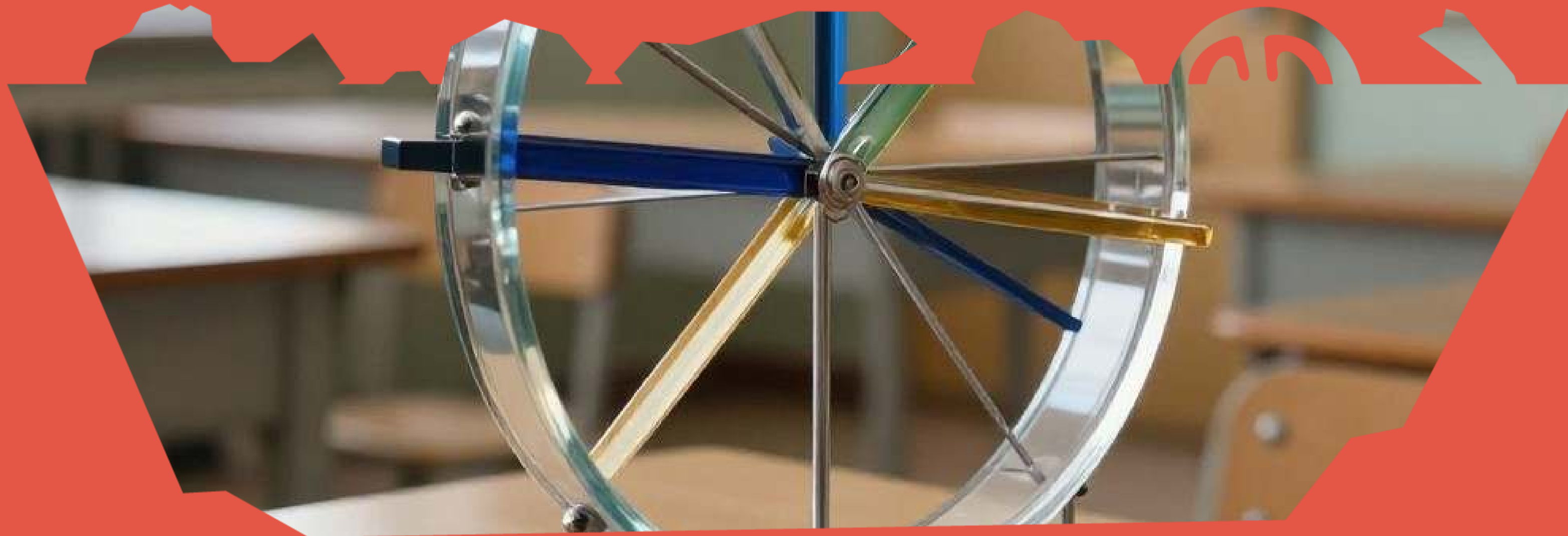


Синус и косинус. Тангенс и котангенс

Как эти функции определяются, считаются для стандартных углов и где используются в геометрии.



Почему тригонометрия опирается на геометрию

Тригонометрия родилась из измерений высот, расстояний и наклонов. В 10 классе она связывает угол с отношениями сторон в прямоугольном треугольнике и переносит идею на единичную окружность, чтобы работать с любыми углами — от 0° до 2π .



Определение синуса и косинуса в прямоугольном треугольнике

01

Для острого угла α в прямоугольном треугольнике синус — это отношение противолежащего катета к гипотенузе, то есть $\sin \alpha = b/c$, где c — гипотенуза.

02

Косинус определяется как отношение прилежащего катета к гипотенузе: $\cos \alpha = a/c$. Для острых углов обе величины находятся между 0 и 1 — это важно для проверки ответов.

03

Для стандартных углов: при 30° $\sin 30^\circ = 1/2$ и $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$; при 45° $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$; при 60° $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$ и $\cos 60^\circ = 1/2$.

01

Тангенс выражается через синус и косинус: $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$. В прямоугольном треугольнике это отношение противолежащего катета к прилежащему: $\operatorname{tg} \alpha = b/a$.

02

Котангенс связан обратной формулой: $\operatorname{ctg} \alpha = \cos \alpha / \sin \alpha$. В треугольнике он равен отношению прилежащего катета к противолежащему: $\operatorname{ctg} \alpha = a/b$.

03

Для угла 45° получаем $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$ и $\operatorname{ctg} 45^\circ = 1$. Тангенс не определён при $\cos \alpha = 0$, а котангенс не определён при $\sin \alpha = 0$ — это задаёт границы допустимых углов.

Тангенс и котангенс как отношения сторон

Основные значения тригонометрических функций

Углы 0° , 30° , 45° , 60° , 90° и соответствующие значения $\sin$, $\cos$, tg , ctg .

Таблица показывает: у $\sin$ и $\cos$ диапазон от -1 до 1 , а у tg и ctg есть разрывы из-за деления на 0 при определённых углах.

Школьный курс геометрии и тригонометрии (10 класс).

Угол	$\sin$	$\cos$	tg	ctg
0°	0	1	0	не опр.
30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
90°	1	0	не опр.	0

Единичная окружность и координаты точки

01

Точка на единичной окружности, связанная с углом α , имеет координаты $(\cos \alpha, \sin \alpha)$. Это позволяет «читать» значения тригонометрических функций как координаты точки.

02

Такое геометрическое задание работает не только для острых углов: оно охватывает тупые, развёрнутые и отрицательные углы. По знакам координат сразу видно, где функция положительна или отрицательна.

03

Тангенс и котангенс выражаются через координаты: $\operatorname{tg} \alpha = y/x$ и $\operatorname{ctg} \alpha = x/y$, если соответствующие координаты не равны нулю. Поэтому появляются области, где функция не определена.

04

Периодичность также становится наглядной: при повороте точки на окружности значения повторяются, потому что геометрическая ситуация возвращается к исходной.

Изменение $\sin$ и $\cos$ на промежутке от 0 до 2π

Графики $\sin x$ и $\cos x$ имеют амплитуду 1 и период 2π ; поведение $\cos$ похоже на $\sin$, но сдвинуто на $\pi/2$.

Из точек видно, что $\sin$ проходит через 0 в целых кратных π , а $\cos$ принимает 1, 0, -1 в кратных $\pi/2$ — это упрощает чтение значений для типовых углов.

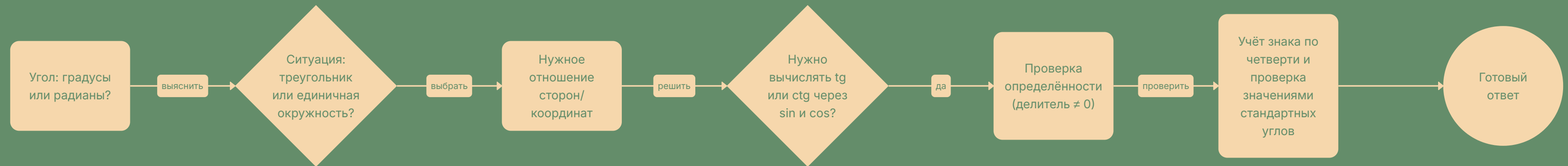
Графики тангенса и котангенса

Вертикальные асимптоты соответствуют тем углам, где делитель в определении tg или ctg обращается в ноль, поэтому график «разрывается» и меняет знак.

Период π означает, что характер ветвей повторяется через каждые π ; рядом с асимптотами значения стремятся к $\pm\infty$.

Алгоритм нахождения значения тригонометрической функции

Последовательность шагов при вычислении $\sin$, $\cos$, $\tg$ или $\ctg$ для заданного угла.



01

В I четверти точка единичной окружности имеет положительные координаты x и y , поэтому $\sin$, $\cos$, tg и ctg одновременно оказываются положительными.

02

Во II четверти x остаётся отрицательным, а y положительным: $\sin$ и ctg положительны, тогда как $\cos$ и tg — отрицательны из-за деления на отрицательную величину.

03

В III четверти обе координаты отрицательны: tg и ctg становятся положительными, а $\sin$ и $\cos$ — отрицательными, потому что знаки y и x определяют поведение функций.

04

В IV четверти x положителен, y отрицателен: $\cos$ и tg положительны, а $\sin$ и ctg отрицательны. Это напрямую связано с тем, что $\cos$ соответствует абсциссе, а $\sin$ — ординате точки.

Знаки функций по четвертям координатной плоскости

Фундаментальное тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$: оно отражает связь катетов и гипотенузы для точки $(\cos \alpha, \sin \alpha)$. Из него выводятся формулы для tg и ctg , упрощая проверку и вычисления.

Школьный курс геометрии: единичная окружность и тождество Пифагора

1

Это число фиксирует связь между синусом и косинусом через теорему Пифагора на единичной окружности.

Сравнение свойств четырёх тригонометрических функций

Сопоставьте, чем различаются $\sin$, $\cos$, tg и ctg по области определения, периоду, нулям и характеру графиков. В таблице отдельно отмечены места разрывов и отсутствия значений.

$\sin$ и $\cos$ ограничены и непрерывны, тогда как tg и ctg не ограничены: их период π и разрывы связаны с нулём соответствующего делителя ($\cos$ или $\sin$).

Школьная программа по алгебре и началам анализа (тригонометрические функции и графики)

Функция	Определение	Область значений	Период	Нули	Особенности графика
$\sin x$	y на единичной окружности	$[-1; 1]$	2π	$x = 0, \pi, 2\pi, \dots$	Плавная, без разрывов
$\cos x$	x-координата точки на единичной окружности	$[-1; 1]$	2π	$x = \pi/2, 3\pi/2, \dots$	Плавная, без разрывов
$\operatorname{tg} x$	$\sin x / \cos x$	все действительные	π	$x = 0, \pi, 2\pi, \dots$	Вертикальные асимптоты при $\cos x = 0$
$\operatorname{ctg} x$	$\cos x / \sin x$	все действительные	π	$x = \pi/2, 3\pi/2, \dots$	Вертикальные асимптоты при $\sin x = 0$

Две модели одной и той же связи: треугольник и окружность

Модель в прямоугольном треугольнике

В прямоугольном треугольнике для угла α отношение противолежащего катета к гипотенузе задаёт $\sin \alpha$, а отношение прилежащего катета к гипотенузе задаёт $\cos \alpha$. Эти отношения зависят только от угла.

Модель в координатной плоскости

На единичной окружности точке, соответствующей углу α , соответствуют координаты $(\cos \alpha, \sin \alpha)$. Поэтому $\sin$ и $\cos$ одновременно становятся и отношениями сторон, и координатами точки на плоскости.

Значения функций для стандартных углов

В столбчатой диаграмме видно, как синус растёт от 0 к 1, а косинус убывает от 1 к 0; тангенс стремится к разрыву при 90° .

Сравнение функций на одних и тех же углах показывает: там, где знаменатель нулевой (cos или sin), соответствующая функция не определена; это сразу заметно по «пустым» значениям.

Где в геометрии нужны $\sin$, $\cos$, $\tg$ и $\ctg$



Высоты и расстояния

Когда в условии есть высота, которую трудно измерить напрямую, удобно перейти к прямоугольному треугольнику и выразить её через $\sin$ или $\cos$ по известному углу.



Наклоны и уклоны

В задачах на наклон прямой или плоскости к горизонту треугольник задаёт отношение сторон, поэтому тангенс становится естественным способом связать угол с разностью координат.



Диагонали и элементы фигур

Если известны стороны прямоугольника или параметры треугольника, то диагональ и другие отрезки ищутся через гипотенузу и катеты; $\sin$ и $\cos$ помогают собирать уравнения.

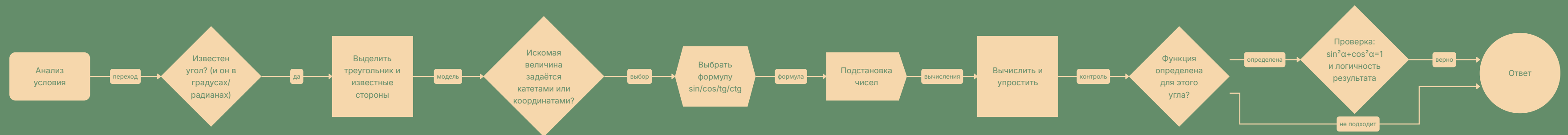


Измерение недоступных объектов

При измерении расстояний «на местности» (например, между пунктами через наблюдение под углом) $\tg \alpha =$ противолежащий/прилежащий переводит угол в реальные соотношения сторон.

Типовой способ решения задач на тригонометрические функции

Основа алгоритма: выбор правильной модели (треугольник или единичная окружность) и проверка по тождеству.



Типичные ошибки при изучении темы



Путаница катетов

Частая ошибка — перепутать противолежащий и прилежащий катеты. Тогда меняются отношения в определениях $\sin$, $\cos$ и tg , и ответ получает неверный смысл даже при красивых вычислениях.



Знаки функций в четвертях

Неясность знаков приводит к тому, что правильная формула даёт неверный знак. $\sin$ и $\cos$ корректны по координатам точки, а tg и ctg — по их отношению, учитывая разрывные области.



Градусы вместо радиан

Если в задаче угол указан в градусах, но подставляется как радианы, периоды «съезжают». Переход между системами единиц нужно выполнять до выбора таблиц или асимптот.



Подстановка вне области определения

Тангенс и котангенс не определены при значениях, где делитель равен нулю. Ошибка возникает, когда это ограничение игнорируют и подставляют угол «как для $\sin$ и $\cos$ ».



Табличные значения без условия

Иногда табличные числа используют механически для любого угла. Таблица относится к стандартным значениям 30° , 45° , 60° ; для остальных углов нужны преобразования или окружность.

Связь графиков между собой

На совместном рассмотрении видно, что $\cos x$ можно получить из $\sin x$ сдвигом на $\pi/2$, а tg и ctg повторяются с периодом π .

Сопоставление помогает быстрее «читать» графики: ограниченность $\sin$ и $\cos$ контрастирует с разрывностью tg и ctg , из-за чего важны знаки и область определения.

Историческая и прикладная значимость тригонометрии

01

Первые таблицы значений создавали не ради красоты формул: они были нужны астрономам, землемерам и мореплавателям. Тригонометрия позволяла переводить углы наблюдения в измеримые расстояния.

02

Сегодня тот же язык синусов и косинусов работает в описании колебаний и волн, в инженерных расчётах и геодезии. Математическая точность здесь напрямую связана с реальной измерительной практикой.

03

Для школьника темы $\sin$, $\cos$, $\tg$ и $\ctg$ — мост между геометрией и моделированием. Понимание единичной окружности превращает задачи «про углы» в задачи «про координаты и пропорции».

Итоги темы: одна система правил для углов

Синус и косинус связывают углы с отношениями сторон и координатами точки на единичной окружности. Тангенс и котангенс выражаются через $\sin$ и $\cos$, а тождества, знаки, периодичность и область определения задают общий алгоритм решения.

