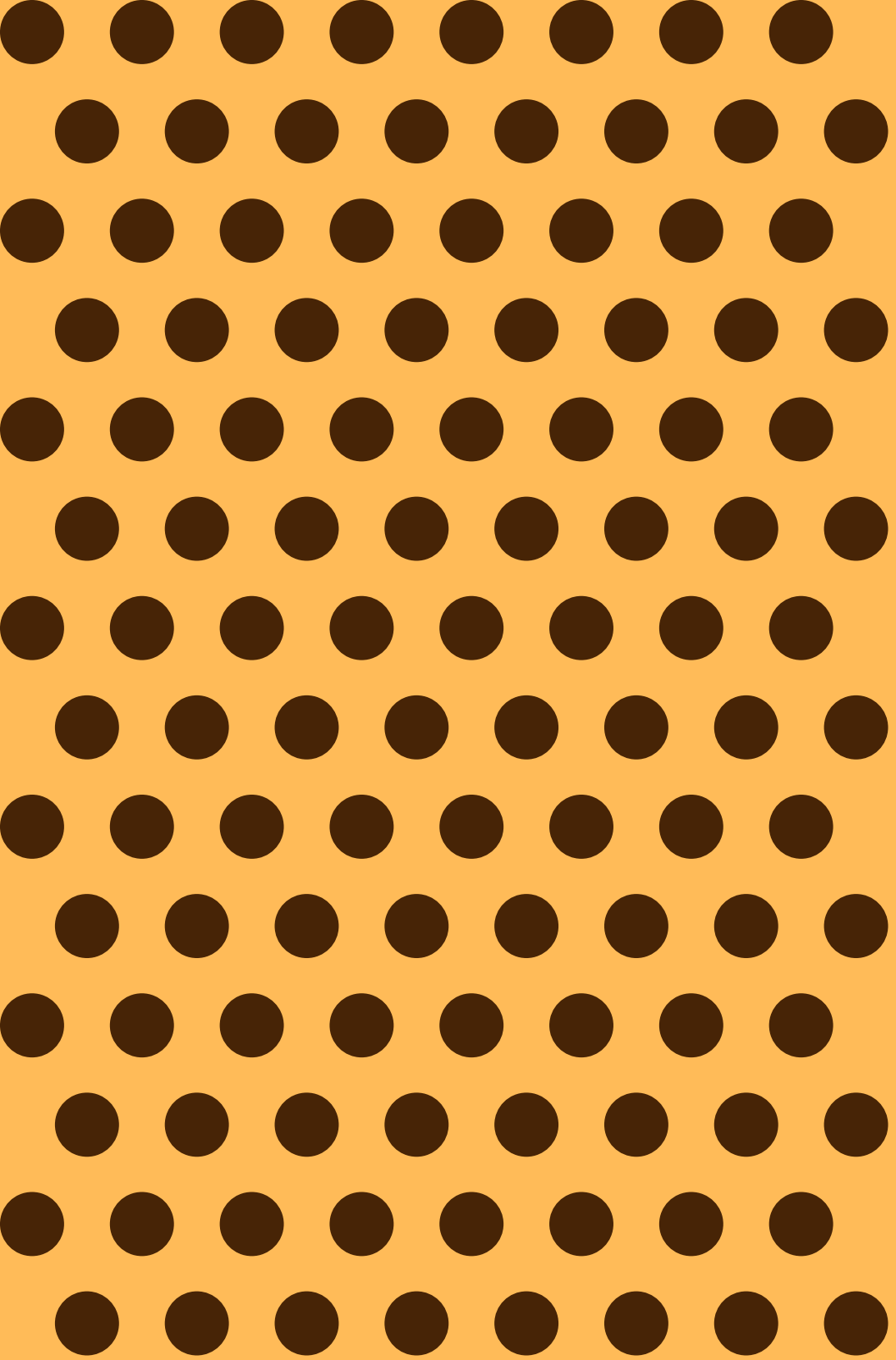
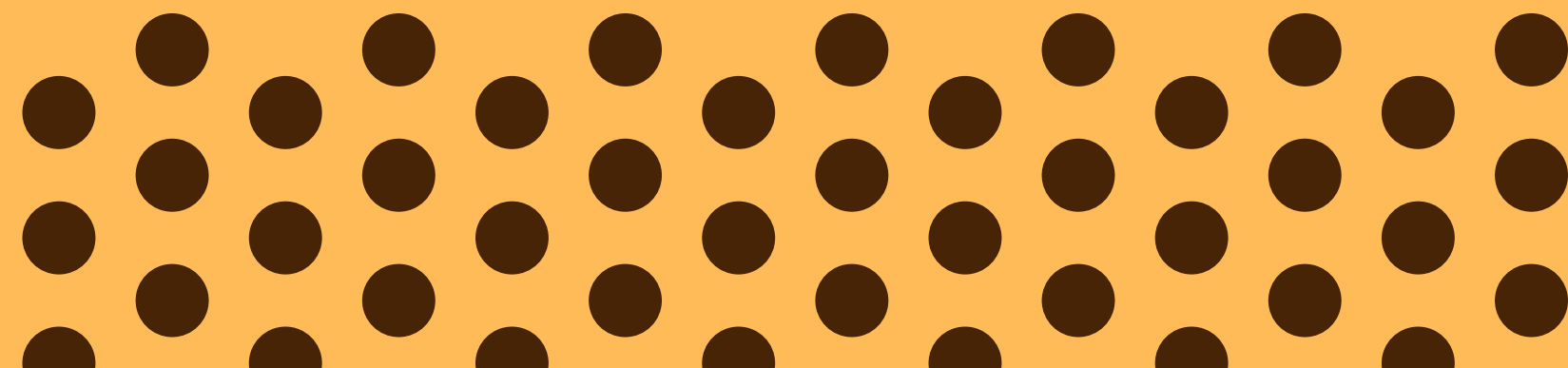




Интеграл: идея накопления, площади и вычислений

От малых приращений к точному результату



Зачем интеграл изучают в 10 классе

Интеграл завершает тему производной и показывает обратную связь между изменением и накоплением. Он помогает находить площади, восстанавливать функцию по её производной и решать прикладные задачи о движении, массе и объёме.



Интеграл как сумма очень малых частей

.1

Разбиение отрезка

Сначала промежуток делят на множество очень узких частей. Чем мельче разбиение, тем точнее можно описать, сколько величины накопилось на всём отрезке.

.2

Малый вклад

На каждом участке значение функции умножают на длину этого участка. Получается маленькая добавка к общему результату, похожая на вклад одного шага в длинный путь.

.3

Сумма Римана

Все такие добавки складывают. Эта сумма показывает приближённое накопление и становится основой для строгого определения интеграла через предел.

.4

Переход к пределу

Когда ширина участков стремится к нулю, сумма приближается к точному значению. Так непрерывный процесс заменяется вычислимой математической моделью.

.5

Роль непрерывности

Для непрерывной функции на отрезке такой переход ведёт к устойчивому результату. Именно поэтому интеграл так естественно описывает плавно меняющиеся величины.

Геометрический смысл определённого интеграла



Площадь под графиком

Определённый интеграл на отрезке $[a; b]$ связан с фигурой, ограниченной графиком функции, осью Ox и вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$.



Знак значения

Если график расположен выше оси Ox , вклад положителен. Если ниже, он считается отрицательным, поэтому интеграл может отражать не только площадь, но и ориентированное накопление.



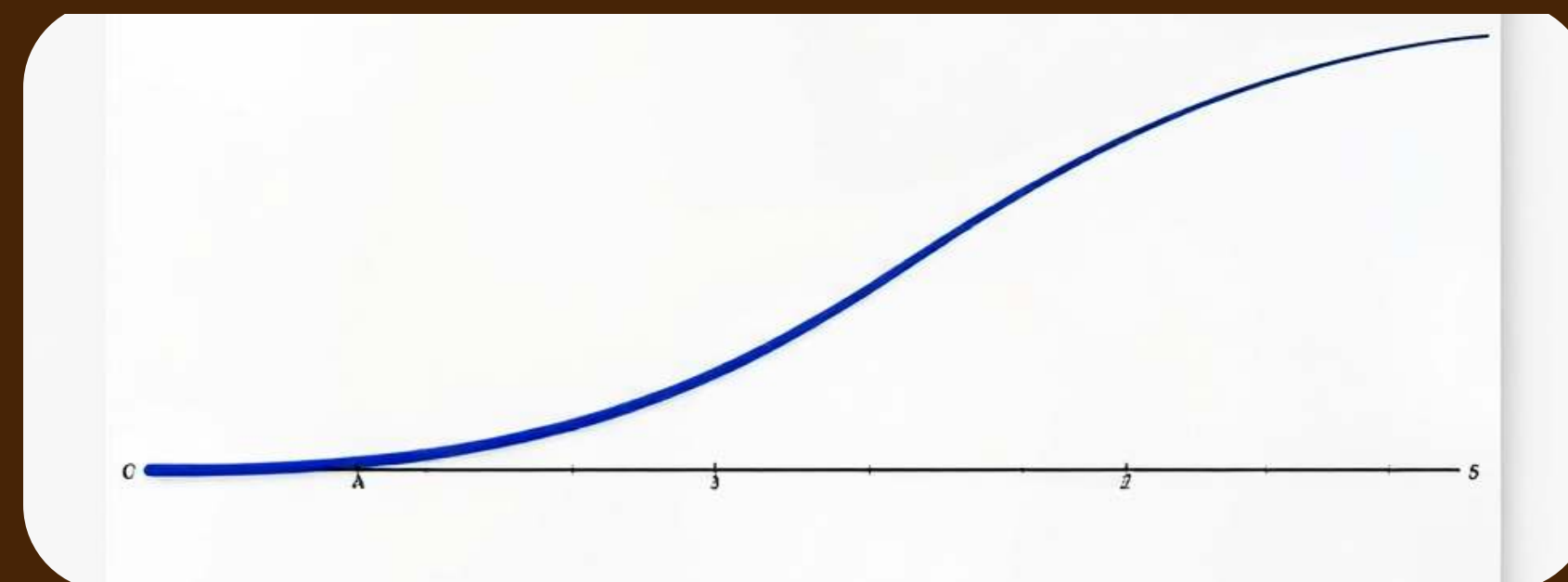
Наглядное представление

Полезно видеть закрашенную область под кривой: так легче связать формулу с рисунком и понять, почему интеграл зависит от формы графика на промежутке.



Связь с площадью

Когда функция не меняет знак и остаётся неотрицательной, определённый интеграл совпадает с площадью соответствующей плоской фигуры в привычном геометрическом смысле.

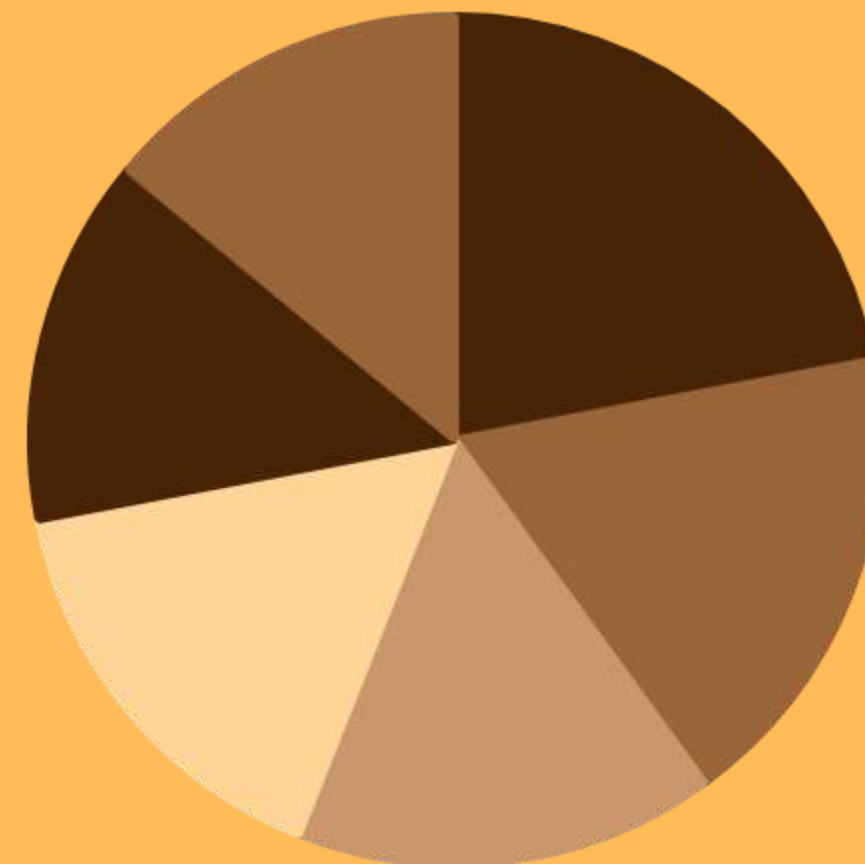
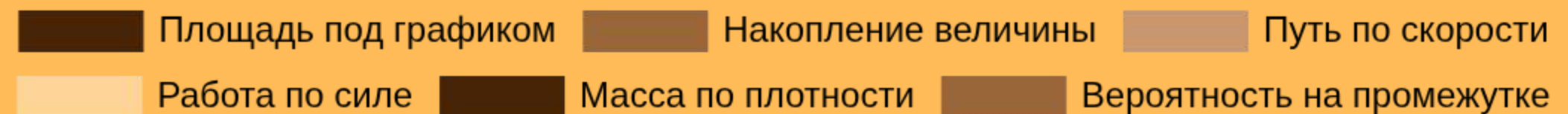


Основные смыслы интеграла в школьном курсе

Одна и та же операция описывает и геометрические, и прикладные ситуации, поэтому её удобно рассматривать через разные интерпретации.

Все смыслы сводятся к идее накопления на непрерывном промежутке; различаются лишь величина, её физический смысл и единицы измерения.

Содержательное обобщение по школьному курсу алгебры и начал анализа



.1

Что означает запись

Запись $\int f(x)dx$ означает поиск функции, производная которой равна $f(x)$. Иными словами, нужно восстановить исходную функцию по её производной.

.2

Первообразная

Если $F'(x) = f(x)$, то $F(x)$ называют первообразной для $f(x)$. У одной функции может быть бесконечно много первообразных, отличающихся только постоянной.

.3

Почему появляется C

К любой первообразной можно прибавить произвольную константу C , потому что производная постоянной равна нулю. Поэтому неопределённый интеграл задаёт целое семейство функций.

.4

Смысл результата

Неопределённый интеграл не даёт одно число. Он показывает общий вид функции, которая при дифференцировании возвращает исходное выражение.

Неопределённый интеграл и первообразная

Основные формулы интегрирования

Таблица содержит базовые формулы, которые чаще всего используются в школьных задачах на нахождение первообразной.

Эти правила покрывают основные типы выражений и служат отправной точкой для более сложных вычислений.

Школьные формулы неопределённого интеграла

Функция	Интеграл	Комментарий
x^n	$x^{(n+1)/(n+1)}+C$	$n \neq -1$
$1/x$	$\ln x +C$	логарифм
e^x	e^x+C	без изменений
$\sin x$	$-\cos x+C$	знак меняется
$\cos x$	$\sin x+C$	стандартно

Связь производной и интеграла

Последовательность показывает переход от функции к производной, затем к первообразной и определённому интегралу.

Формула Ньютона–Лейбница

.1

Основное равенство

Если $F'(x) = f(x)$,
то определённый интеграл
от a до b равен $F(b) - F(a)$.
Это и есть формула
Ньютона–Лейбница
в школьной записи.

.2

Как она работает

Формула позволяет
вычислять интеграл через
любую первообразную,
не прибегая
к суммированию малых
частей. Достаточно найти
удобную функцию F
и сравнить её значения
на концах отрезка.

.3

Почему это важно

Геометрическая задача
о площади или накоплении
превращается
в алгебраическое
вычисление разности.
Именно поэтому формула
делает интеграл
практичным инструментом
для задач на уроках
и в приложениях.

.1

Когда он нужен

Замена переменной полезна, если под знаком интеграла стоит сложная функция вместе с её производной или близким выражением. Тогда структура интеграла становится заметно проще.

.2

Идея замены

Вводят новую переменную, чтобы объединить внутреннее выражение и его производную в одну более удобную форму. После этого интеграл часто принимает стандартный вид.

.3

Типичные примеры

Метод особенно часто встречается в выражениях вида $(ax + b)^n$, $\sqrt{ax + b}$, $e^{(kx + b)}$, $\sin(ax + b)$ и $\cos(ax + b)$, где внутренняя часть легко выделяется.

.4

Результат упрощения

После замены переменной громоздкий интеграл сводится к известной формуле или более короткому выражению. Это экономит время и уменьшает риск ошибки при вычислениях.

Метод замены переменной

Интегрирование по частям

.1

Идея метода

Метод основан на преобразовании произведения функций в более удобную форму через формулу $\int u dv = uv - \int v du$. Он особенно полезен, когда одна часть выражения упрощается при дифференцировании.

.2

Как выбирать u и dv

Обычно за u берут функцию, которая при дифференцировании становится проще, а за dv — выражение, интеграл от которого легко найти. Такой выбор сокращает вычисления и уменьшает вероятность ошибок.

.3

Типичные примеры

Чаще всего этот приём применяют для интегралов вида $x \cdot e^x$, $x \cdot \sin x$, $x \cdot \cos x$ и $x \cdot \ln x$. В каждом случае произведение после одной операции становится заметно удобнее для дальнейшего вычисления.

.4

Повторное применение

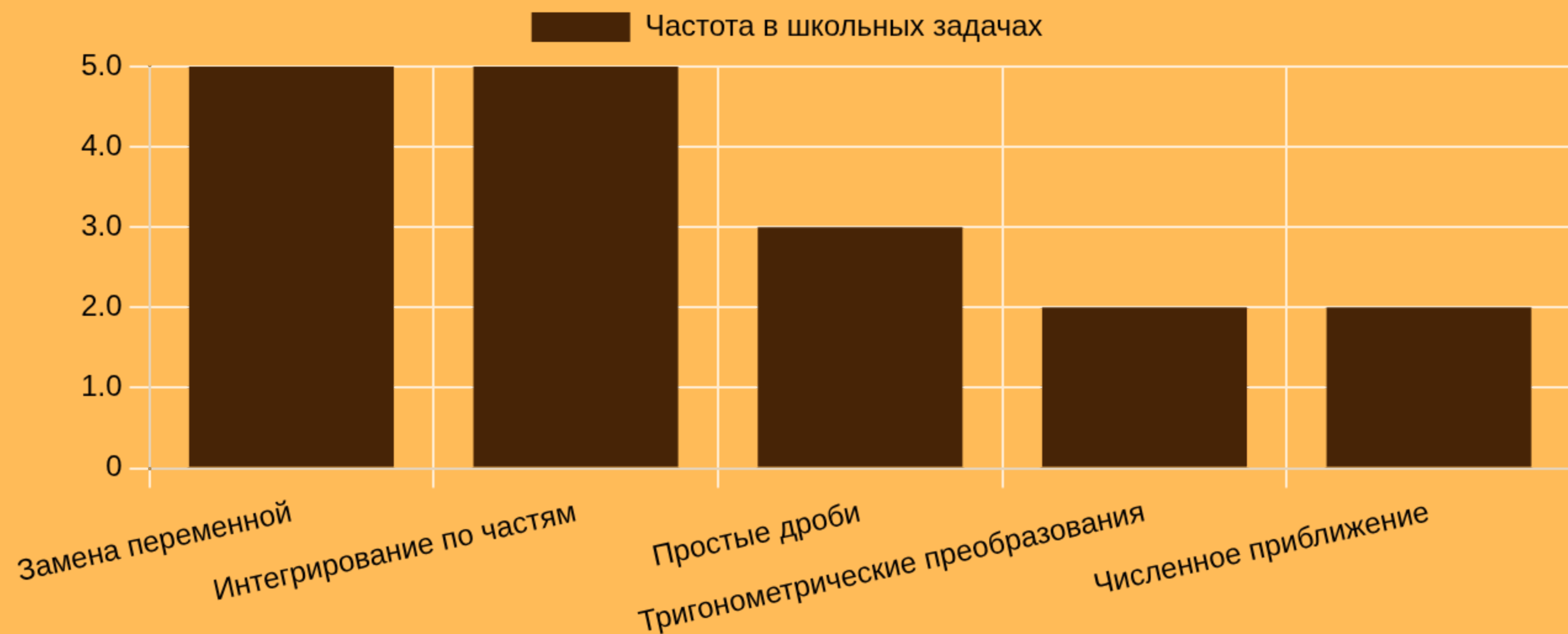
Иногда формулу приходится использовать несколько раз подряд, пока исходный интеграл не сводится к известному виду. Поэтому важно аккуратно следить за знаками, константой и промежуточными преобразованиями.

Какие методы интегрирования используются чаще

Диаграмма показывает не точную статистику, а типичную для школьного курса картину: базовые методы встречаются значительно чаще специальных приёмов.

На практике чаще всего нужны замена переменной и интегрирование по частям; остальные способы важны, но применяются в более узких типах задач.

Дидактическая оценка по материалу школьного курса, 10 класс



.1

Когда нужны приближения

Если первообразную трудно выразить через элементарные функции или вычисления становятся слишком громоздкими, используют численные методы. Они дают приближённый ответ, который можно сделать достаточно точным.

.2

Метод прямоугольников

Идея состоит в замене криволинейной фигуры набором узких прямоугольников. Чем меньше ширина разбиения, тем ближе сумма их площадей к истинному значению интеграла.

.3

Трапеции и Симпсон

Метод трапеций заменяет участок графика отрезком, а формула Симпсона использует более точную аппроксимацию параболой. Эти способы обычно дают лучшую точность при том же шаге.

.4

Где применяются

Приближённые вычисления особенно важны в моделировании процессов, обработке измерений и работе с табличными данными. Здесь нужна не символическая формула, а надёжный численный результат.

Численные методы вычисления интеграла

Площадь между графиками функций



.1

Разность функций

Площадь между двумя графиками на отрезке находят как интеграл разности верхней и нижней функции. Такой подход учитывает именно расстояние между кривыми, а не их отдельные площади.

.2

Если графики меняются местами

Когда одна кривая становится выше другой, отрезок разбивают на части и отдельно рассматривают каждый участок. Это позволяет избежать отрицательного вклада и корректно посчитать итоговую площадь.

.3

Границы области

Нужно заранее определить точки пересечения и выбрать промежуток, на котором замкнута фигура. Без этого легко включить лишние участки или потерять часть искомой области.

.4

Зачем это важно

Такой приём обобщает привычные формулы площади и позволяет работать с фигурами произвольной формы. Именно поэтому интеграл становится универсальным инструментом для геометрических задач.

.1

Идея вращения

Если плоскую фигуру повернуть вокруг оси, образуется тело вращения. Его объём можно найти не по готовой геометрической формуле, а через интеграл по поперечным сечениям.

.2

Метод дисков

Когда сечения перпендикулярны оси вращения и не имеют отверстия, используют формулу дисков. Радиус каждого сечения задаётся функцией, а объём складывается из множества тонких слоёв.

Объём тела вращения

.3

Метод колец

Если при вращении возникает полость, применяют метод колец. Тогда вычитают объём внутреннего цилиндра из внешнего, что позволяет описывать более сложные тела.



Физический смысл интеграла

Путь по скорости

Если известна скорость движения, интеграл по времени даёт пройденный путь. Здесь малые участки времени складываются в общий результат, а не мгновенное значение скорости.

Работа по силе

Когда сила может меняться вдоль пути, работа вычисляется как сумма её элементарных вкладов. Интеграл позволяет учесть изменение силы на каждом участке движения.

Масса по плотности

Для тела с непрерывно распределённой плотностью интеграл по длине, площади или объёму даёт массу. Это особенно удобно, когда плотность неодинакова по всему объекту.

Накопление вещества

В задачах на приток и расход интеграл показывает, сколько вещества накопилось за интервал времени. Он связывает скорость изменения с итоговым количеством.

Общий принцип

Во всех этих сюжетах одна и та же идея: локальные изменения, взятые на множестве маленьких промежутков, дают точный итоговый результат для всей системы.

Где интеграл применяется в разных областях

Примеры показывают, что интеграл описывает накопление в самых разных науках и помогает переводить локальный закон изменения в итоговую величину.

Несмотря на разные объекты, везде используется одна схема: интеграл суммирует непрерывно меняющуюся величину на всём промежутке.

Обобщение школьных прикладных задач по математике и естествознанию

Область	Типичная задача	Пример
Физика	Путь, работа	Скорость
Геометрия	Площадь, объём	Фигура вращения
Экономика	Выручка, издержки	Суммарный доход
Биология	Накопление вещества	Рост популяции

Алгоритм решения типовой задачи на интеграл

Последовательность шагов для вычисления и проверки результата

Неправильные интегралы и условия существования

.1

Когда интеграл неправильный

Неправильным называют интеграл с бесконечным пределом или с разрывом подынтегральной функции на промежутке. В этих случаях обычная формула применяется не напрямую, а через предел.

.2

Проверка через предел

Значение такого интеграла определяют как предел соответствующих правильных интегралов. Если предел существует и конечен, интеграл сходится; если нет, говорят о расходимости.

.3

Роль особых точек

Поведение функции около разрыва или бесконечности решает всё. Иногда бесконечность оказывается достаточно слабой, чтобы интеграл сходился, а иногда даже небольшой разрыв мешает существованию значения.

.4

Почему это важно

Понятие неправильного интеграла расширяет школьный курс и помогает работать с более сложными задачами анализа. Оно показывает, что не всякая формальная запись автоматически имеет конечный результат.

Интеграл: от локального изменения к общему результату

Интеграл связывает геометрию, алгебру и прикладные задачи в единую идею непрерывного накопления. Он учит видеть за малыми изменениями точный итог и завершает важную линию школьного анализа.