

Скалярное произведение векторов: главная идея темы

Связывает длины векторов и угол между ними, давая одно число $a \cdot b$.

1 ÷ 2

log

8



Где в школьной геометрии появляется скалярное произведение

4 1 2 9

Векторы в 9 классе помогают описывать направление и длину отрезков на плоскости. Скалярное произведение появляется после изучения координат и тригонометрии: в нём используется $\cos$ угла. С его помощью находят углы и проверяют перпендикулярность.

6 7



Определение скалярного произведения

Скалярное произведение двух векторов a и b обозначается как $a \cdot b$. Результат всегда число, а не новый вектор, поэтому его удобно сравнивать и анализировать.

Значение зависит от длин $|a|$ и $|b|$ и угла α между ними. При остром угле $a \cdot b$ положительно, при прямом — равно нулю, при тупом — отрицательно.

Геометрический смысл записывают формулой: $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \alpha$. Чем ближе угол к 0° , тем больше влияние направления на результат.



Как меняется значение в зависимости от угла

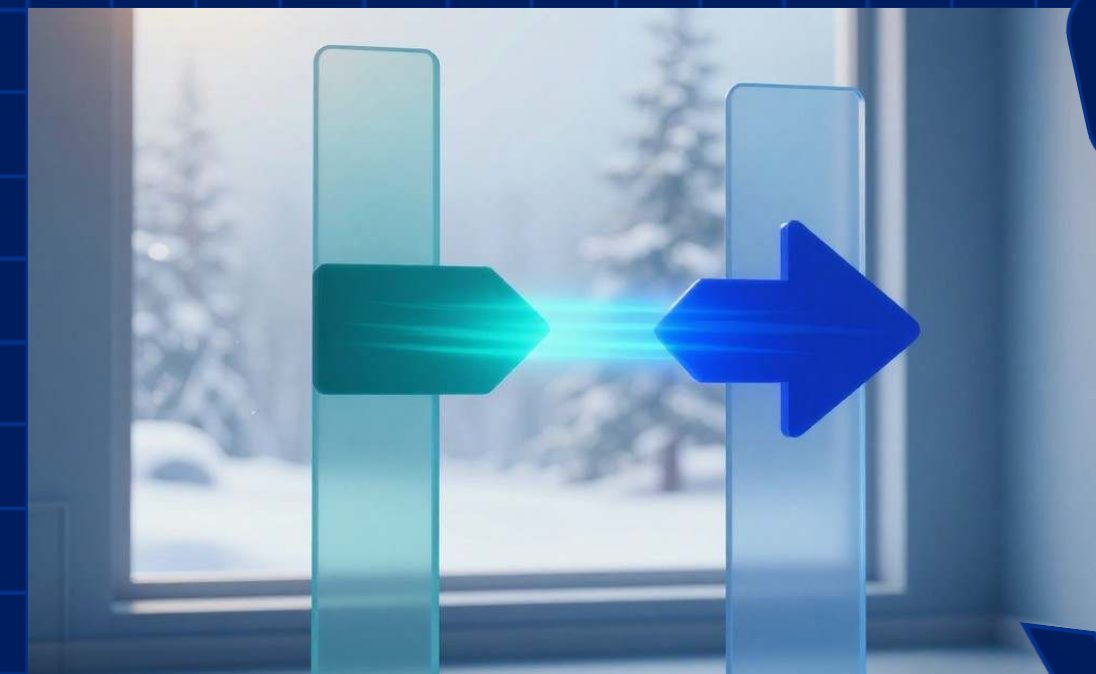
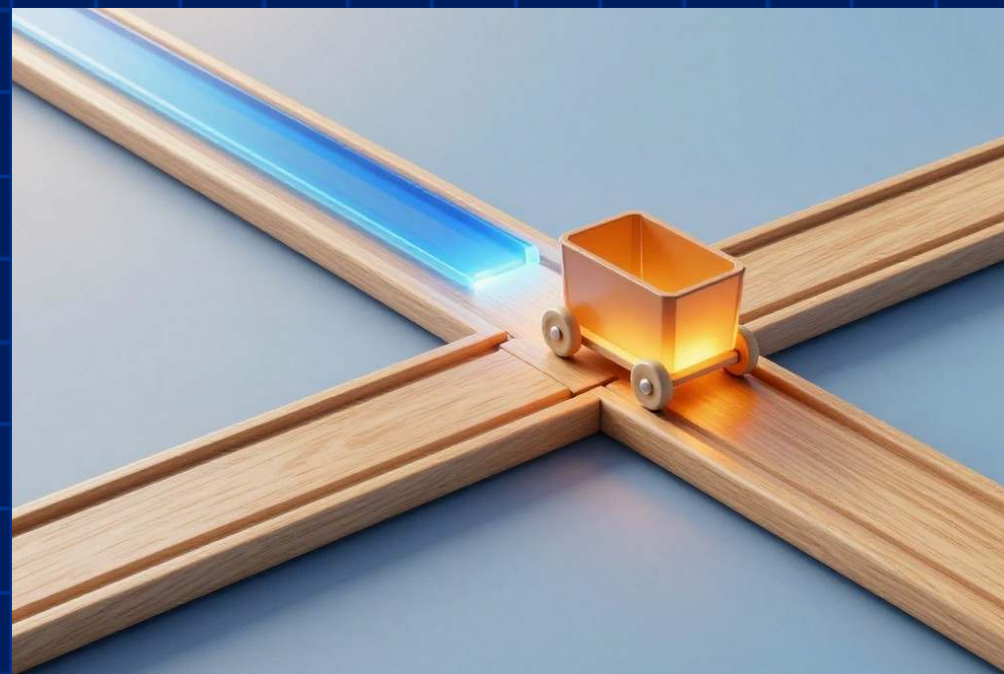
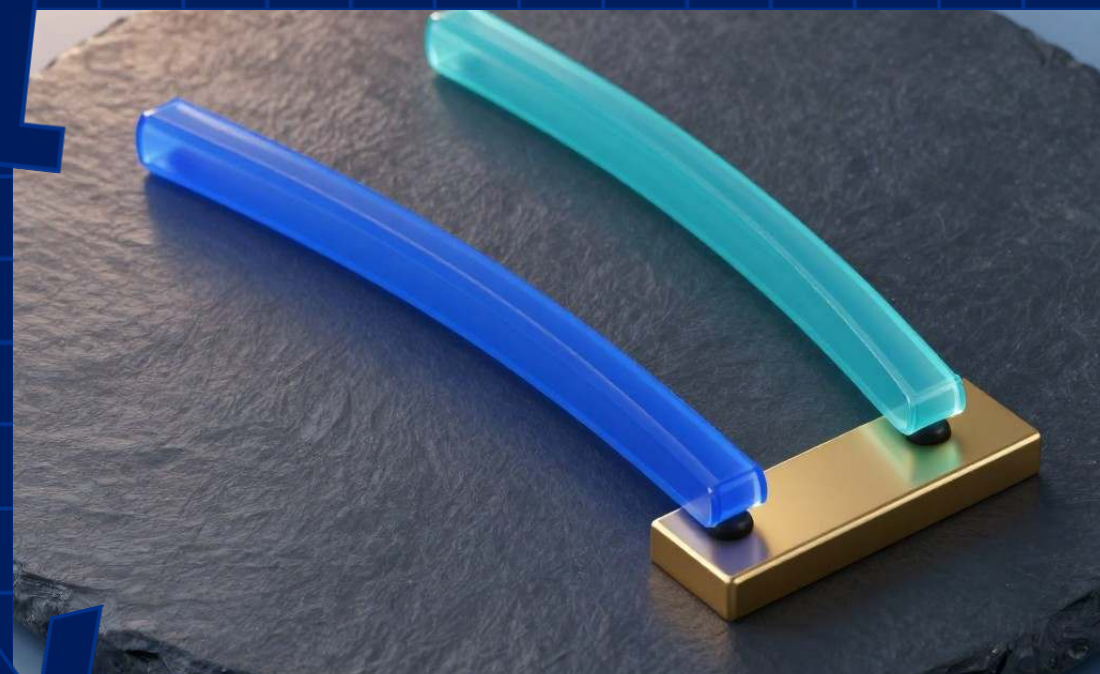


По определению $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \alpha$, без привязки к конкретным числам длин.

При фиксированных длинах $|a|$ и $|b|$ меняется только $\cos \alpha$, поэтому кривая повторяет поведение косинуса.

Отсюда видно: максимальное значение получается при сонаправленности ($\alpha = 0^\circ$), а ноль — при перпендикулярности ($\alpha = 90^\circ$).

Геометрический смысл через угол и проекцию



Почему $\cos \alpha$ влияет на результат

Угол α показывает взаимную «наклонённость» направлений векторов. Когда векторы смотрят почти в одну сторону, $\cos \alpha$ близок к 1, и произведение получается большим по модулю. При повороте к 90° значение стремится к нулю.

Проекция как «вклад направления»

Проекция одного вектора на направление другого — это часть вектора, идущая вдоль «оси» второго. Именно её величина определяет размер $a \cdot b$. Чем больше проекция по направлению, тем больше становится скалярное произведение.

Знак: где векторы «совпадают», а где «противоречат»

Если векторы сонаправлены, их проекции направлены одинаково, поэтому $a \cdot b$ положительно. При перпендикулярности проекция равна нулю. Когда направления противоположны, проекция меняет знак, и $a \cdot b$ становится отрицательным.

Основные формулы скалярного произведения

Запись	Что показывает	Где удобнее
$a \cdot b = a \cdot b \cdot \cos \alpha$	Связь с углом	Когда дан угол
$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2$	Счёт по координатам	Когда есть координаты
$(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$	Счёт в пространстве	Когда есть z
$a \cdot a = a ^2$	Длина в квадрате	Для проверки $ a $

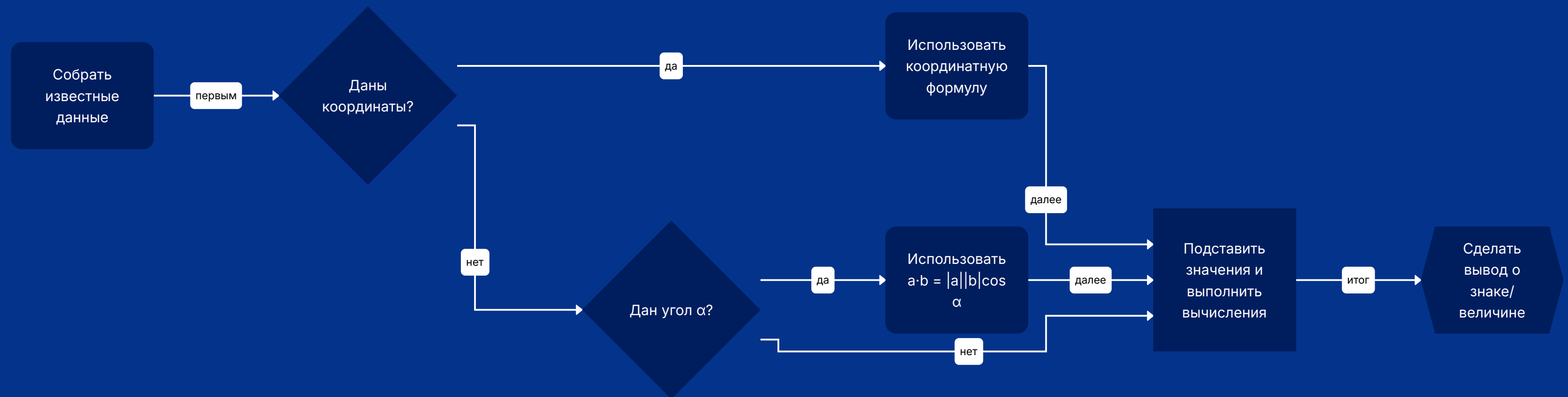
Сводка формул из школьного курса (9 класс) по теме скалярного произведения.

Ниже собраны ключевые записи: через длины и угол, а также через координаты в плоскости и в пространстве.

Через $\cos \alpha$ результат зависит от направления, а формулы по координатам делают вычисления прямыми: достаточно подставить числа.

Порядок нахождения скалярного произведения

Выбор формулы зависит от того, какие данные даны в условии задачи (координаты или угол).



Свойства скалярного произведения

1

log



Коммутативность

Скалярное произведение не меняется при перестановке векторов: $a \cdot b = b \cdot a$. Это удобно, когда удобнее считать в той записи, где числа меньше или проще.



Распределительность

Сумма векторов внутри скалярного произведения раскладывается: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$. Так выражение можно разбить на несколько более простых вычислений.



Умножение вектора на число

Если умножить один из векторов на число k , то скалярное произведение умножится на k : $(ka) \cdot b = k(a \cdot b)$. Поэтому коэффициенты проще вынести заранее.



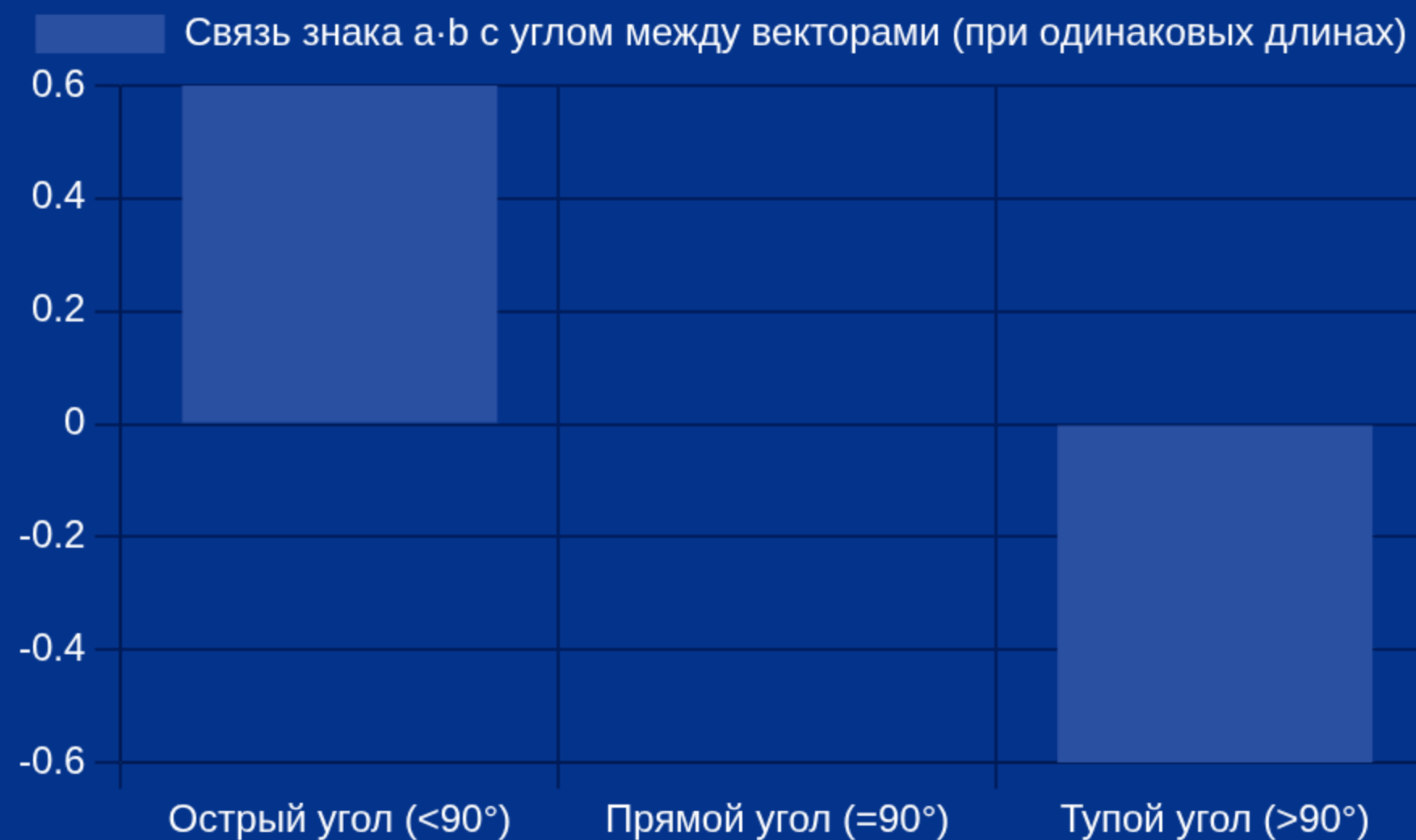
Нулевой вектор

Если один из векторов нулевой, то скалярное произведение равно нулю: при $a = 0$ векторы «не дают вклада» в сумму. Это помогает быстро проверять ответы.

2

x

Знак результата и взаимное расположение векторов



По формуле $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \alpha$ (значения взяты как примеры с одинаковыми длинами векторов).

Диаграмма показывает, что при изменении угла меняется только знак, если длины одинаковые: направление становится главным «индикатором».

Положительное $a \cdot b$ соответствует сближению направлений, нулевое — перпендикулярности, отрицательное — противоположности направлений.

Перпендикулярность и параллельность векторов

sin



x

y

z

- Если $a \cdot b = 0$ и оба вектора ненулевые, то угол между ними равен 90° , значит векторы перпендикулярны. Это надёжный признак для проверки перпендикулярности по вычисленному произведению.
- Если векторы параллельны и направлены одинаково, то угол $\alpha = 0^\circ$, а $\cos \alpha = 1$, поэтому $a \cdot b$ положительно. Если параллельны, но направлены в разные стороны, то $\alpha = 180^\circ$, и произведение становится отрицательным.



Примеры вычислений по координатам

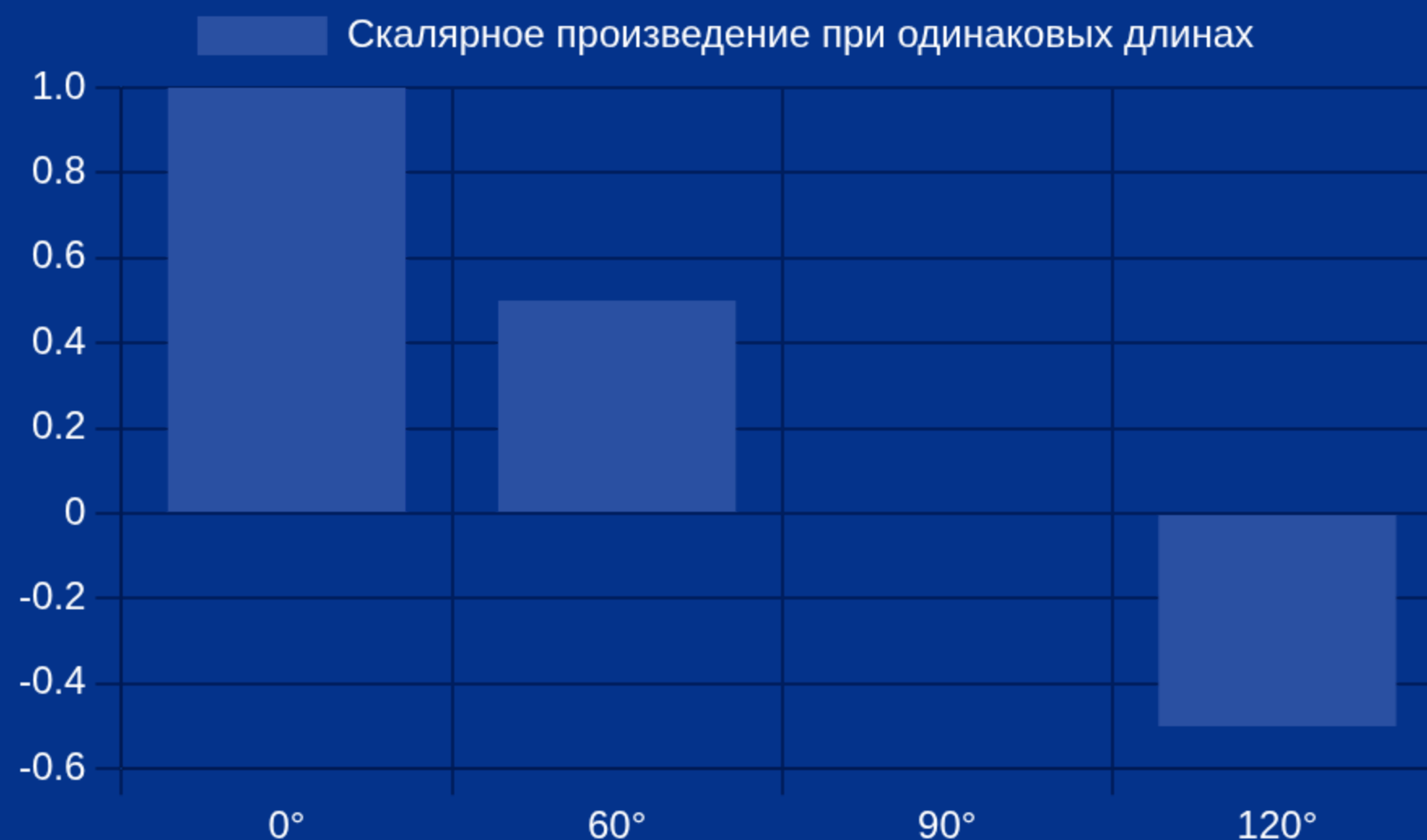
Векторы	Вычисление	Результат	Вывод про угол
(2, 3) и (4, -1)	$2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1)$	5	Острый
(1, 2) и (-2, 1)	$1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1$	0	Прямой
(3, 0) и (-1, 5)	$3 \cdot (-1) + 0 \cdot 5$	-3	Тупой

Задания курса математики (вычисления по формуле $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2$).

Проверим скалярное произведение через координаты двух векторов. По знаку результата можно сразу сделать вывод о характере угла между ними.

Положительное значение соответствует острому углу, нулевое – прямому, отрицательное – тупому. Знак не требует отдельного нахождения угла.

Роль угла при одинаковых длинах векторов



Расчёт по формуле $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \alpha$ (для наглядности взяты $|a|=|b|=1$).

При одинаковых длинах можно считать $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \alpha$. Поэтому при увеличении α значение меняется вместе с косинусом.

Чем ближе угол к 0° , тем больше произведение; в 90° оно равно нулю; при 120° становится отрицательным — направление «расходится» сильнее.

Связь скалярного произведения с физикой



Работа силы

В физике используют формулу работы: $A = F \cdot s \cdot \cos \alpha$. Здесь α — угол между направлением силы и перемещением, поэтому знак работы зависит от направления действия.



Плюс при движении

Если сила направлена так же, как перемещение (угол острый), $\cos \alpha$ положителен. Тогда работа получается положительной: энергия передаётся «в сторону движения».



Минус при противодействии

Если сила направлена против перемещения (угол тупой), $\cos \alpha$ отрицателен. Скалярное произведение становится отрицательным, и работа указывает на торможение движения.



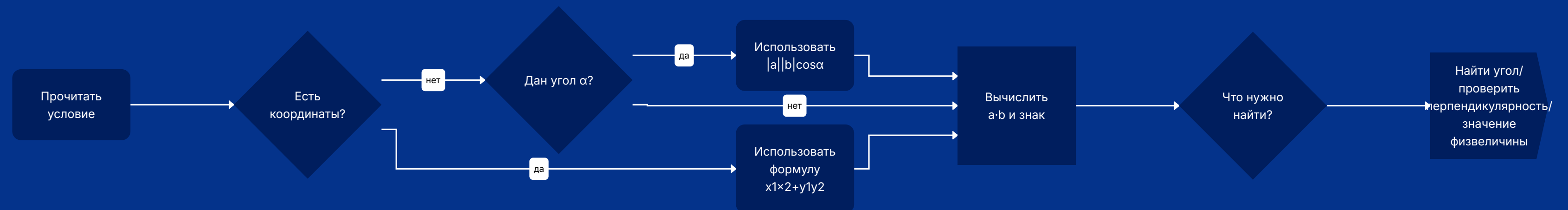
Ноль при перпендикулярности

Когда сила перпендикулярна перемещению, угол равен 90° , и $\cos \alpha = 0$. Тогда работа равна нулю: сила меняет направление, но не совершает работу.



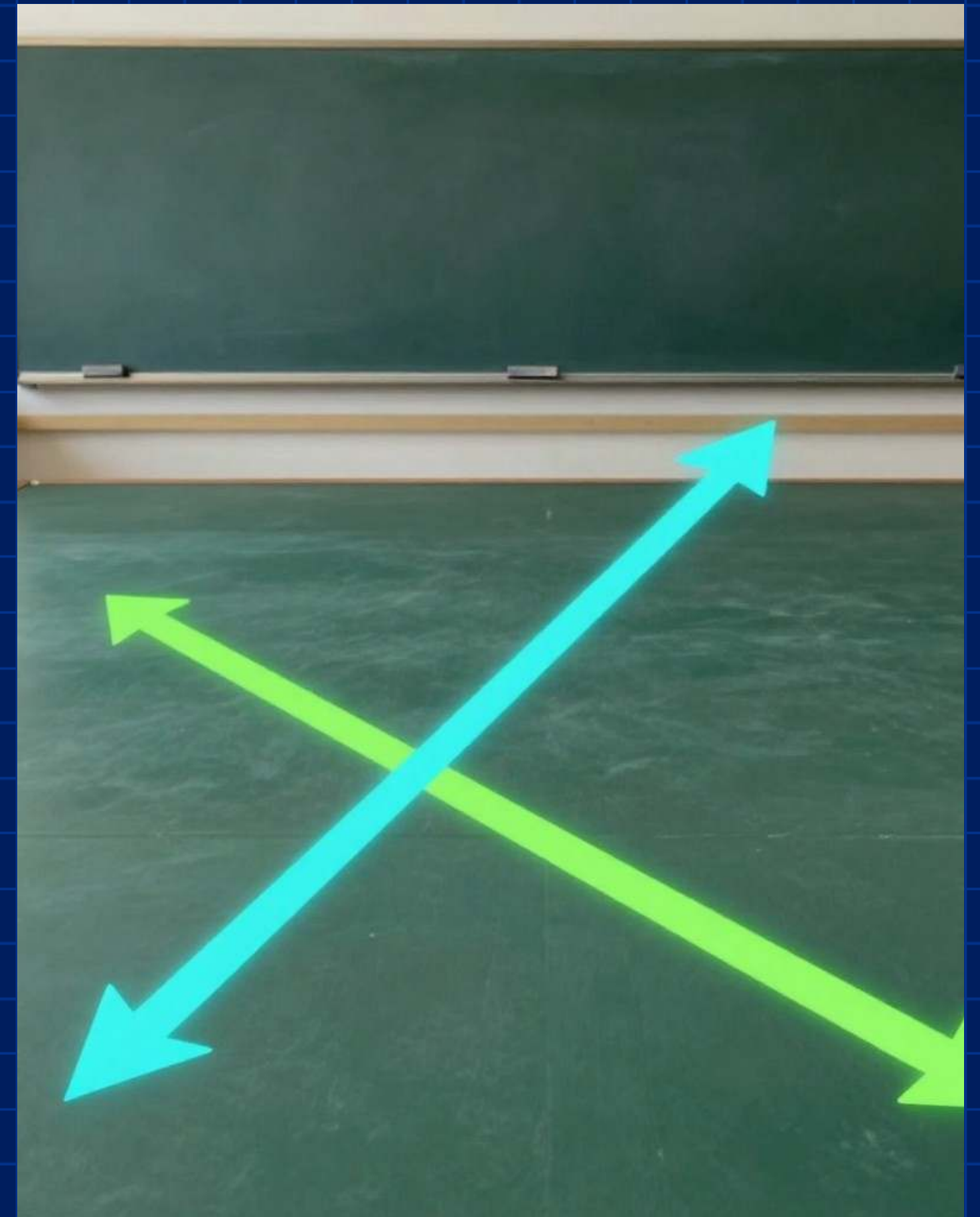
Как скалярное произведение помогает решать задачи

Алгоритм подбора формулы: координаты $\rightarrow$ сумма произведений координат; угол $\rightarrow$ множитель $\cos \alpha$.

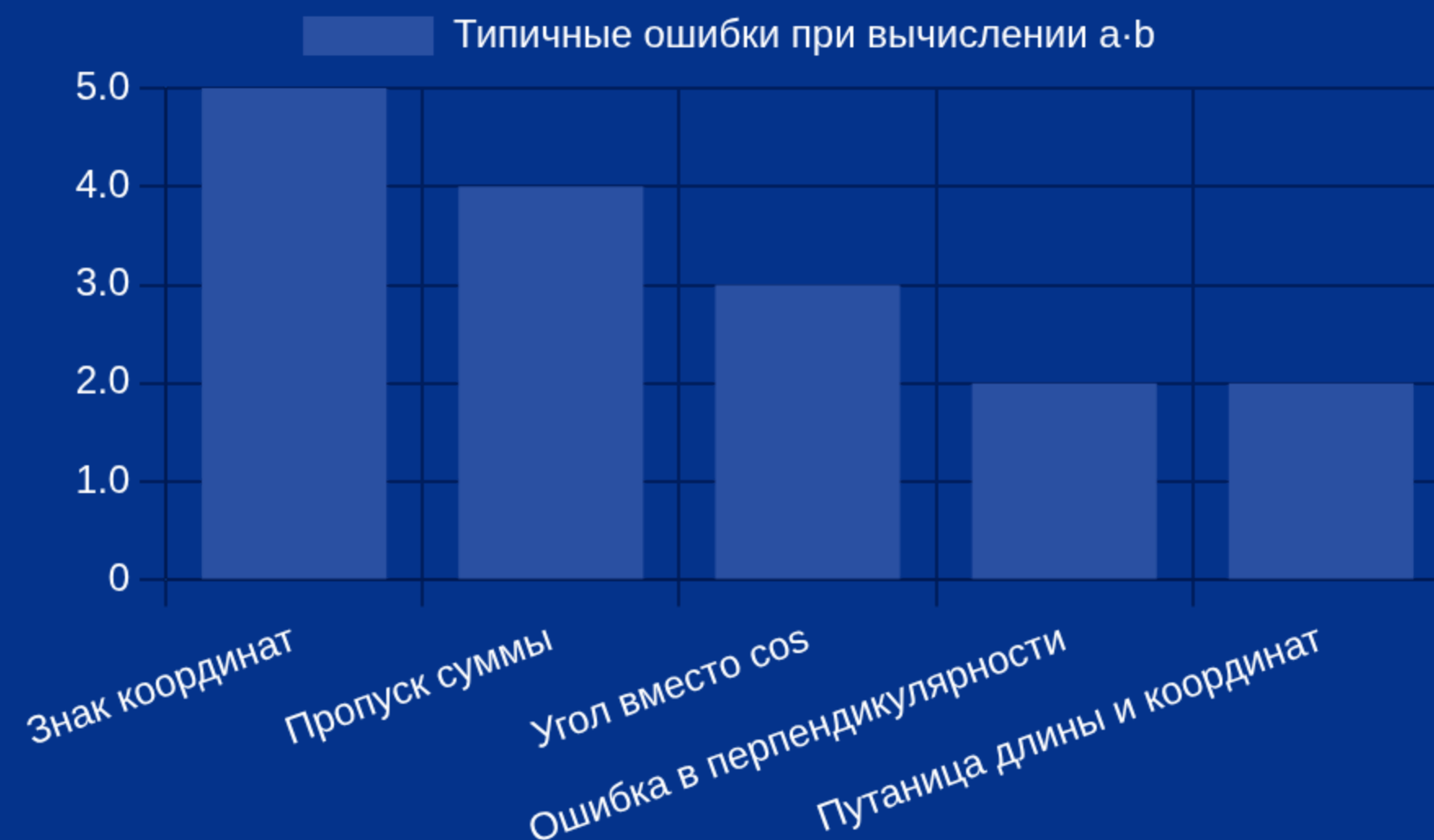


Проекция вектора как основа формулы

- 1 Проекция показывает, какая «часть» одного вектора работает вдоль направления второго. Если вектор почти совпадает с направлением другого, проекция большая, а значит и скалярное произведение возрастает.
- 2 Множитель $\cos \alpha$ связывает геометрию угла с длинами: $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \alpha$. При $\alpha = 0^\circ$ проекция максимальна, при 90° она равна нулю, при 180° меняет знак.



Типичные ошибки при вычислении



Типовые ошибки по теме скалярного произведения (набор причин сформирован методически, численные баллы – условные).

Чаше всего ошибки возникают при вычислениях по координатам: один минус потерялся, сложение забыли или в формулу подставили сам угол вместо $\cos \alpha$.

Чтобы избежать неверных выводов, всегда выписывайте формулу заранее и проверяйте: где нужна сумма произведений, а где – косинус угла.

Проверка понимания на коротких примерах

1

Если $a \cdot b > 0$, угол между векторами острый: направление «в целом совпадает». Для пар $(2, 1)$ и $(3, 2)$ результат будет положительным, значит угол не может быть прямым.



2

Если $a \cdot b = 0$, угол прямой и вектора перпендикулярны (при ненулевых векторах). Для векторов $(1, 4)$ и $(4, -1)$ скалярное произведение равно нулю, следовательно, угол 90° .



3

Если $a \cdot b < 0$, угол тупой: вектора направлены частично противоположно. Для $(1, 0)$ и $(-2, 0)$ получаем отрицательный результат, поэтому угол не острый и не прямой.

4

Сводка ключевых формул и свойств

Запись	Смысл
$a \cdot b = a b \cos\alpha$	Через длины и угол
$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2$	Через координаты в плоскости
$a \cdot a = a ^2$	Квадрат длины
$a \cdot b = 0$	Перпендикулярность ненулевых векторов

Учебный материал по теме «Скалярное произведение векторов» (стандартные определения и следствия).

Коротко соберём главные записи: через угол и длины, через координаты в плоскости и пространстве, а также условие перпендикулярности.

Выбор формулы зависит от условия: дали координаты – используйте сумму произведений; дали угол – применяйте $\cos \alpha$. Знание знака помогает понять характер угла.

Связь темы с другими разделами математики

1



Уравнения прямой и углы

Скалярное произведение помогает выражать и проверять углы между прямыми и направлениями. Через него удобно переводить геометрические вопросы в вычисления с координатами.



Аналитическая геометрия

В задачах на плоскости и в пространстве скалярное произведение соединяет фигуры и числа: оно участвует в преобразованиях, проверках и поиске параметров.



Перпендикулярность

Критерий $a \cdot b = 0$ работает как «быстрая проверка». Вместо построений можно сразу установить перпендикулярность векторов по их координатам.



Тригонометрия и прикладные расчёты

Формула связывает $\cos \alpha$ с геометрией, поэтому тема подготавливает к работе с тригонометрией. В дальнейшем она помогает решать прикладные задачи с направлениями.

log

2

x

Итог: одно число передает много информации о векторах

Скалярное произведение связывает длины и направление векторов в одно число: по знаку и величине можно находить угол, проверять перпендикулярность и решать задачи. Геометрический смысл, координаты и свойства работают вместе.



cos

sin

1

tg

ctg