрывают логику тригонометрических функций.

Почему эта тема важна в тригонометрии

Тангенсоида и котангенсоида продолжают изучение синуса и косинуса, связывают формулы с графиками и помогают уверенно читать разрывы, асимптоты, характерные точки и решения уравнений.



Определение тангенса и котангенса

1. Тангенс

Тангенс угла x определяется как отношение $\sin x$ к $\cos x$, если $\cos x$ не равен нулю. Эта функция связана с положением точки на единичной окружности.

2. Котангенс

Котангенс угла x равен отношению $\cos x$ к $\sin x$, если $\sin x$ не равен нулю. Значения обеих функций повторяются через π , поэтому их период равен π .

Единичная окружность и смысл отношений

Координаты точки

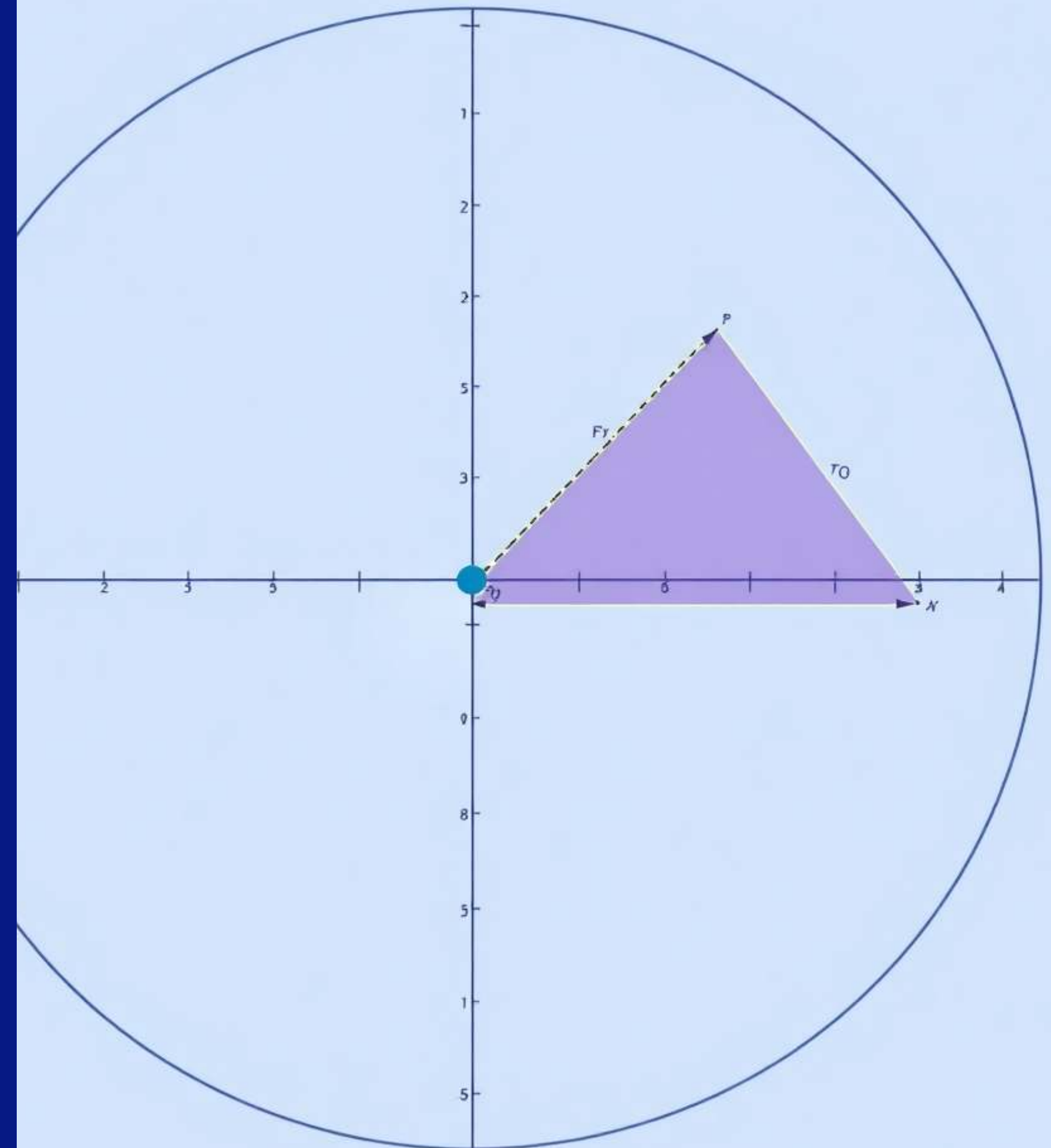
На единичной окружности точке угла x соответствуют координаты $(\cos x; \sin x)$. Именно они служат основой для построения тангенса и котангенса через отношения координат.

Геометрический смысл

Для $\operatorname{tg} x$ берут отношение y/x , а для $\operatorname{ctg} x$ — x/y . Поэтому знаки координат сразу определяют знак функции и объясняют различия между четвертями.

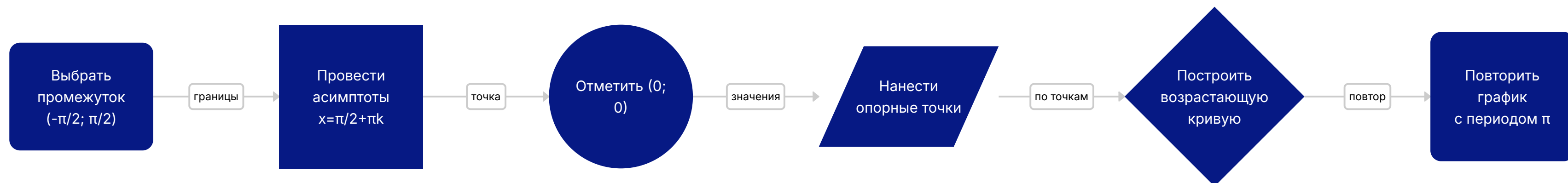
Чертеж как подсказка

Схема с осями, окружностью, радиус-вектором и подписью угла x помогает увидеть, почему функции меняются по-разному и почему некоторые значения недопустимы.



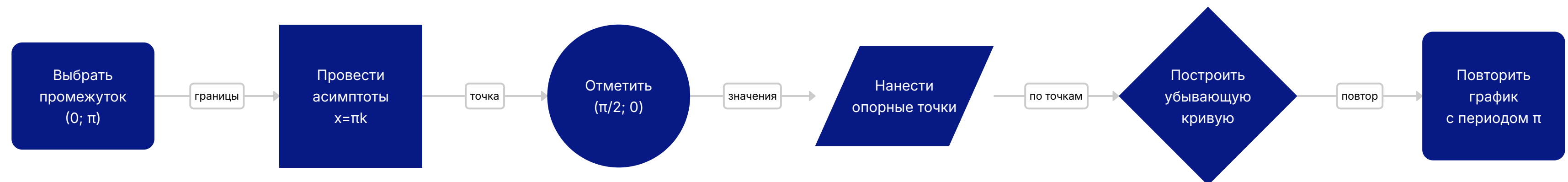
Построение графика $y = \operatorname{tg} x$

Пошаговая схема построения на основе базового промежутка и периодичности



Построение графика $y = \text{ctg } x$

Пошаговая схема построения на основе базового промежутка и периодичности



Сравнение основных свойств $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$

Свойство	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
Определение	$x \neq \pi/2 + \pi k$	$x \neq \pi k$
Период	π	π
Переход на промежутке	возрастает	убывает
Нуль	$x = \pi k$	$x = \pi/2 + \pi k$

Определения и свойства тригонометрических функций из курса алгебры 10 класса

Таблица показывает различия двух функций в области определения, асимптотах, нулях и характере изменения на базовом промежутке.

Обе функции периодичны, но имеют разные точки разрыва и противоположное направление изменения между асимптотами.

Периодичность и разрывы на одном поле координат

На общем поле удобно сравнивать расположение ветвей и повторяемость рисунка у обеих функций.

Графики имеют одинаковый период, но их асимптоты сдвинуты относительно друг друга, поэтому кривые не совпадают.

Схематическое построение по свойствам функций $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$

Область определения и область значений

1. Тангенс

Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена для всех действительных x , кроме точек $x = \pi/2 + \pi k$, где $\cos x$ обращается в ноль и отношение становится невозможным.

2. Котангенс

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ определена для всех действительных x , кроме точек $x = \pi k$, где $\sin x$ равен нулю. Эти разрывы образуют вертикальные асимптоты графика.

3. Область значений

Обе функции принимают любые действительные значения. Поэтому их область значений совпадает с множеством $\mathbb{R}$, а графики тянутся вверх и вниз без ограничений.

4. Зачем это знать

Понимание области определения помогает сразу исключать запрещённые точки и правильно читать график на промежутках между асимптотами без ошибок в вычислениях.

Нули функций и знаки по четвертям

Нули тангенса

Тангенс обращается в ноль при $x = \pi k$: в этих точках $\sin x = 0$, а $\cos x$ не равен нулю, поэтому отношение становится равным нулю.

Нули котангенса

Котангенс равен нулю при $x = \pi/2 + \pi k$: здесь $\cos x = 0$, а $\sin x$ не равен нулю, значит значение функции равно нулю.

Положительные значения

В I и III четвертях $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ положительны, поскольку синус и косинус имеют одинаковые знаки. Это удобно проверять по координатам точки на окружности.

Отрицательные значения

Во II и IV четвертях обе функции отрицательны, так как знаки синуса и косинуса становятся противоположными. Такой анализ быстро помогает определять знак без построения графика.

Монотонность на базовых промежутках

На каждом промежутке между асимптотами графики ведут себя противоположно, сохраняя одинаковую длину шага повторения.

Тангенс возрастает, котангенс убывает; это ключевой признак, позволяющий быстро распознавать функции по форме графика.

Схематическое построение по свойствам функций $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$.

Сдвиги и растяжения графиков

Сдвиг без изменения формы

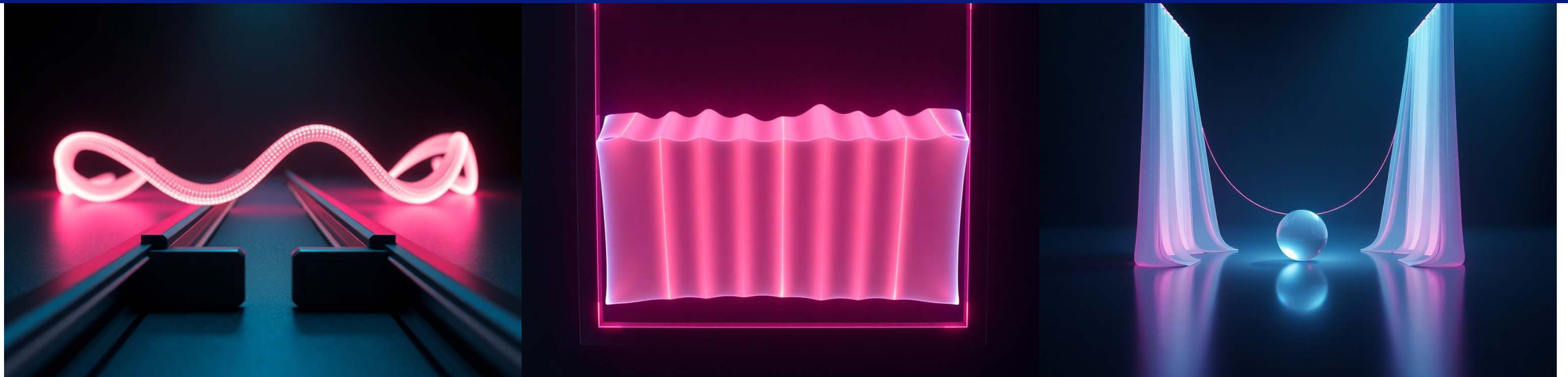
Если заменить x на $x-a$, весь график смещается вдоль оси Ox на a единиц, но не теряет периодичности и не меняет характер асимптот. У тангенса и котангенса сохраняется общий «волнистый» рисунок, только он начинается в новой точке.

Сжатие и растяжение по оси Ox

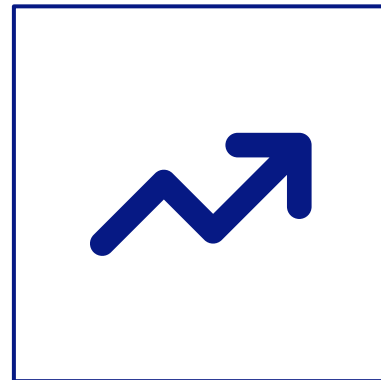
Множитель b в аргументе меняет частоту повторения графика. При $|b|>1$ один период укладывается в более короткий участок, а при $0<|b|<1$ график растягивается и становится реже. Вертикальные разрывы при этом остаются ориентиром построения.

Как читать преобразованный график

Чтобы не потерять ориентиры, сначала отмечают асимптоты, затем опорную точку и направление ветвей. После этого легко увидеть, что преобразованный график сохраняет исходный тип функции, но по-другому расположен относительно осей и промежутков определения.



Ключевые причины поведения графиков



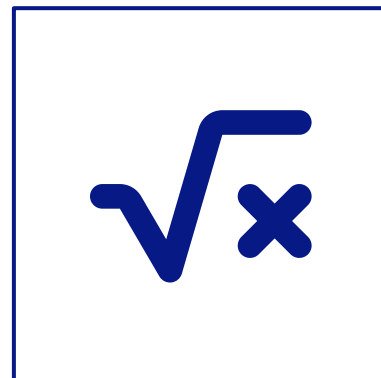
Тангенс идёт вверх

Производная $\tan x$ положительна на каждом промежутке определения, поэтому график возрастает от одной асимптоты к другой. Это объясняет его устойчивое движение вверх.



Котангенс идёт вниз

Производная $\cot x$ отрицательна там, где функция определена, поэтому график убывает на каждом базовом промежутке. Его ветви направлены сверху вниз.



Производная как объяснение

Знак производной показывает не только рост или убывание, но и связь между формулой функции и её графиком. Для тригонометрии это особенно наглядно.

Характерные значения на стандартных углах

x	tg x	ctg x
0	0	не опр.
$\pi/6$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	1	1
$\pi/2$	не опр.	0

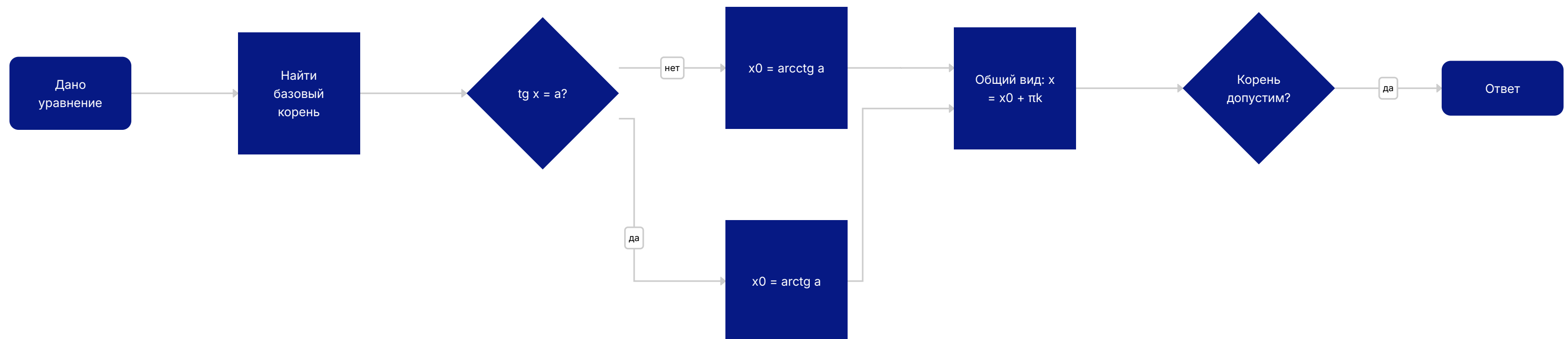
Стандартные значения тригонометрических функций на единичной окружности.

Значения tg x и ctg x на опорных углах помогают быстро проверять построение графика и читать таблицы значений.

Тангенс и котангенс взаимно дополняют друг друга: где одна функция равна нулю, другая не определена, а на симметричных углах их значения меняются местами.

Алгоритм решения уравнений $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$

Последовательность основана на периоде π , базовом решении и проверке области определения.



Сравнение значений на углах $\pi/6$, $\pi/4$ и $\pi/3$

На стандартных углах удобно видеть зеркальное поведение функций: одна растёт, другая уменьшается.

Чем больше угол внутри первого квадранта, тем больше $\operatorname{tg} x$ и тем меньше $\operatorname{ctg} x$; при $\pi/4$ они совпадают.

Стандартные значения тригонометрических функций на углах $\pi/6$, $\pi/4$ и $\pi/3$.

Типичные ошибки при работе с графиками

Путают асимптоту с нулём

Вертикальные асимптоты часто ошибочно принимают за точки пересечения с осью Ox . На самом деле график лишь приближается к ним и не может их пересечь.

Забывают период π

У тангенса и котангенса повторение происходит через π , а не через 2π . Из-за этого учащиеся неверно продолжают рисунок и получают смещённый график.

Подставляют запрещённые значения

Нельзя вычислять $\operatorname{tg} x$ при $x=\pi/2$ и $\operatorname{ctg} x$ при $x=0$, потому что в этих точках функции не определены. Это ведёт к ложным выводам.

Ошибаются в знаках

Знак функции нужно определять по четверти и по знакам $\sin x$ и $\cos x$. Без этого легко перепутать направление ветвей на графике.

Где используются тангенс и котангенс

1. Геометрические задачи

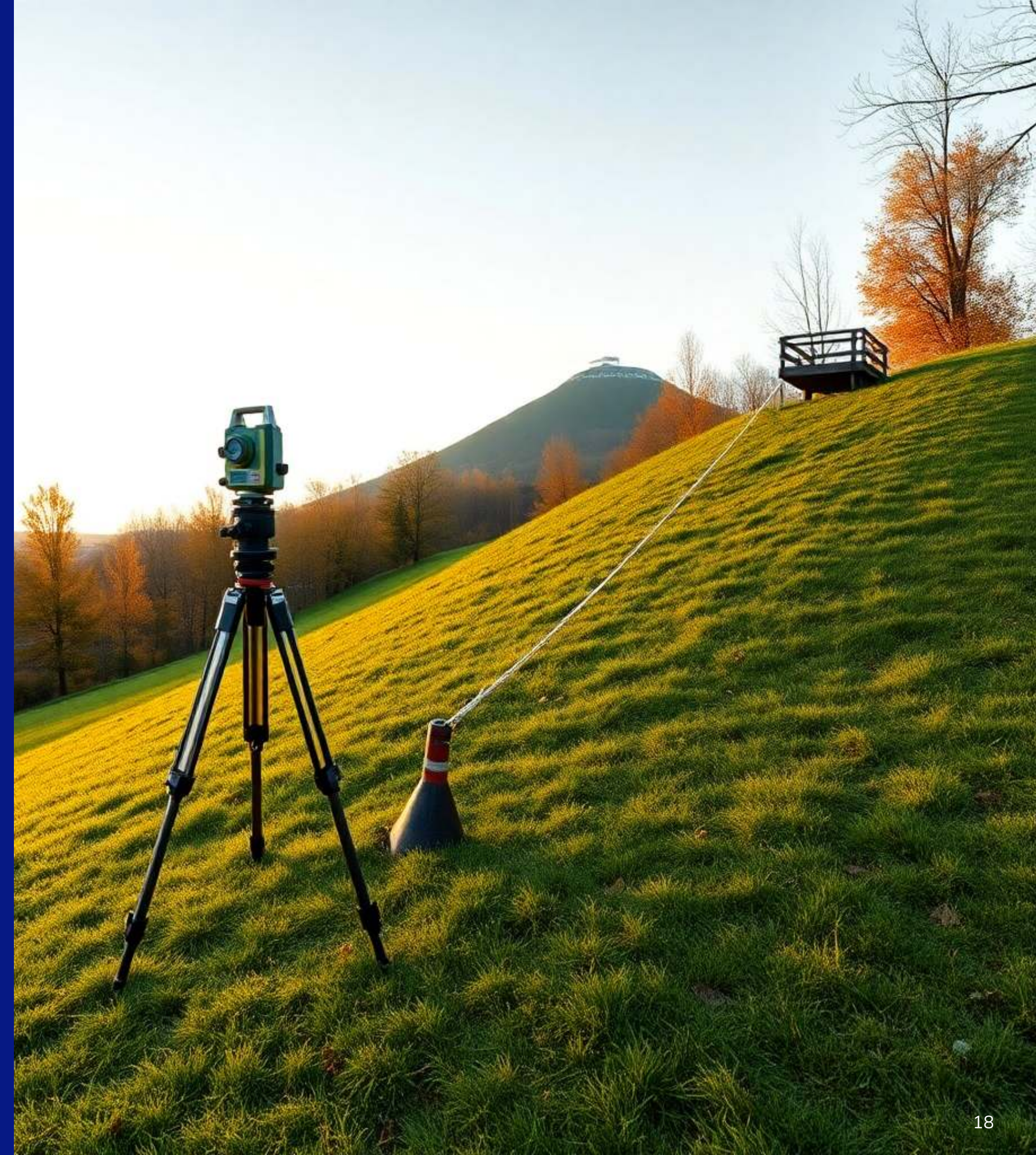
Тангенс помогает находить угол наклона и высоты по известному основанию, а котангенс удобен, когда требуется выразить отношение прилежащего катета к противолежащему.

2. Измерения на местности

В задачах на расстояние и высоту тригонометрические отношения позволяют связать угол наблюдения с размерами объекта. Это делает расчёты короче и нагляднее.

3. Техника и физика

В прикладных моделях тангенс и котангенс описывают направления, наклонные поверхности и некоторые периодические процессы, где важна связь угла и изменения величины.



Краткий план построения и проверки графика

Этап	Смысл	Проверка
Определить ОДЗ	Найти запреты	Асимптоты
Выбрать точки	Взять опорные значения	Форма ветвей
Учесть период	Повторить через π	Смещение рисунка
Проверить оси	Нули и пересечения	$(0; 0)$ или $(\pi/2; 0)$

Алгоритм построения графиков функций $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$.

План помогает быстро построить график и сразу заметить, к какой функции он относится.

Последовательная проверка ОДЗ, асимптот и опорных точек снижает риск ошибок и позволяет уверенно различать тангенсоиду и котангенсоиду.

Тангенсоиды, которые легко читать

Тангенсоида и котангенсоида становятся понятными, когда видны их асимптоты, период π , монотонность и нули. Эти свойства превращают графики в удобный инструмент для решения уравнений и анализа функций.