

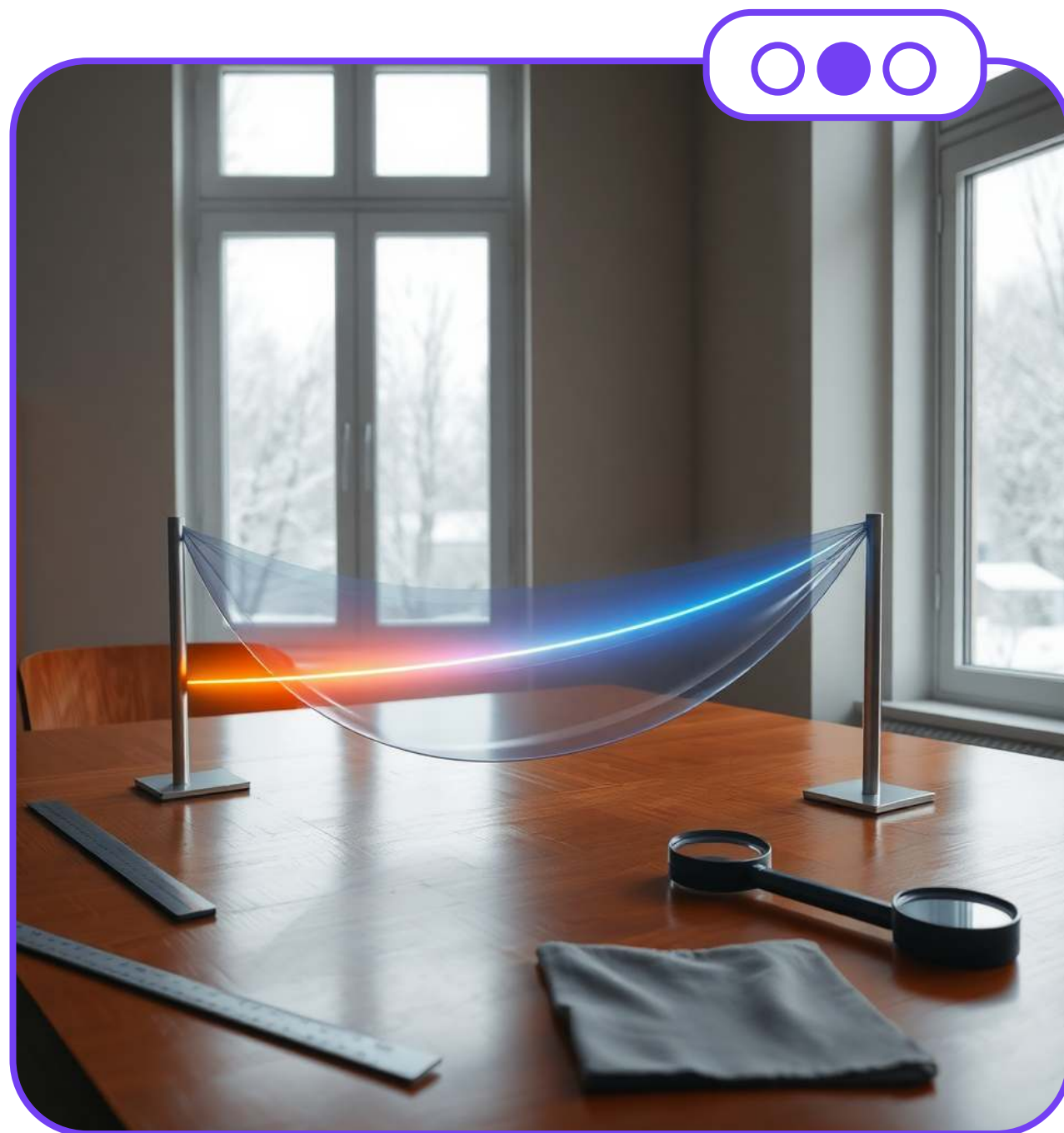
Выпуклость графика функции и точки перегиба



Как вторая производная раскрывает
форму графика



Как тема продолжает исследование функций



Здесь первая производная показывает рост и убывание, а вторая — как меняется наклон касательной. Это позволяет описывать не только значения функции, но и форму её графика на всей области определения.

Геометрический смысл выпуклости графика

01

Касательная как ориентир

Выпуклость удобно понимать через положение графика относительно касательных: на разных участках кривая может располагаться по-разному, показывая, как меняется её изгиб и общий характер формы.

02

Связь с наклоном

Если наклон касательной постепенно возрастает, график изгибается в одну сторону; если уменьшается, изгиб меняется на противоположный. Так выпуклость отражает не только форму, но и динамику изменения функции.

03

Зачем это нужно

Геометрический взгляд помогает быстрее распознавать поведение графика без лишних вычислений и связывает производные с наглядной картинкой, которую легко использовать при построении и анализе функций.

Выпуклость вверх и выпуклость вниз



○ Выпуклость вверх

Если $f''(x) > 0$, график называют выпуклым вверх: на этом участке наклон касательной возрастает, а кривая имеет характерный изгиб в одну сторону.

○ Выпуклость вниз

Если $f''(x) < 0$, график выпуклый вниз: наклон касательной убывает, и форма кривой отражает противоположный характер изгиба.

○ Главный признак

Именно знак второй производной позволяет определить тип выпуклости на интервале, а переход через ноль часто указывает на возможную смену кривизны.



Признаки выпуклости по второй производной



Школьный курс алгебры: признаки выпуклости функции по второй производной



Краткая таблица связывает знак второй производной с видом графика и геометрическим смыслом.

Условие	Вид графика	Смысл
$f''(x) > 0$	вверх	наклон растёт
$f''(x) < 0$	вниз	наклон убывает
$f''(x) = 0$	кандидат	перегиб не доказан
Примечание	—	ноль не равен перегибу

Для вывода важен не только ноль во второй производной, но и её знак по соседству.



Как находят интервалы выпуклости



1. Область определения

Сначала устанавливают, где функция вообще определена: именно эти значения x участвуют в дальнейшем исследовании.

2. Вторая производная

Затем вычисляют $f''(x)$, потому что именно она отвечает за форму графика и позволяет искать изменения выпуклости.

3. Особые точки

Найдя точки, где $f''(x)=0$ или не существует, разбивают область определения на отдельные интервалы для проверки.

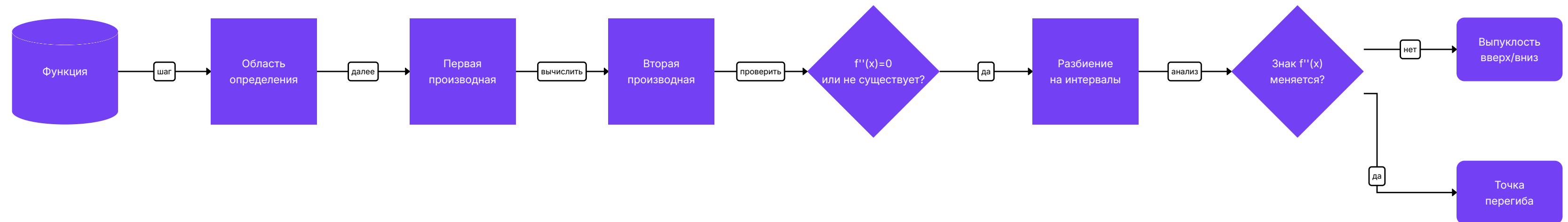
4. Проверка знака

На каждом промежутке определяют знак второй производной и записывают, где график выпуклый вверх, а где вниз.



Алгоритм исследования выпуклости и перегиба

Последовательность действий при анализе графика функции по второй производной



Визуальный образ точки перегиба



▮ Место смены изгиба

На рисунке точка перегиба выглядит как участок, где кривая перестаёт изгибаться в одну сторону и начинает изгибаться в другую, поэтому её легко связать со сменой выпуклости.

▮ Роль касательной

Часто рядом проводят касательную, чтобы показать: в точке перегиба она не определяет экстремум, а лишь помогает увидеть, как график проходит через смену кривизны.

▮ Отличие от других точек

Такой образ помогает не путать перегиб с экстремумом или с обычной точкой, где касательная горизонтальна, но форма графика при этом не меняется.



Определение точки перегиба

Смысл определения

Точкой перегиба называют такую точку x_0 , где график функции меняет выпуклость, то есть переходит от одного характера изгиба к другому.

1

Проверка по знаку

Чтобы подтвердить перегиб, нужно убедиться, что по разные стороны от x_0 знак второй производной меняется. Без этой смены перегиба нет.

2

Что не считается доказательством

Значение $f''(x_0)=0$ или отсутствие второй производной только указывают на возможную точку перегиба. Для окончательного вывода обязательно анализируют соседние интервалы.

3

Смена знака второй производной и перегиб

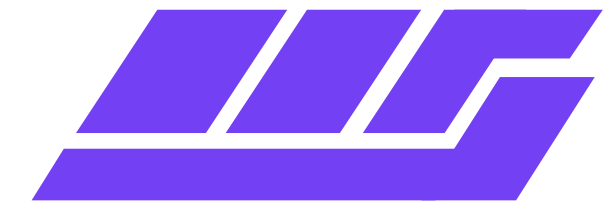


Диаграмма показывает переход второй производной через ноль в одной характерной точке, что удобно для визуальной проверки знака на соседних участках.

Схематическое изображение по правилу смены знака второй производной

Если знак меняется по обе стороны от x_0 , это подтверждает перегиб; сам ноль ещё не является доказательством.

Необходимые и достаточные условия перегиба



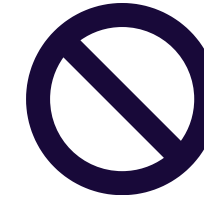
Признак-кандидат

Если в точке перегиба существует вторая производная в окрестности, то сама точка обычно выделяется как подозрительная: здесь $f''(x_0)=0$ или $f''(x_0)$ не существует. Но этого ещё недостаточно для вывода.



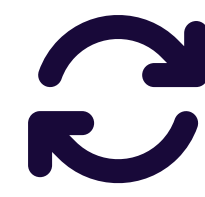
Что действительно важно

Решающее значение имеет поведение второй производной по разные стороны от x_0 . Именно смена знака $f''(x)$ показывает, что график перестраивает кривизну и переходит от одной формы изгиба к другой.



Почему одного нуля мало

Нулевое значение второй производной может встречаться и без перегиба, например на участке, где знак $f''(x)$ остаётся прежним. Тогда форма графика не меняется, хотя условие выглядит подозрительно.



Проверка через знак

Поэтому после нахождения точки-кандидата обязательно исследуют соседние интервалы. Если знак второй производной меняется, перегиб есть; если нет, точка остаётся лишь формальной особенной точкой без смены кривизны.

Типичные ошибки при поиске точек перегиба

01

Ноль вместо ответа

Ошибка возникает, когда любую точку, где $f''(x)=0$, автоматически называют точкой перегиба. На самом деле это лишь возможный кандидат, который требует дополнительной проверки по знаку второй производной.

02

Проверка в одной точке

Нельзя ограничиваться вычислением $f''(x_0)$ только в самой точке. Нужно сравнить знак второй производной слева и справа, иначе легко пропустить отсутствие смены выпуклости.

03

Игнорирование области определения

Если не учитывать область определения, разрывы и точки, где вторая производная не существует, можно получить неверные выводы. Особые точки функции всегда должны входить в анализ вместе с интервалами.

04

Путаница с экстремумом

Точка перегиба и точка экстремума описывают разные свойства графика. Экстремум связан с поведением первой производной, а перегиб — со сменой выпуклости, поэтому их нельзя смешивать.

Сравнение точки экстремума и точки перегиба

Школьный курс алгебры и начал анализа, 10 класс

Признак	Экстремум	Перегиб
Связь	$f'(x)$	$f''(x)$
Условие	смена знака	смена выпуклости
Итог	макс./мин.	точка перегиба
Совпадение	не обязательно	не обязательно

Таблица показывает, какие признаки помогают различить максимум, минимум и перегиб при исследовании функции.

Экстремум и перегиб определяются разными производными и разными изменениями графика; совпадение этих свойств не является обязательным.

Примеры простых функций

Функция x^3

Для функции $f(x)=x^3$ имеем $f''(x)=6x$. Знак второй производной меняется при переходе через $x=0$, поэтому именно здесь находится точка перегиба.

Функция x^2

У функции $f(x)=x^2$ вторая производная равна 2 для всех x области определения. Знак не меняется, следовательно, график не имеет точки перегиба.

Функция x^4

Для $f(x)=x^4$ вторая производная равна $12x^2$, а в точке $x=0$ она обращается в нуль. Однако знак остаётся неотрицательным, поэтому перегиба нет.

Главный вывод

Эти три примера показывают, что нулевое значение $f''(x)$ ещё не доказывает перегиб. Решающее значение имеет именно смена знака второй производной на соседних интервалах.

Знаки второй производной у типичных функций



Диаграмма помогает увидеть различие между постоянным знаком, сменой знака и нулём без перегиба на одном и том же наборе примеров.

Иллюстрация по результатам вычисления второй производной для функций x^2 , x^3 и x^4

Только для x^3 наблюдается переход от отрицательного знака к положительному; у x^2 и x^4 ноль во второй производной не приводит к смене выпуклости.

Связь с реальными моделями



Движение и ускорение

В физике вторая производная описывает ускорение, поэтому выпуклость графика помогает понять, когда движение становится быстрее, а когда темп изменения начинает снижаться.



Экономические процессы

В экономике выпуклость отражает ускорение или замедление роста прибыли, выручки и затрат. Это позволяет заметить смену режима ещё до того, как появятся очевидные числовые изменения.

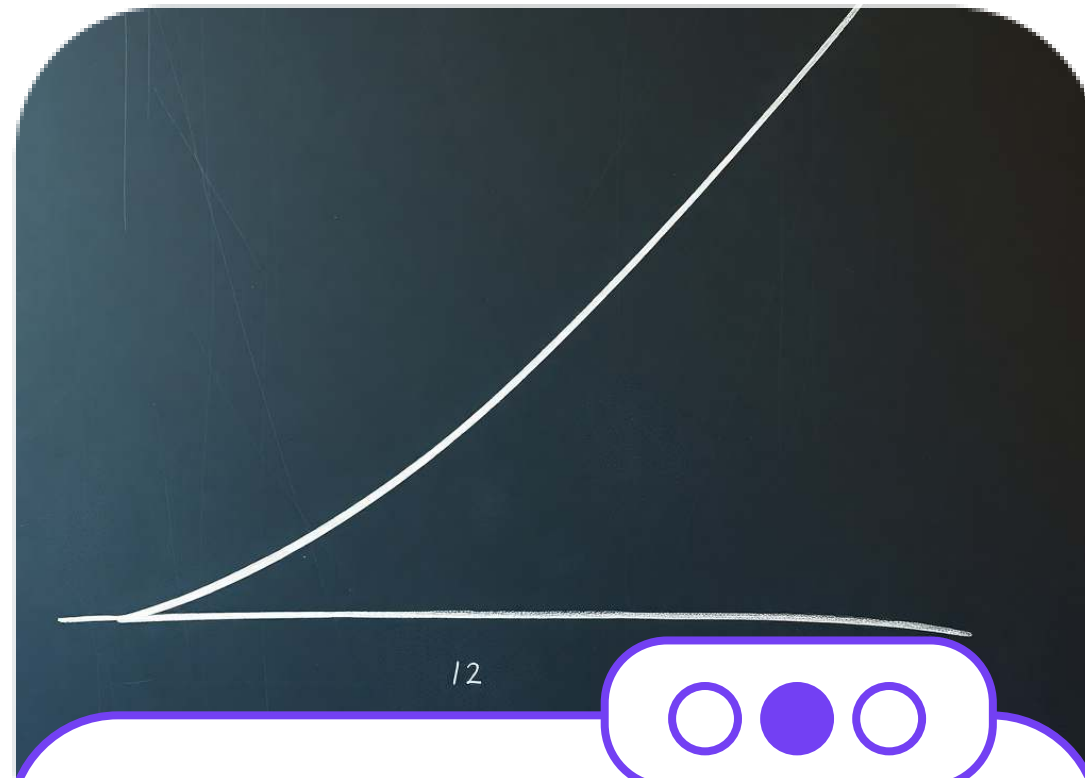


Переход к новому режиму

Точка перегиба часто показывает момент перестройки процесса: рост меняет характер, падение замедляется или ускоряется, а модель начинает описывать ситуацию уже по-другому.

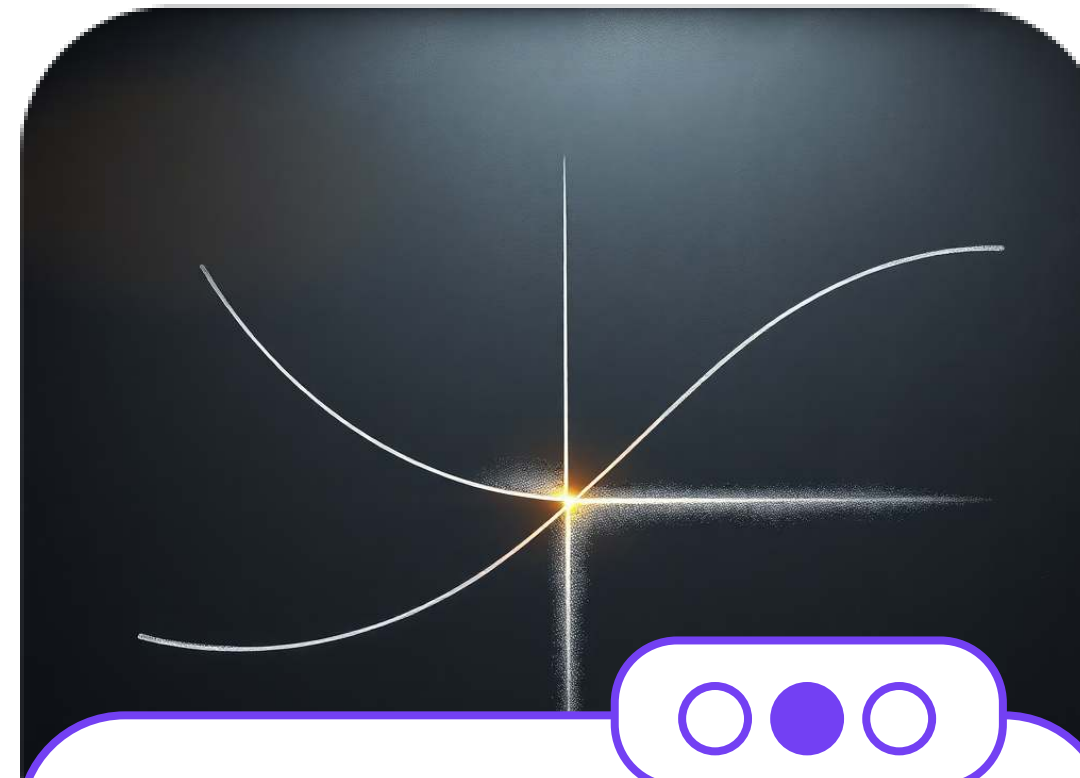


График с отмеченными интервалами выпуклости



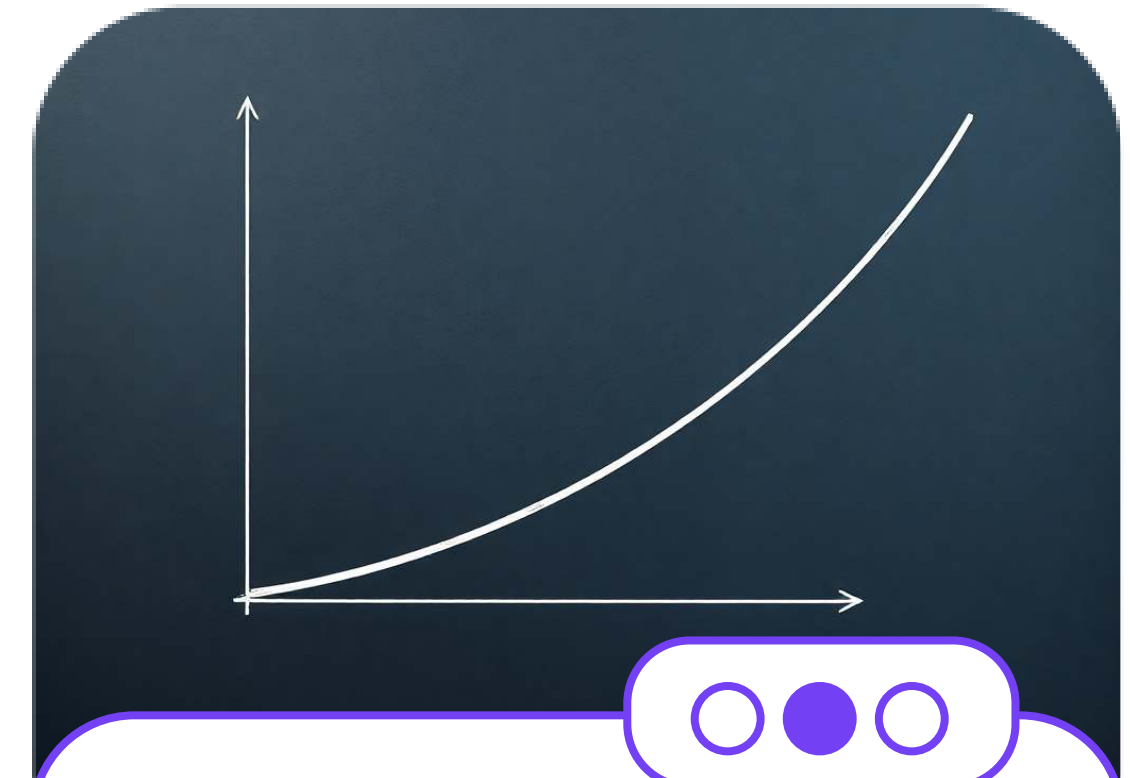
Левая часть графика

На левом участке кривая плавно поднимается и остаётся выпуклой вверх. Под осью подписан интервал, где $f''(x)$ положительна, чтобы сразу было видно направление изгиба и характер роста.



Точка смены кривизны

В середине рисунка выделена особая точка, где кривая меняет изгиб и проходит через возможный перегиб. Рядом отмечены координаты и знак второй производной до и после этой точки.



Правая часть графика

Справа график уже изгибается в противоположную сторону, поэтому там указывается выпуклость вниз. Подпись к участку помогает связать форму кривой со знаком $f''(x)$ и завершить анализ всей схемы.

Последовательность исследования функции



Схема показывает не отдельные вычисления, а их логический порядок: каждый следующий шаг опирается на предыдущий и уточняет форму графика.

Школьный алгоритм исследования функции,
алгебра 10 класса

Сначала определяют производные и особые точки, затем анализируют знаки и только после этого делают вывод о выпуклости и перегибах.

Краткая памятка по признакам выпуклости и перегиба



Обобщение правил исследования функции по второй производной

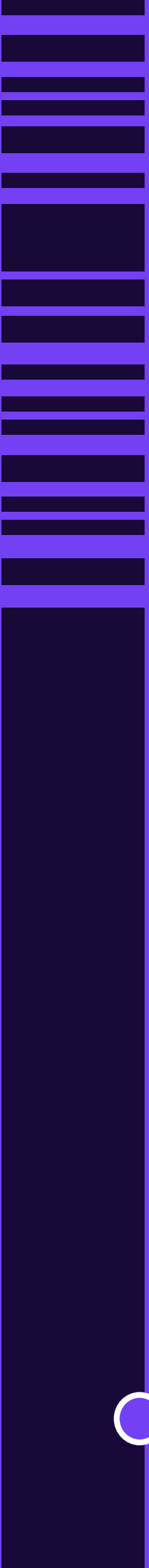


Короткая таблица помогает быстро сопоставить знак второй производной с видом графика и сделать правильный вывод о перегибе.

Условие	Вывод	Примечание
$f''(x)>0$	вверх	наклон растёт
$f''(x)<0$	вниз	наклон убывает
смена знака	перегиб	нужна проверка
$f''(x)=0$	кандидат	не доказательство

Главный ориентир — не отдельное значение $f''(x)$, а изменение её знака на соседних интервалах; именно оно подтверждает перегиб.





Выпуклость и перегиб: ключ к форме графика



Вторая производная позволяет увидеть не только рост или убывание, но и саму форму графика. Если внимательно проверять знак $f''(x)$ по сторонам от точки, ошибки при поиске перегиба становятся редкими.

