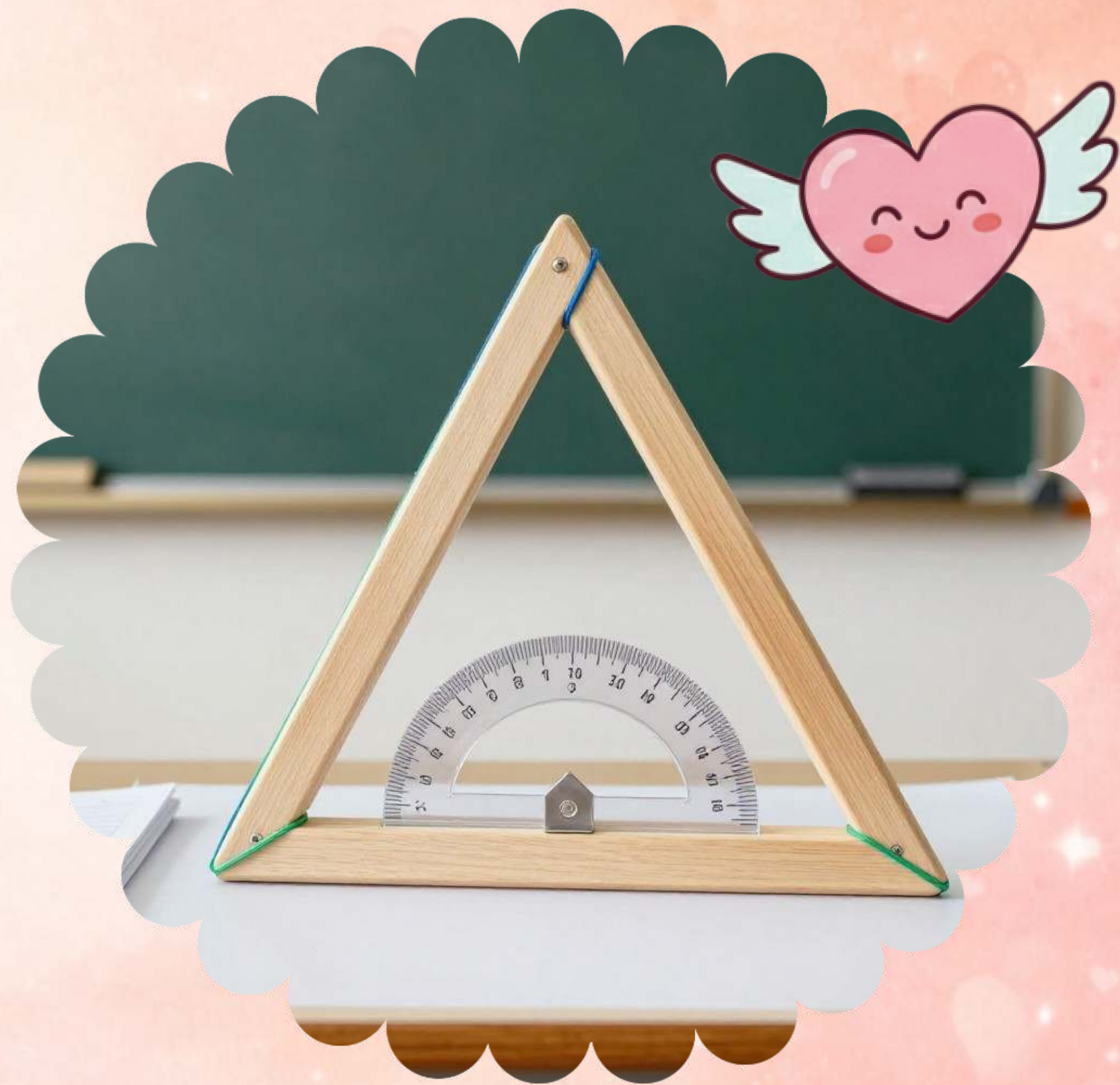
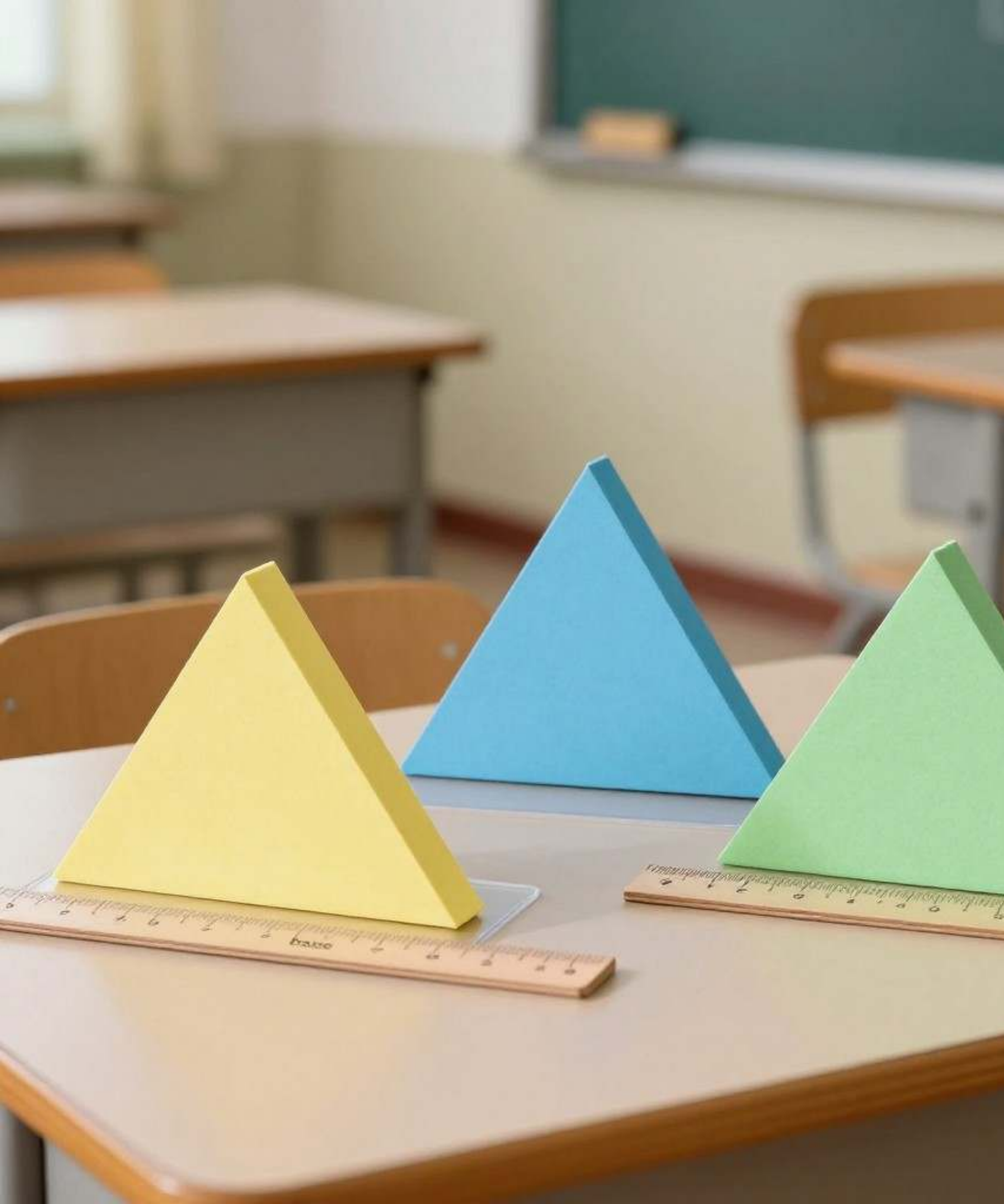


Ещё одна формула для вычисления площади треугольника

Научимся находить площадь по двум
сторонам и углу между ними.





Почему одной формулы бывает мало

Формула с основанием и высотой удобна не всегда: высоту нужно ещё найти. Если известны две стороны и угол между ними, проще использовать формулу, которая сразу подходит к этим данным.



Формула через основание и высоту

1 Основная запись

Площадь треугольника находят по формуле $S = \frac{1}{2}ah$, где a — основание, а h — высота. Эта запись показывает, что площадь зависит от выбранного основания и его перпендикулярной высоты.

2 Роль высоты

Высота всегда опускается под прямым углом к основанию. Она может лежать внутри треугольника или выходить за его пределы, но смысл остаётся одинаковым: это расстояние до основания по перпендикуляру.

3 Почему нужен другой способ

Если высота не дана, её приходится строить или искать через другие элементы фигуры. В задачах это занимает время, поэтому полезно знать формулу, где высота уже не требуется отдельно.

Какие элементы входят в новую формулу

Две стороны

В формуле $S = \frac{1}{2}ab \sin C$ буквы a и b обозначают две стороны треугольника. Именно их длины подставляют в вычисление площади вместе с синусом угла между ними.

Связь с высотой

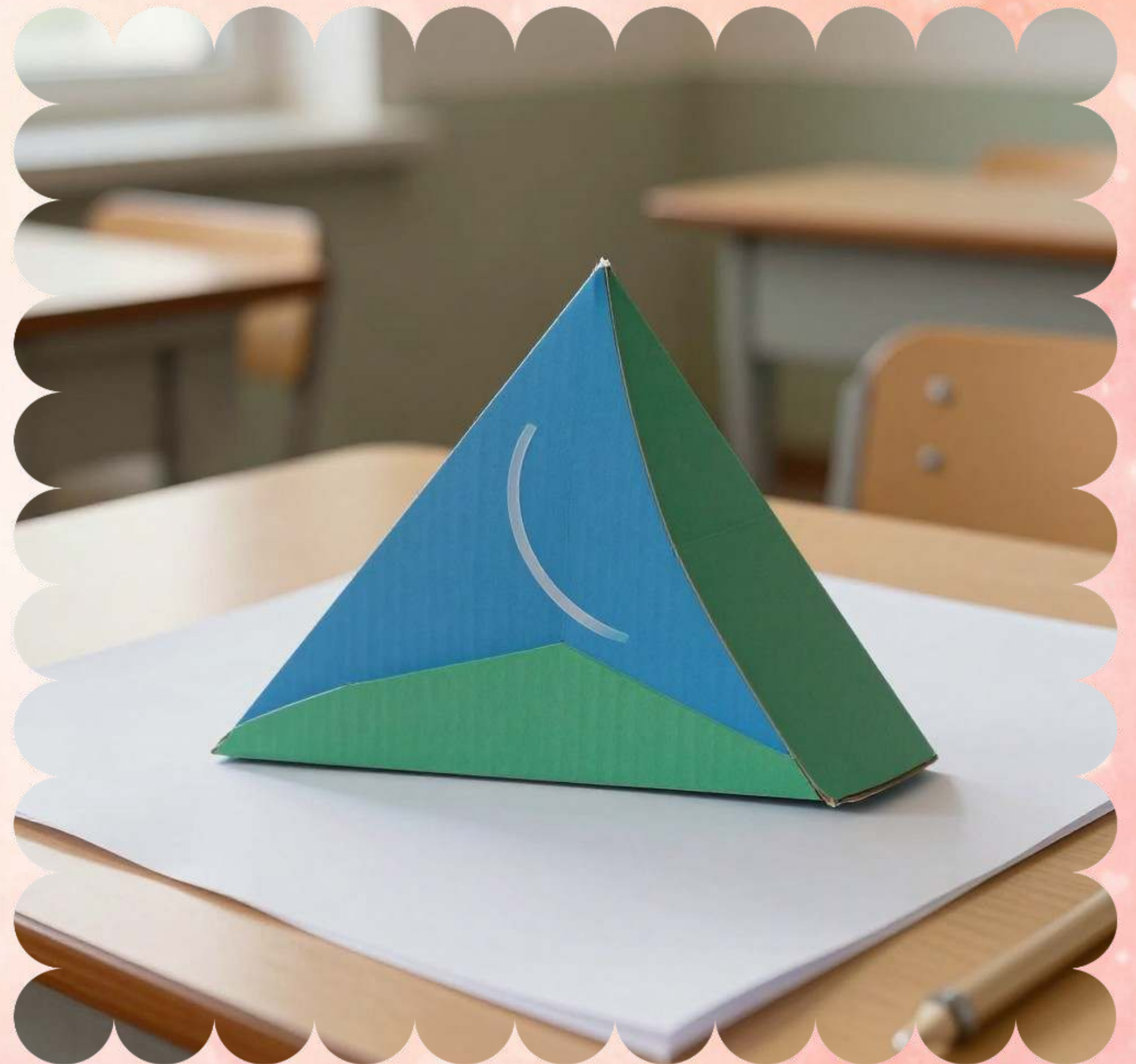
На рисунке удобно показать стороны a и b , угол между ними и опущенную высоту. Тогда видно, как новая формула получается из обычной формулы площади через основание и высоту.

Включённый угол

Угол C должен быть расположен между этими сторонами, то есть включённым. Если взять другой угол, формула уже не будет соответствовать построению и даст неверный результат.

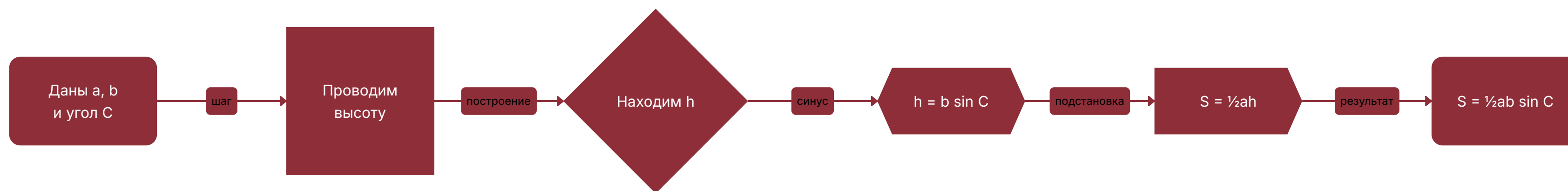
Что важно запомнить

Главная идея состоит в том, что новая формула использует те данные, которые часто уже известны в задаче. Поэтому она экономит лишние построения и делает решение короче.



Как получается формула $S = \frac{1}{2}ab \sin C$

Переход от формулы через высоту к формуле через две стороны и угол



Почему появляется синус



Синус в прямоугольном треугольнике

Синус острого угла равен отношению противолежащего катета к гипотенузе. Это правило помогает связать высоту с другой стороной, когда мы рассматриваем вспомогательный прямоугольный треугольник.



Высота как катет

При построении высота становится противолежащим катетом в прямоугольном треугольнике. Тогда её можно выразить через известную сторону и синус угла, не измеряя её отдельно на рисунке.



Формула для высоты

Если гипотенузой служит сторона b , а угол равен C , то высота выражается так: $h = b \sin C$. После этого остаётся только подставить h в формулу площади.

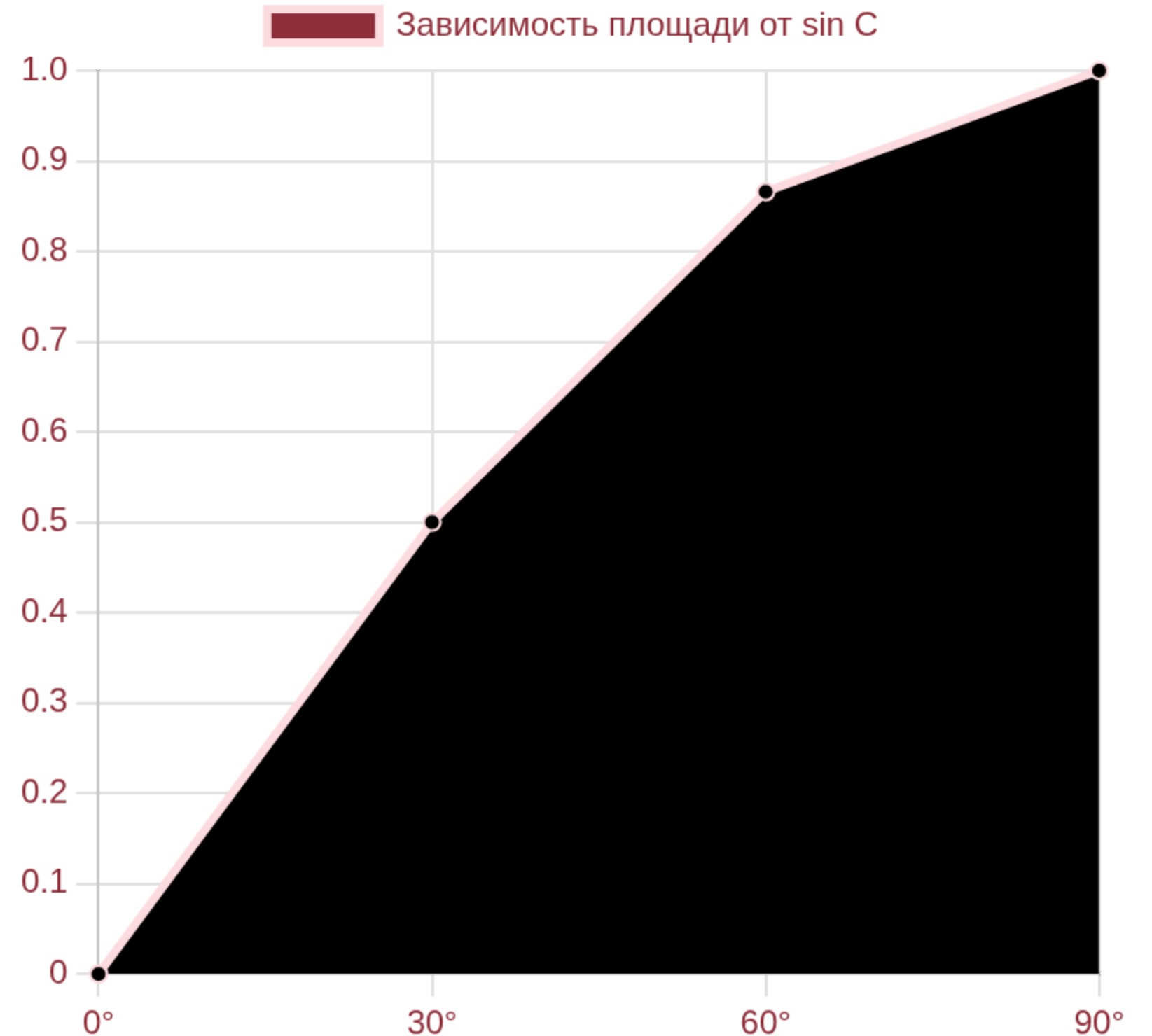
Как угол влияет на площадь треугольника



При постоянных сторонах площадь меняется только из-за угла между ними и его синуса.

Чем больше $\sin C$, тем больше площадь; наибольшее значение получается при прямом угле.

Учебная зависимость по формуле $S = \frac{1}{2}ab \sin C$





Когда угол между сторонами равен 90° , формула упрощается до $S = \frac{1}{2}ab$. Это максимум для тех же двух сторон: дальше площадь уже не увеличится.

Формула $S = \frac{1}{2}ab \sin C$

1

достигает синус прямого угла, поэтому площадь при фиксированных сторонах становится наибольшей.



C	sin C	S
30°	0,5	20 см²
45°	0,707	28,3 см²
60°	0,866	34,6 см²
90°	1	40 см²

Сравнение площадей при одинаковых сторонах

Для сторон $a = 8$ см и $b = 10$ см сравним площадь при разных углах между ними.

При увеличении угла между сторонами возрастает синус, а вместе с ним и площадь треугольника.

Расчёт по формуле $S = \frac{1}{2}ab \sin C$

Пример вычисления площади по формуле

1 Записываем данные

Даны стороны $a = 7$ см и $b = 9$ см, а также угол $C = 40^\circ$. Сразу выбираем формулу $S = \frac{1}{2}ab \sin C$, потому что известны две стороны и включённый угол.

2 Подставляем значения

Вместо букв подставляем числа: $S = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 9 \cdot \sin 40^\circ$. Теперь остаётся найти приближённое значение синуса и аккуратно выполнить вычисления по порядку

3 Находим синус

Для угла 40° берём приближённое значение $\sin 40^\circ \approx 0,643$. Важно не округлять его слишком рано, иначе ответ может получиться неточным.

4 Получаем ответ

После вычислений выходит $S \approx 20,2$ см². Ответ обязательно записывают с единицами площади, чтобы показать, в каких мерах измерен результат.



Единицы измерения площади

♥ Согласованные единицы

Перед вычислением все стороны треугольника нужно выразить в одной и той же единице длины. Если этого не сделать, подстановка в формулу даст неверный численный результат и неправильную площадь.

♥ Квадратные единицы

Когда стороны измерены в сантиметрах, площадь записывают в квадратных сантиметрах. Если длины заданы в метрах, ответ получают в квадратных метрах, потому что площадь всегда связана с произведением двух длин.

♥ Проверка ответа

После вычисления полезно ещё раз посмотреть на единицы измерения и саму запись ответа. Это помогает заметить ошибку раньше, чем результат будет принят как правильный.

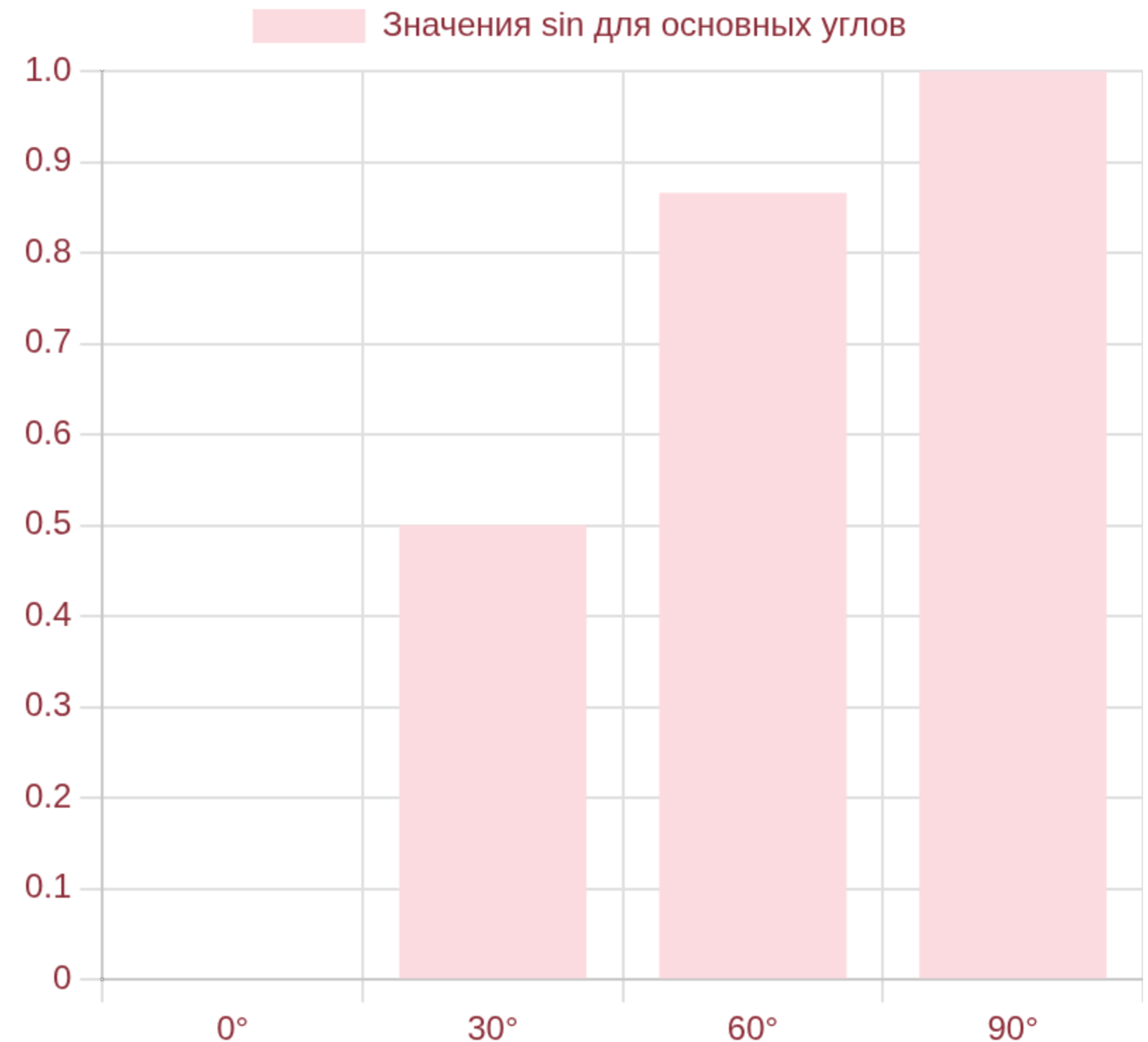
Значения синуса для углов 0° , 30° , 60° и 90°



Для формулы площади важно, что синус меняется плавно: чем больше угол между сторонами, тем больше его значение и тем больше площадь при тех же сторонах.

Наибольшая площадь получается при 90° , а при 0° треугольник вырождается. Значит, угол напрямую влияет на результат через синус.

Табличные значения синуса из курса геометрии 7 класса; справочные значения для стандартных углов.



Когда формула особенно удобна

1 Даны две стороны

Формула особенно полезна, когда в задаче уже известны две стороны и угол между ними. Тогда можно сразу подставить значения и получить площадь без дополнительных построений и лишних вычислений.

2 Нужно быстро измерить

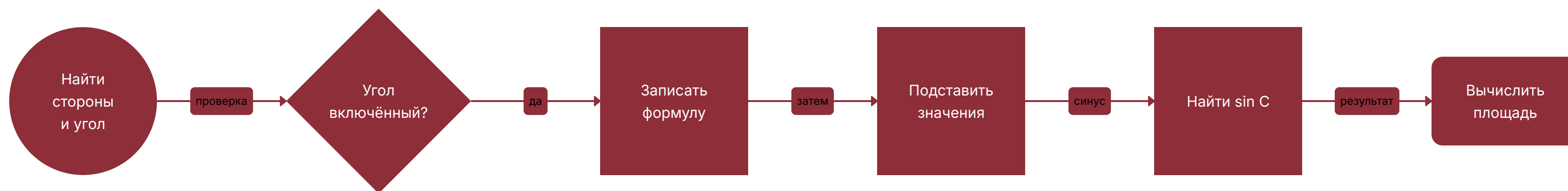
На местности или в чертеже высоту часто трудно провести точно. В таких случаях способ через две стороны и включённый угол оказывается быстрее и удобнее, чем поиск высоты через вспомогательные линии.

3 Решение становится короче

Если угол уже отмечен на рисунке, формула помогает сократить путь к ответу. Это особенно удобно в учебных задачах, где важно не только найти площадь, но и сделать решение аккуратным и понятным.

Алгоритм решения задач на площадь треугольника

Последовательность действий при использовании формулы $S = \frac{1}{2}ab \sin C$



Типичные ошибки при использовании формулы



Неверный угол

Часто подставляют не тот угол, который расположен между данными сторонами. Для формулы нужен именно включённый угол, а внешний или соседний угол приведёт к ошибочному ответу.



Пропущенный множитель

Некоторые забывают о коэффициенте $\frac{1}{2}$ и получают площадь в два раза больше нужной. Этот множитель обязателен, потому что формула связана с треугольником, а не с параллелограммом.



Путаница в единицах

Если одна сторона задана в сантиметрах, а другая в метрах, сначала нужно привести их к одной единице. Иначе произведение длин будет записано неверно, даже при правильной формуле.



Раннее округление

Слишком раннее округление синуса может заметно изменить ответ. Лучше сохранить точность до конца вычислений, а округлить уже итоговую площадь, когда все действия выполнены.



Градусы и радианы

Иногда забывают, в каких единицах задан угол, и берут неправильное значение синуса. В школьных задачах обычно используют градусы, поэтому это нужно проверять особенно внимательно.

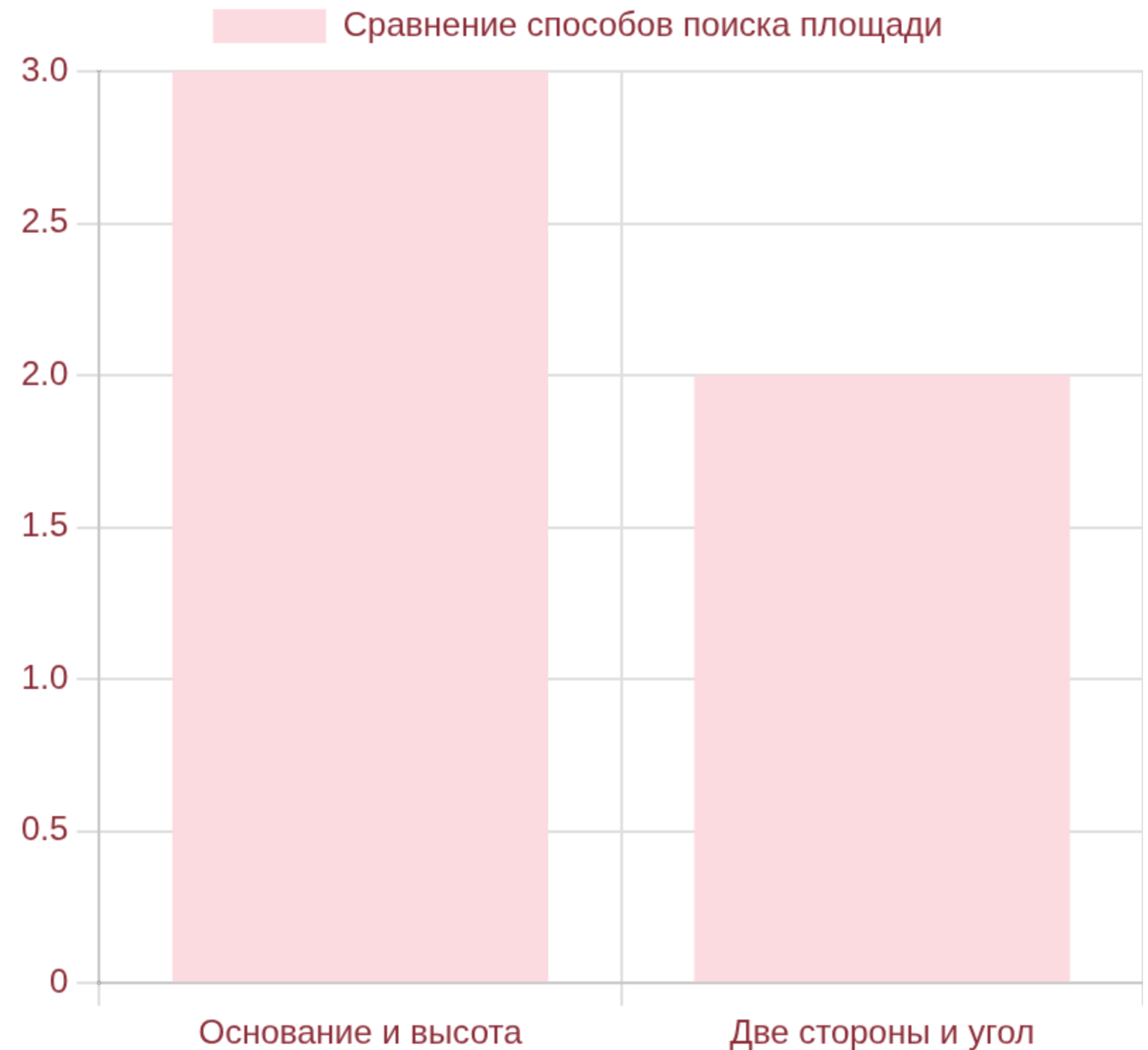
Два способа найти площадь треугольника



Оба способа дают один и тот же результат, если данные выбраны правильно. Разница лишь в том, какие величины уже известны в условии задачи.

Если высота не дана, способ через две стороны и угол обычно быстрее. Когда высота известна, формула через основание остаётся самым прямым путём.

Сравнительная схема по материалу урока; условная оценка удобства при решении типовых задач.



Где формула используется в практике



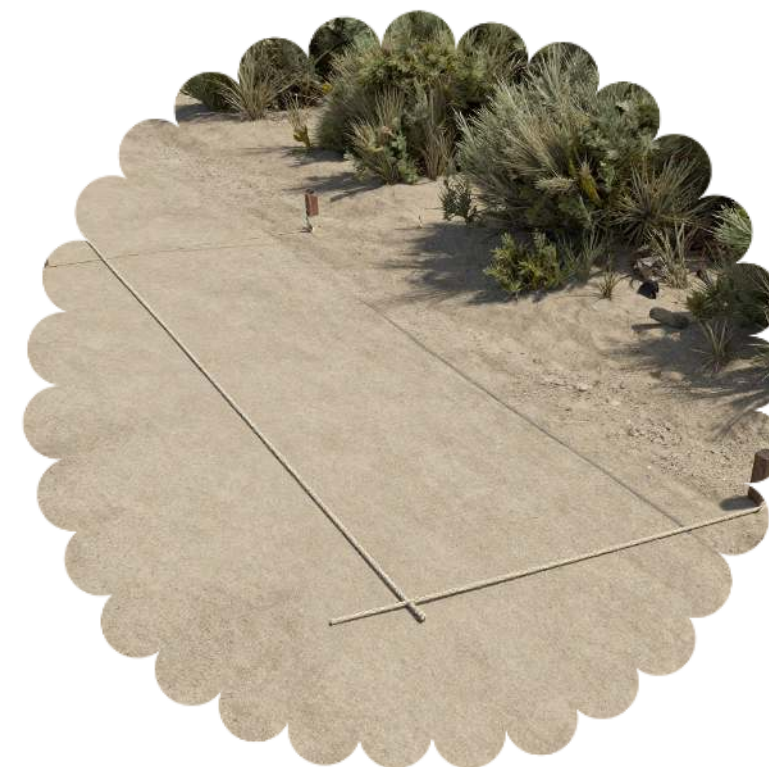
Треугольный участок земли

При измерении небольшого участка часто известны две стороны границы и угол между ними. Тогда формула помогает быстро оценить площадь без сложных построений. На схеме удобно показать контур участка, подписанные стороны и отмеченный угол.



Деталь на чертеже

В техническом чертеже треугольная часть детали может быть задана двумя рёбрами и углом. Инженеру важно сразу получить площадь, чтобы сравнить размеры и проверить проект. Иллюстрация здесь должна напоминать аккуратный фрагмент схемы с разметкой.



Задачи на местности

Во время измерений на местности не всегда удобно опускать высоту или строить вспомогательные перпендикуляры. Формула позволяет использовать уже доступные данные и сократить расчёты. Для изображения подойдёт участок с двумя линиями и дугой угла между ними.

Проверка формулы на разных треугольниках

a, см	b, см	C	sin C	S, см²
5	6	60°	0,866	12,99
8	8	45°	0,707	22,63
10	12	30°	0,5	30

Расчёты по формуле $S = \frac{1}{2}ab \sin C$; значения синуса для стандартных углов.

Таблица показывает, как меняется площадь при разных наборах данных, если известны две стороны и угол между ними.

Во всех трёх примерах формула даёт согласованный результат. При меньшем синусе площадь уменьшается, даже если стороны остаются большими.

Главные свойства новой формулы

Связь с синусом

Затем высоту связывают с одной из сторон через синус угла в прямоугольном треугольнике. Так появляется выражение, где вместо высоты используются известные элементы.

Основа формулы

Сначала площадь треугольника выражают через основание и высоту. Это даёт привычную опору для дальнейшего вывода новой формулы.

Итоговое преобразование

После подстановки получается $S = \frac{1}{2}ab \sin C$. Если угол прямой, синус равен 1, и формула сразу переходит в более простую запись.



Формула, которая ЭКОНОМИТ шаги

Формула $S = \frac{1}{2}ab \sin C$ помогает находить площадь треугольника быстрее, когда высота неизвестна. Главное — выбрать включённый угол, не забыть единицы и аккуратно выполнить вычисления.