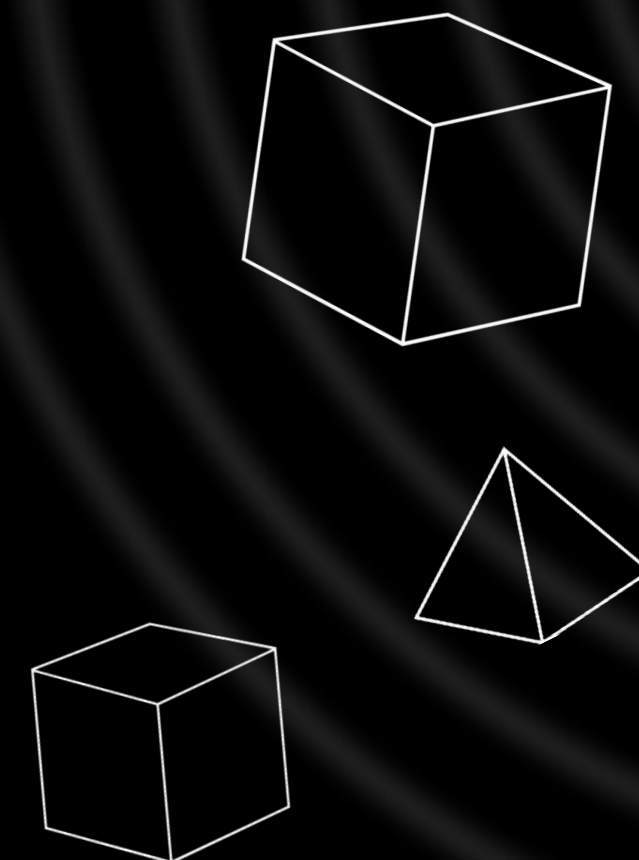


Подобные треугольники: одинаковая форма при разных размерах

Одинаковая форма, разные размеры



Зачем изучать подобие треугольников

Подобие помогает связывать геометрию с реальными измерениями: находить недоступные расстояния, высоты и размеры на чертежах. В этой теме важны пропорции, углы и умение точно сравнивать элементы фигур.



Определение подобных треугольников

Равные углы

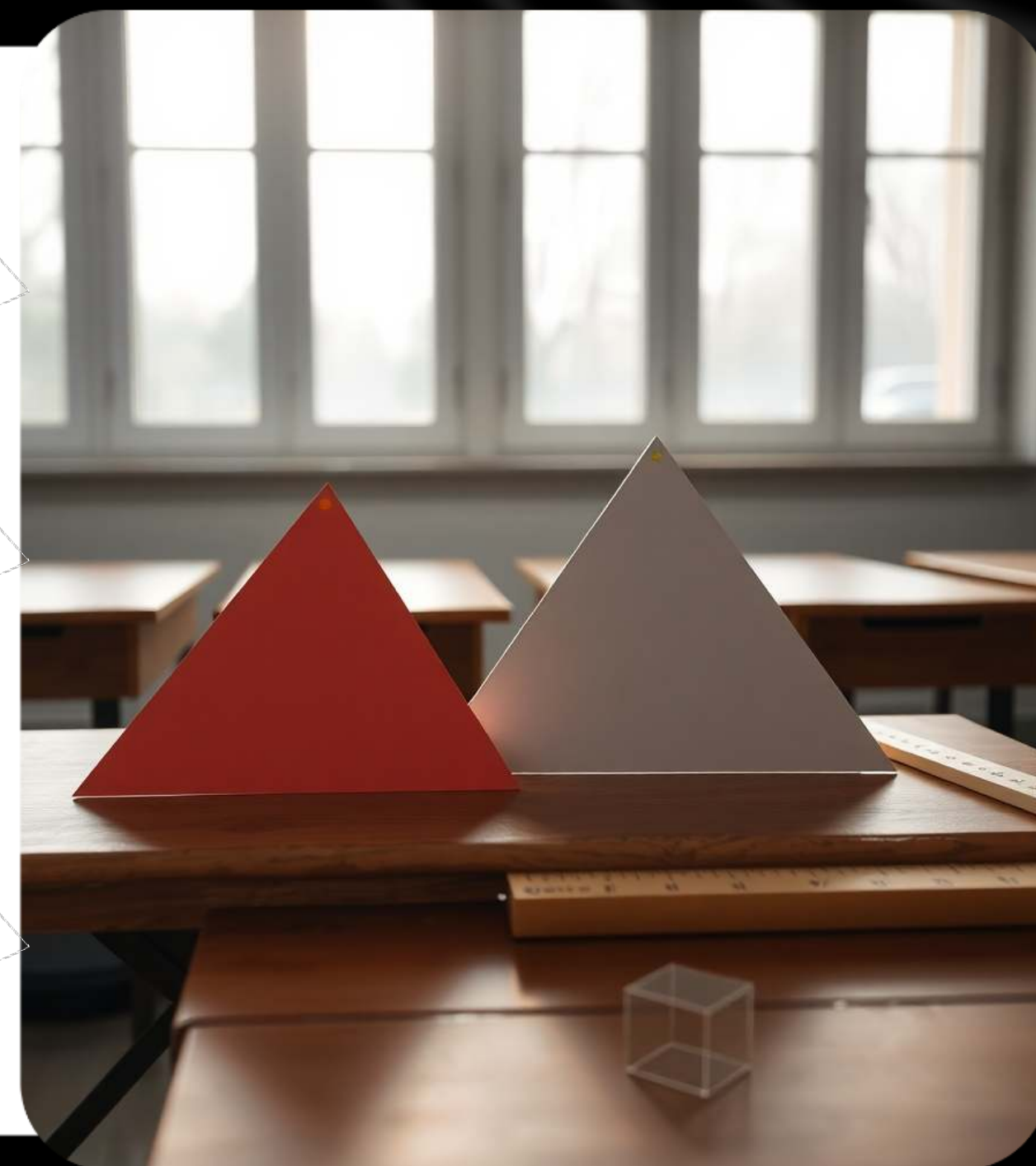
У подобных треугольников совпадают соответствующие углы. Это означает, что форма фигуры сохраняется, даже если одна из них больше или меньше другой.

Пропорциональные стороны

Соответствующие стороны подобных треугольников изменяются в одном и том же отношении. Поэтому можно сравнивать длины сторон через пропорции и находить неизвестные значения.

Коэффициент подобия

Отношение соответствующих сторон называют коэффициентом подобия. Он показывает, во сколько раз один треугольник увеличен или уменьшен по сравнению с другим.



Первый признак подобия: по двум углам

1

Сравниваем два угла

Если два угла одного треугольника равны двум углам другого, можно сразу сделать вывод о подобии. Этого достаточно, чтобы установить совпадение формы.

2

Третий угол тоже совпадает

Третий угол автоматически будет равен, потому что сумма углов любого треугольника равна 180° . Поэтому проверять все три угла не обязательно.

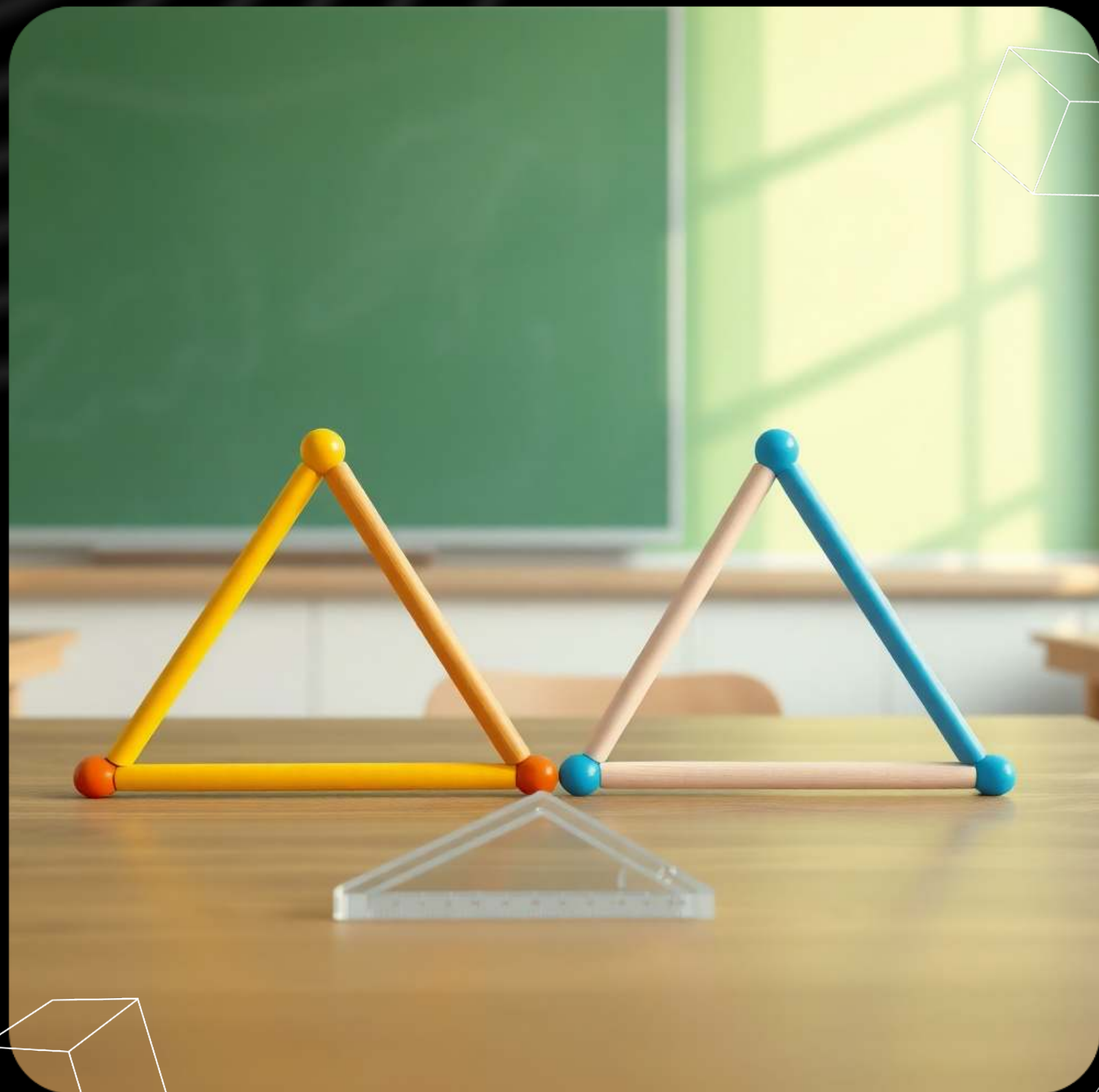
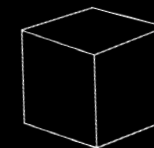
3

Удобство в чертежах

Этот признак особенно полезен, когда на рисунке известны только углы. Он помогает быстро распознавать подобные треугольники без вычисления длин сторон.



Второй признак подобия: по двум сторонам и углу между ними



1

Проверяем стороны

Сначала нужно убедиться, что две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого. Сравнивать следует именно соответствующие стороны.

2

Смотрим на угол между ними

Затем проверяют равенство углов, заключённых между этими сторонами. Если этот угол совпадает, данные относятся к одному и тому же положению сторон.

3

Применение в задачах

Такой признак часто используют в задачах с измерениями и чертежами. Он помогает доказать подобие даже тогда, когда известна только часть данных.



Третий признак подобия: по трём сторонам

1

Сравнение всех сторон

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого, треугольники подобны. Для этого не нужно заранее сравнивать углы.

2

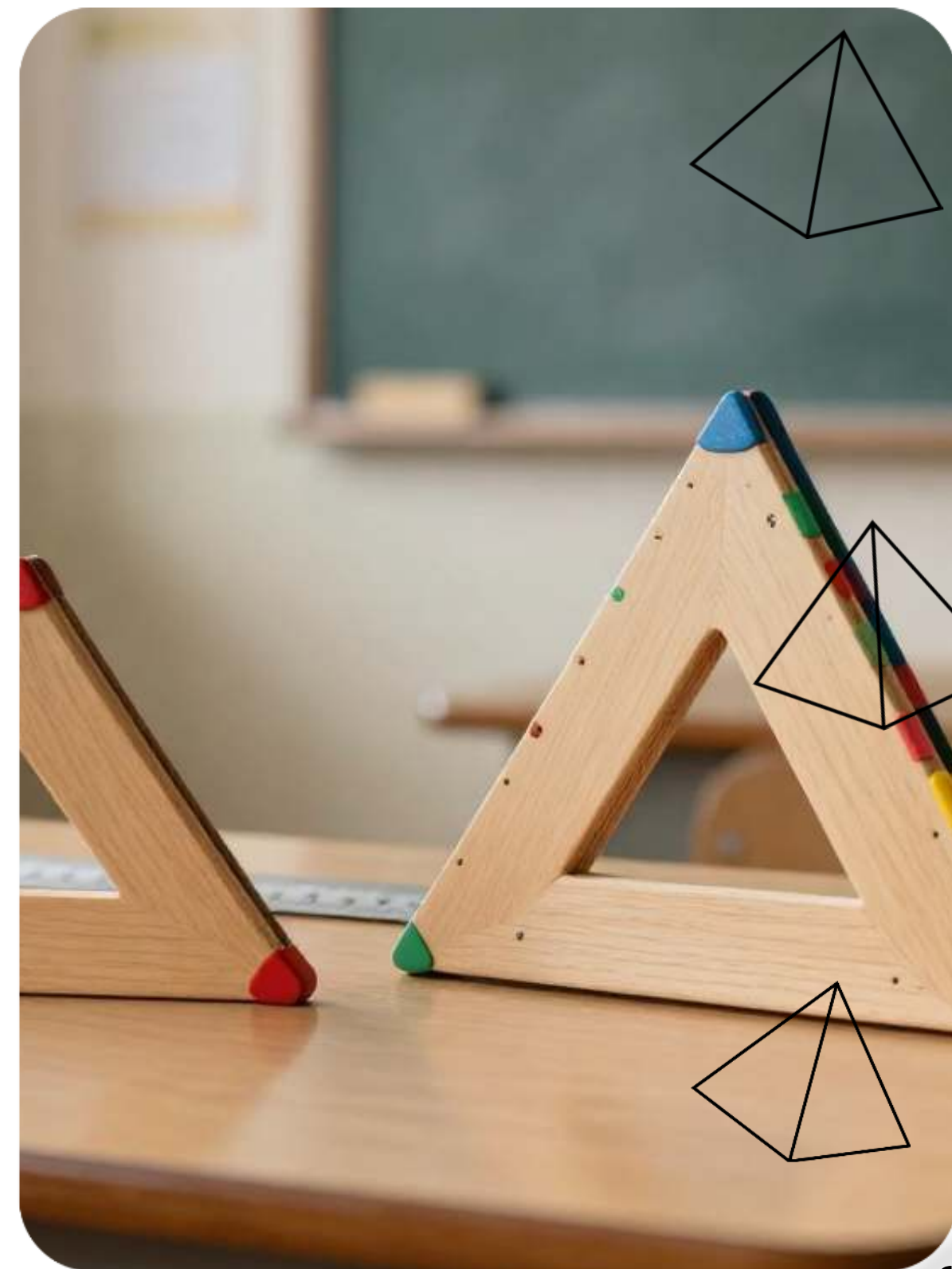
Работа только с длинами

Этот признак удобен, когда известны лишь длины сторон или измерения сняты с рисунка. Тогда можно проверить подобие, не обращаясь к угловым данным.

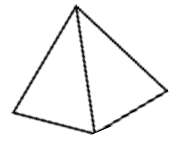
3

Полезен для решений

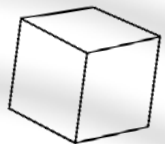
Признак по трём сторонам часто ускоряет решение, если нужно быстро установить связь между фигурами. Он особенно удобен при большом количестве числовых данных.



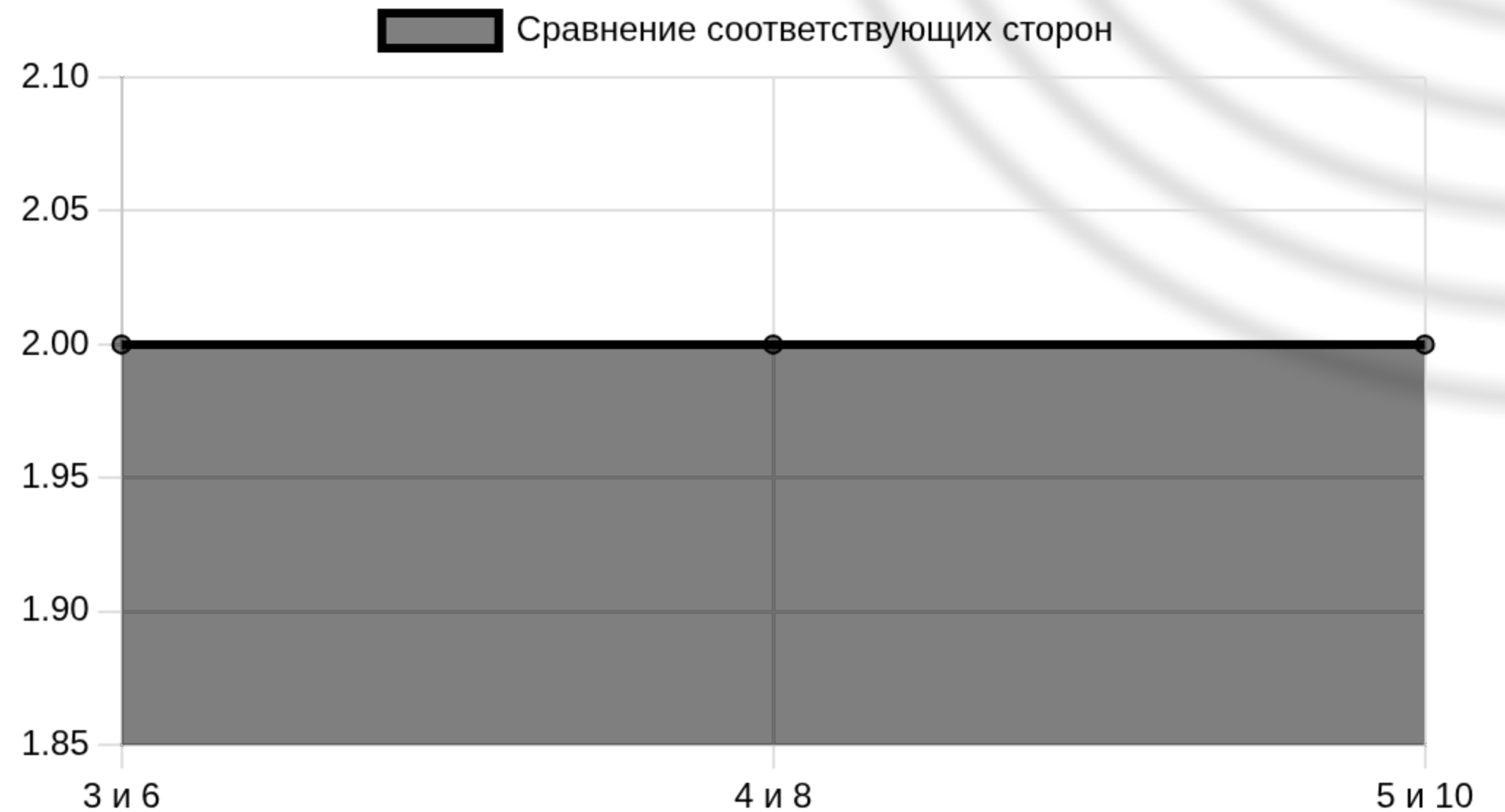
Одинаковый коэффициент для всех сторон



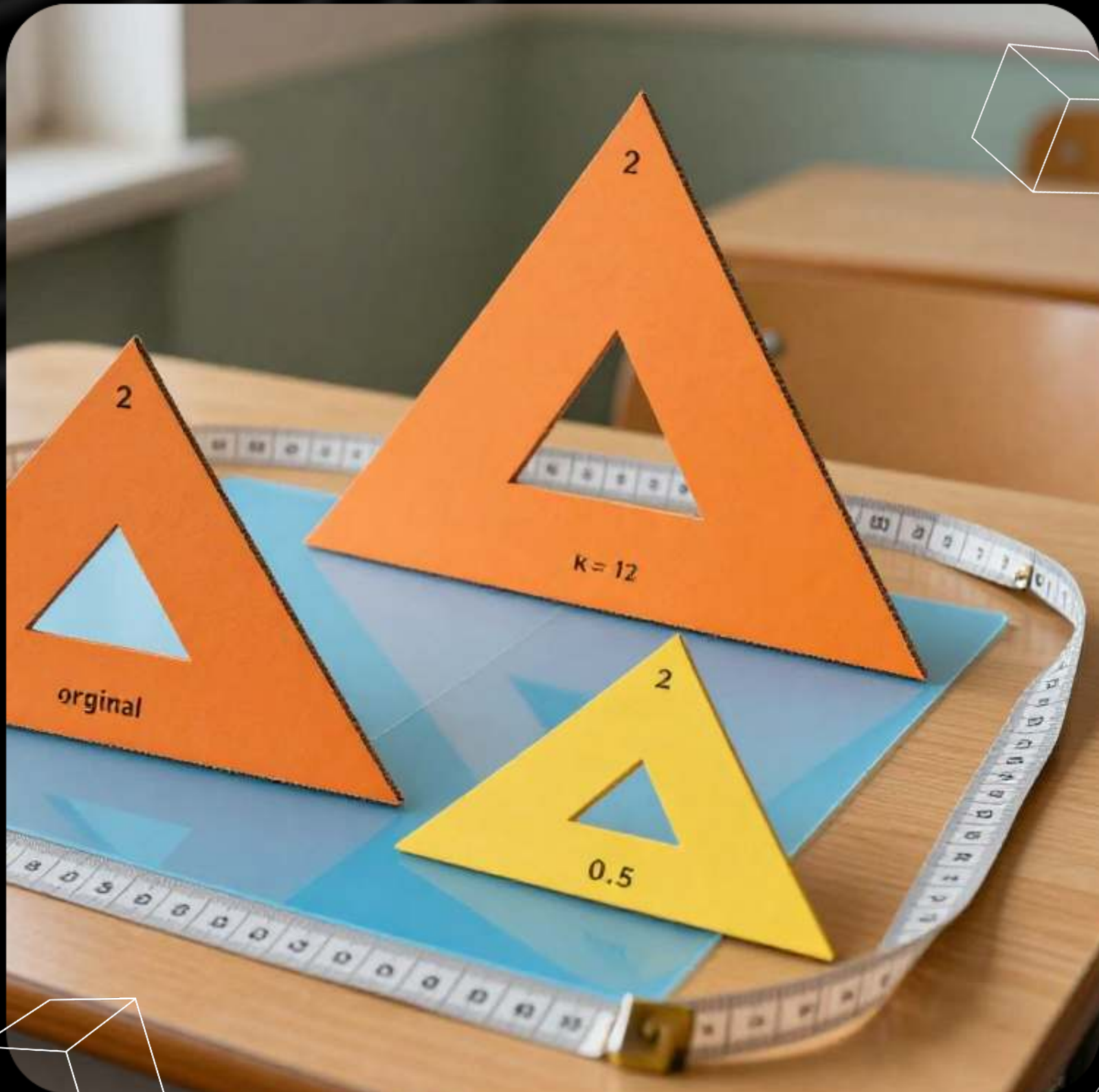
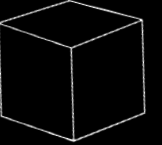
Во всех трёх парах отношение длин одинаково, поэтому треугольники изменяются в одном масштабе.



Постоянное отношение сторон подтверждает коэффициент подобия $k = 2$ и одинаковое увеличение каждой стороны.



Коэффициент подобия и его смысл



1

Что он показывает

Коэффициент подобия показывает, во сколько раз один треугольник больше или меньше другого. Это основное число, по которому сравнивают похожие фигуры.

2

Увеличение и уменьшение

Если $k = 2$, стороны становятся вдвое длиннее. Если $k = 0,5$, стороны уменьшаются вдвое. Направление изменения зависит от выбора исходного треугольника.

3

Периметр

Периметры подобных треугольников изменяются так же, как и стороны, то есть относятся как k . Поэтому их можно находить через ту же пропорцию.

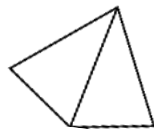
4

Площадь

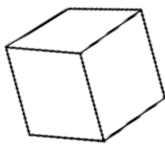
Площади растут быстрее, чем стороны: они относятся как k^2 . Если стороны увеличились в 2 раза, площадь станет в 4 раза больше.

Что сохраняется и что меняется у подобных треугольников

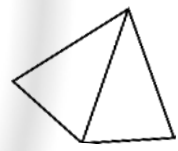
Элемент	Соотношение	Смысл
Углы	равны	форма сохраняется
Стороны	пропорциональны	масштаб меняется
Площади	k^2	растут быстрее сторон



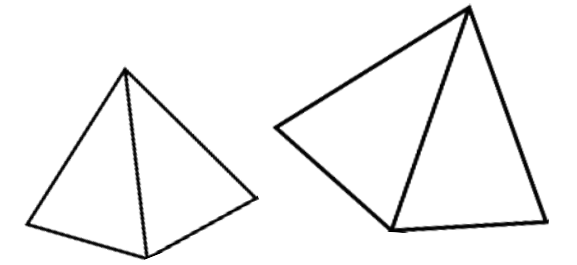
Сравнение основных элементов подобных треугольников.



Подобие сохраняет форму, но изменяет размер: углы не меняются, а длины и площадь подчиняются разным правилам.



Подобие на картах, планах и чертежах



Масштаб изображения

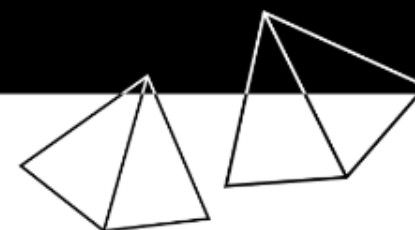
На картах и планах реальные объекты показывают уменьшенно. Масштаб 1:100 означает, что 1 см на чертеже соответствует 100 см в действительности.

Перевод размеров

Подобные треугольники помогают переводить размеры между моделью и реальным объектом. Достаточно знать коэффициент масштабирования, чтобы найти нужную длину.

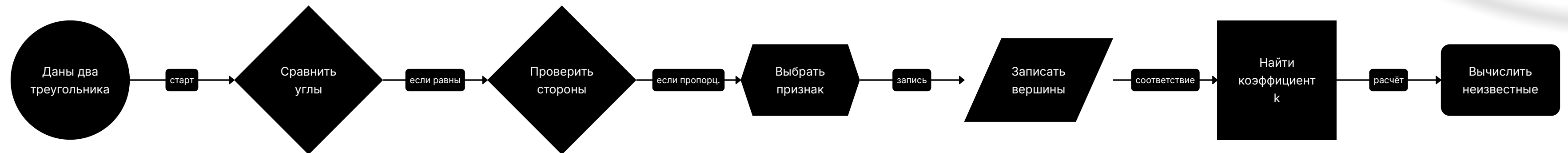
Практическая польза

Такой приём используют в архитектуре, навигации и черчении. Он позволяет работать с большими объектами, не измеряя их напрямую.



Проверка подобия треугольников

Последовательность позволяет шаг за шагом сверить углы, стороны и обозначения, а затем найти коэффициент подобия и неизвестные элементы.



Решение задач с помощью пропорций

1

Найти соответствия

Сначала определите, какие вершины и стороны соответствуют друг другу. Без этого пропорция будет составлена неверно, даже если сами числа взяты правильно из чертежа.

2

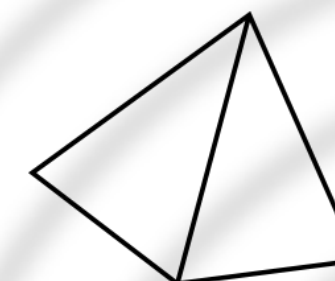
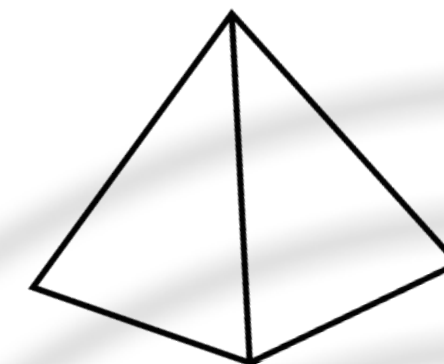
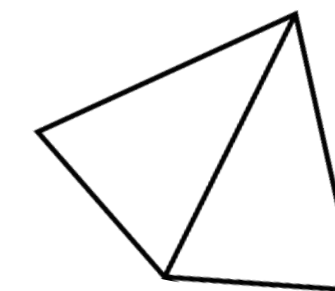
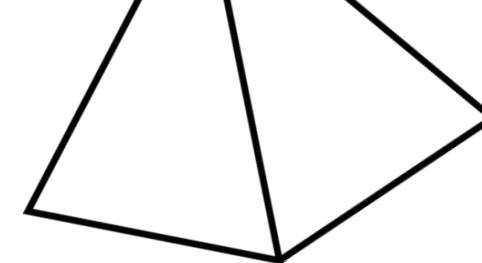
Составить отношение

Запишите равенство отношений только для соответствующих сторон, например $3:6 = 4:x$. Затем решите пропорцию и проверьте, согласуется ли ответ с рисунком и масштабом.

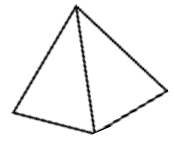
3

Проверить результат

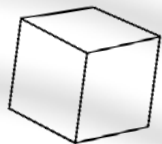
После вычисления убедитесь, что найденная длина подходит по смыслу задачи. Если значение кажется слишком большим или маленьким, ещё раз проверьте порядок сторон и вершин.



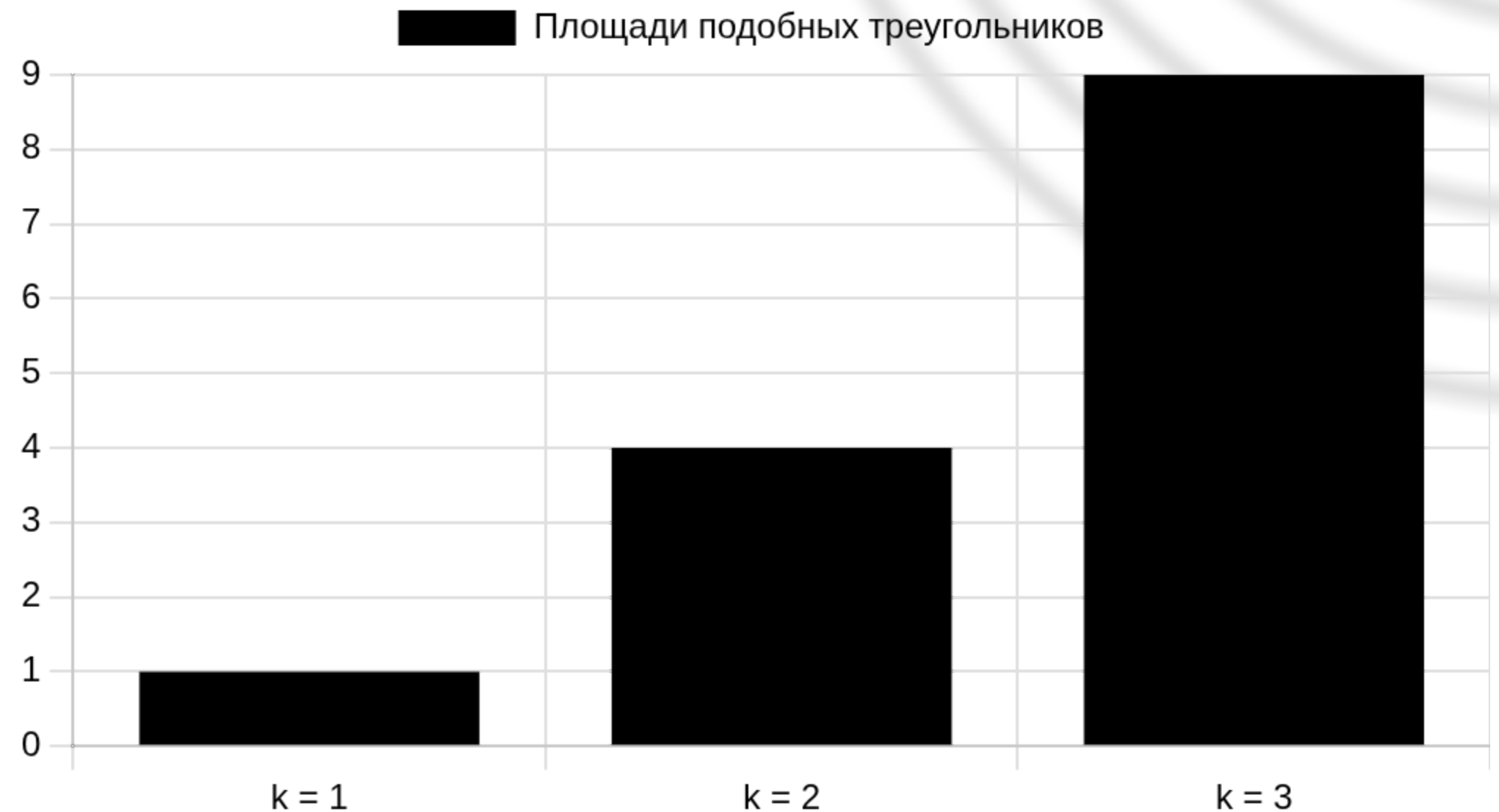
Как растёт площадь при увеличении коэффициента подобия



Площадь зависит от квадрата коэффициента подобия, поэтому даже небольшое увеличение сторон даёт заметный рост фигуры.



При увеличении k площадь растёт быстрее длины сторон: в 2 раза по сторонам — в 4 раза по площади, в 3 раза — в 9.



Задачи на высоту предметов и недоступные расстояния

Тень как подсказка

Если измерить длину тени дерева и тень известного предмета, можно составить пропорцию из подобных треугольников и вычислить высоту без подъёма на объект.

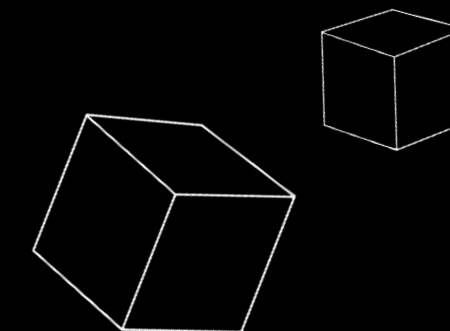
Зеркало на земле

В задачах с зеркалом лучи отражения образуют подобные треугольники. Достаточно измерить расстояния до зеркала и до наблюдателя, чтобы найти высоту предмета.

Когда измерить нельзя

Подобие особенно полезно там, где прямой доступ невозможен: для башен, столбов, скал и других объектов. В таких случаях измеряют только удобные отрезки на земле.

Типичные ошибки при работе с подобием



1

Путают вершины

Самая частая ошибка — неверно сопоставить вершины треугольников. Тогда стороны в пропорции оказываются не соответствующими, и даже правильные вычисления приводят к ошибочному ответу.

2

Берут не те стороны

Нужно сравнивать только соответствующие стороны, а не любые удобные. Если перепутать порядок чисел в отношении, коэффициент подобия получится неверным и нарушит все дальнейшие расчёты.

3

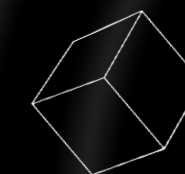
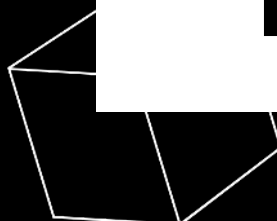
Забывают про квадрат

При нахождении площадей нельзя использовать коэффициент подобия как для длин. Площадь меняется по правилу k^2 , поэтому при $k = 3$ она возрастает в 9 раз.

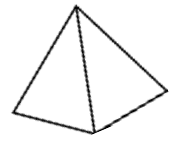
4

Не проверяют углы

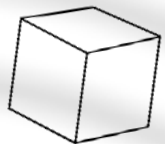
Даже после решения полезно ещё раз сверить равные углы и запись соответствующих вершин. Эта короткая проверка помогает заметить ошибку до того, как она перейдёт в ответ.



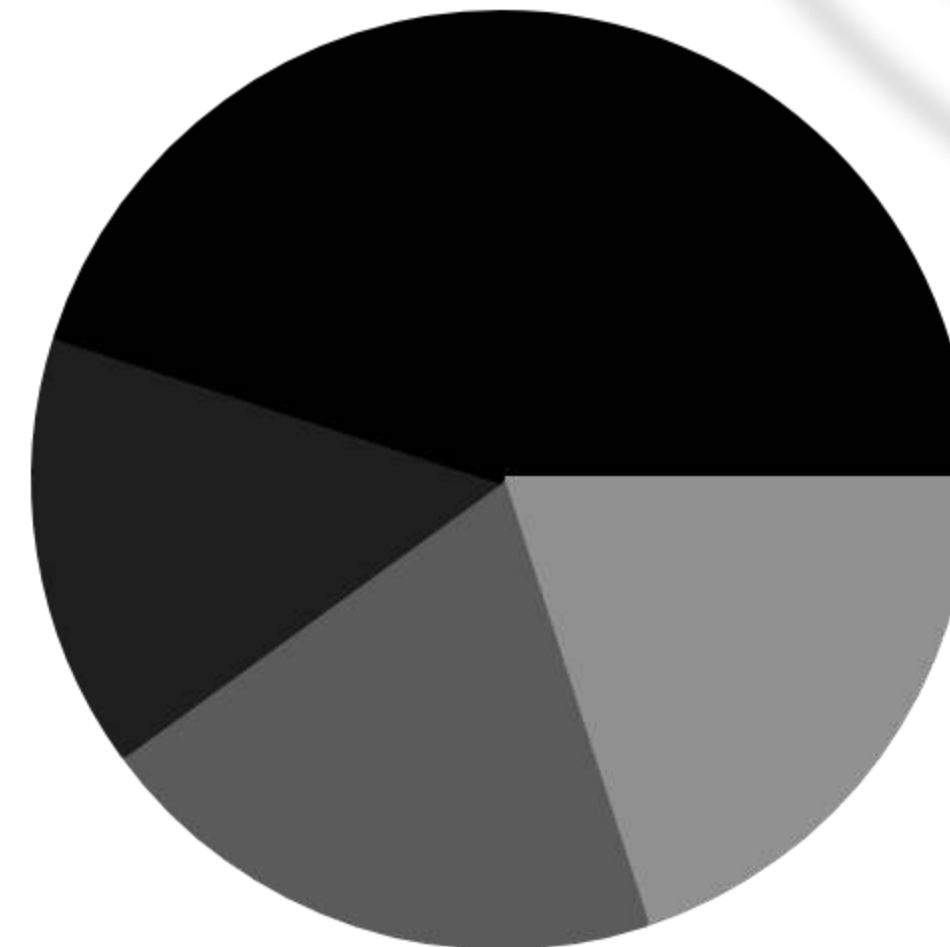
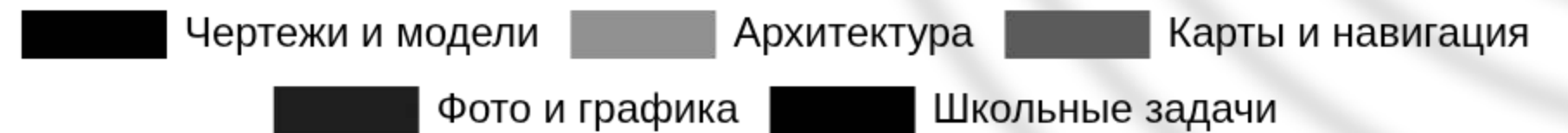
Где применяется подобие треугольников



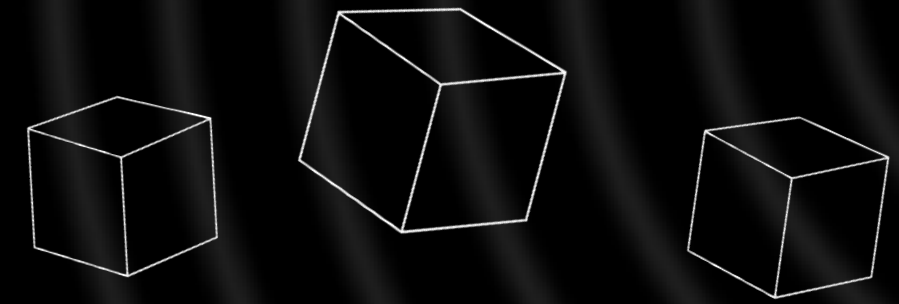
В каждом из этих случаев важны точность измерений и умение работать с масштабом, а не только с самим рисунком.



Подобие объединяет практические задачи, где нужно переносить размеры между моделью, схемой и реальным объектом без потери формы.

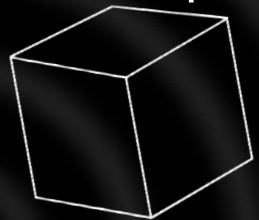


Фалес и измерение высот по тени



История с берегом и тенью

По преданию, Фалес заметил, что тень может стать удобной мерой высоты. Если солнечные лучи падают под одним и тем же углом, то два объекта и их тени образуют подобные треугольники. Так можно сравнить известную и неизвестную высоту без прямого измерения.



Когда помогает один момент времени

Успех таких измерений зависит от одновременного наблюдения: тени меняются вместе с положением Солнца. Поэтому сначала измеряют длину тени предмета известной высоты, а затем — тень объекта, который нужно определить. Из пропорции получают искомую величину.

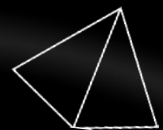


Почему метод работает и сегодня

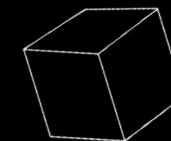
Принцип, известный ещё древним грекам, сохранился в школьных задачах и практических расчётах. Он показывает, что подобие треугольников — не только абстрактное правило, но и удобный способ измерять то, к чему нельзя подойти вплотную.

Формулы для быстрого повторения

Величина	Соотношение
Стороны	$a_1/a_2 = k$
Периметры	$P_1/P_2 = k$
Площади	$S_1/S_2 = k^2$
Углы	равны

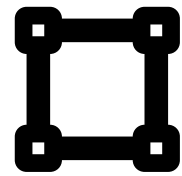


Основные соотношения удобно держать перед глазами: они сразу подсказывают, как связаны стороны, периметры, площади и углы подобных треугольников.



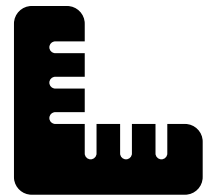
Если известен коэффициент k , остальные величины находятся быстро: стороны и периметры — через k , площади — через k^2 , углы не меняются.

Главные факты, которые нужно запомнить



Форма сохраняется

У подобных треугольников остаются те же углы, а стороны лишь изменяются по одному и тому же коэффициенту. Поэтому фигуры выглядят одинаково, но могут быть разного размера.



Коэффициент подобия

Число k показывает, во сколько раз один треугольник больше другого. Если $k = 1$, треугольники равны; если k больше 1 или меньше 1, меняется масштаб.



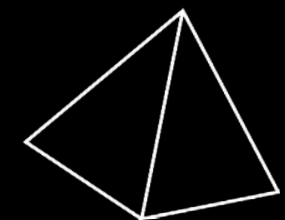
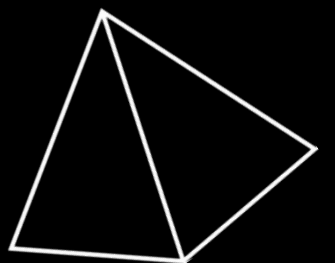
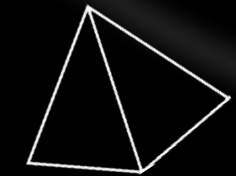
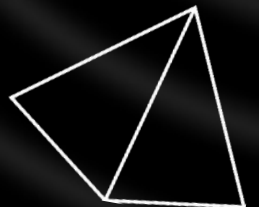
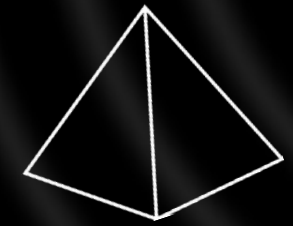
Три признака

Подобие можно доказать по двум углам, по двум сторонам и углу между ними, а также по трём сторонам. Каждый признак удобен в своих типах задач.



Площади растут быстрее

Длины меняются в k раз, а площади — в k^2 раз. Поэтому при увеличении сторон вдвое площадь возрастает в четыре раза, а не в два.



Подобие треугольников помогает видеть общий закон в разных размерах

Эта тема объединяет углы, пропорции и масштаб: зная коэффициент подобия, можно находить стороны, площади, высоты и расстояния, а также уверенно решать практические задачи.

