

Свойства круговых функций

Понимание $\sin$, $\cos$, tg и ctg опирается на окружность: области, периоды, симметрии и тождества.



От окружности к тригонометрии

Круговые функции рождаются из точки на единичной окружности радиуса 1. Когда угол t задаёт положение точки $P(x, y)$, получаем $\cos t = x$ и $\sin t = y$. Так геометрия превращается в удобные формулы для измерения и анализа движений.



Синус и косинус на единичной окружности

1

Для любого угла t синус — это ордината точки на единичной окружности, а косинус — её абсцисса. Поэтому вычисление значений сводится к чтению координат.

2

При $t = 0$ точка находится на правом конце окружности, значит $\cos 0 = 1$ и $\sin 0 = 0$. Эти значения — удобные «якоря» для проверки графиков и решений.

3

При $t = \pi/2$ точка оказывается вверху: $\cos(\pi/2) = 0$ и $\sin(\pi/2) = 1$. Эти опорные точки помогают уверенно строить и интерпретировать остальные значения.

Область определения и множество значений

1

$\sin t$ и $\cos t$ определены при любом действительном t : угол можно задавать сколько угодно раз. Их значения всегда попадают в диапазон от -1 до 1 , поскольку это координаты точки на единичной окружности.

2

Тангенс и котангенс связаны с делением на $\cos t$ или $\sin t$. Поэтому их область определения «режется» теми углами, где знаменатель обращается в ноль.

3

Так $\operatorname{tg} t$ не существует при $\cos t = 0$, то есть при $t = \pi/2 + \pi k$. Аналогично $\operatorname{ctg} t$ не определён при $\sin t = 0$, то есть при $t = \pi k$, где делить нельзя.

Периодичность круговых функций

- Смысл периодичности: при повороте на полный «круг» траектория повторяется, а при повороте на пол-оборота для tg и ctg уже меняются только знаки.
- Блокировка значений у tg и ctg объясняет разрывы: вблизи точек t , где знаменатель исчезает, значения устремляются к бесконечности. Это качественно отличает их от $\sin$ и $\cos$.

Чётность и симметрия графиков

6



Синус — нечётная функция

Для противоположных углов знак меняется: $\sin(-t) = -\sin t$. Поэтому график $\sin$ симметричен относительно начала координат, и любая точка имеет «зеркальный» аналог с обратным значением.



Косинус — чётная функция

Для углов со сменой знака значение сохраняется: $\cos(-t) = \cos t$. Симметрия косинуса проявляется относительно оси Oy : точки слева и справа по оси t совпадают по высоте.



Тангенс и котангенс тоже нечётные

$\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t$. Это означает, что при переходе к $-t$ наклон и знак наклона меняются местами, а структура разрывов остаётся связанной с областью определения.

Основные свойства функций $\sin$, $\cos$, tg и ctg

Функция	Область определения D	Множество значений E	Период	Чётность
$\sin t$	$\mathbb{R}$	$[-1; 1]$	2π	нечётная
$\cos t$	$\mathbb{R}$	$[-1; 1]$	2π	чётная
$\operatorname{tg} t$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + \pi k\}$	$\mathbb{R}$	π	нечётная
$\operatorname{ctg} t$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi k\}$	$\mathbb{R}$	π	нечётная

- Сводная таблица помогает быстро сравнить область определения, множество значений, период и чётность для четырёх базовых круговых функций.
- Различие между $\sin/\cos$ и $\operatorname{tg}/\operatorname{ctg}$ проявляется прежде всего в области определения: у последних есть точки запрета из-за деления. При этом периодичность tg и ctg короче вдвое.

Определения функций на единичной окружности и тождества $\operatorname{tg} t = \sin t / \cos t$, $\operatorname{ctg} t = \cos t / \sin t$ (школьная тригонометрия).

Нули функций и характерные углы

1

Нулевые значения синуса возникают тогда, когда ордината точки на единичной окружности равна нулю. Это соответствует касанию окружности оси Ox и даёт набор $t = \pi k$.

2

Нули косинуса появляются, когда абсцисса равна нулю, то есть точка находится на оси Oy . Поэтому t принимает вид $t = \pi/2 + \pi k$, что меняет «роль» характерных точек местами.

3

Для тангенса нуль означает $\sin t = 0$ (при условии, что tg существует). Следовательно, нули tg совпадают с нулями $\sin$ там, где $\cos t \neq 0$, то есть без точек разрыва.

4

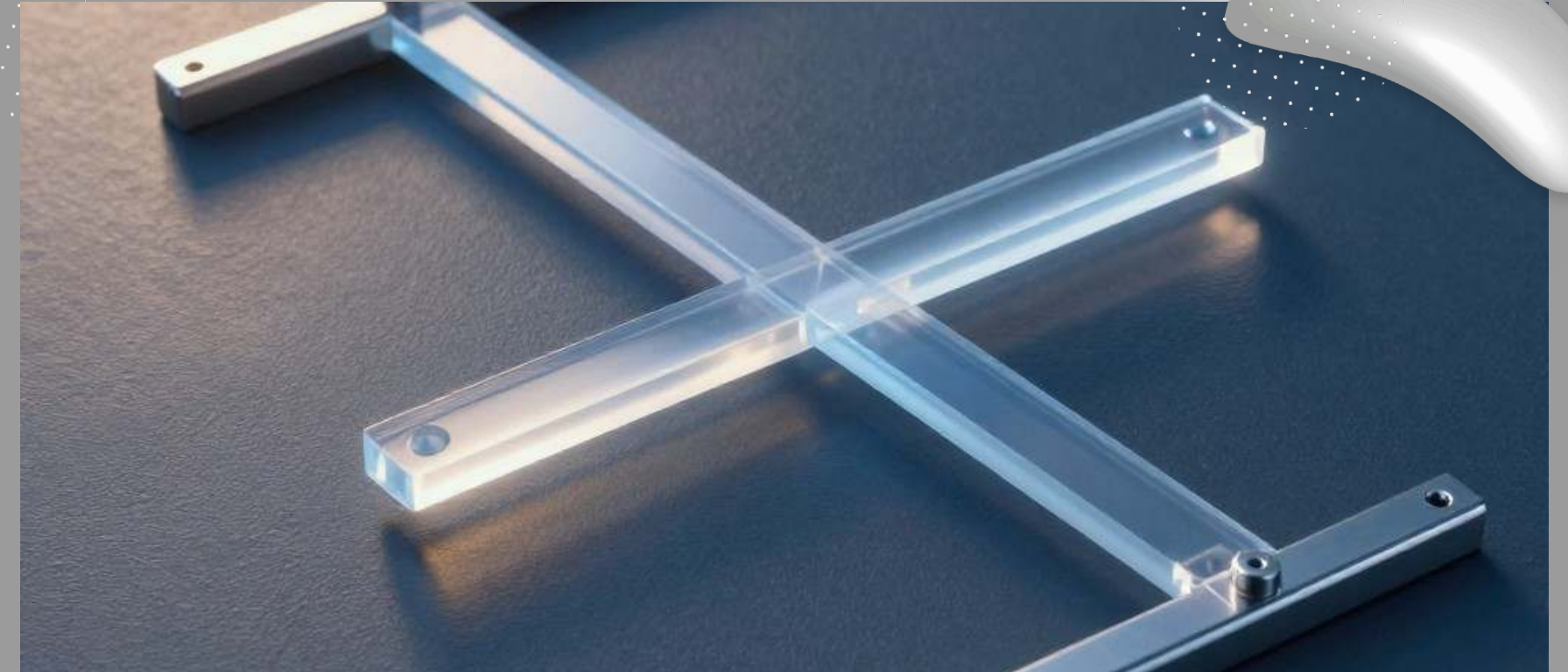
Эти углы не только отмечают места пересечения графиков осей, но и делят окружность на равные части. Благодаря им удобно проверять расчёты и быстро ориентироваться в решениях уравнений.

Знаки функций по четвертям



Четыре «карманы» окружности

Разместите угол t на единичной окружности и посмотрите на координаты точки. В I четверти обе координаты положительны, поэтому $\sin t$ и $\cos t$ больше нуля. Знаки в остальных четвертях меняются строго по ориентации точки.



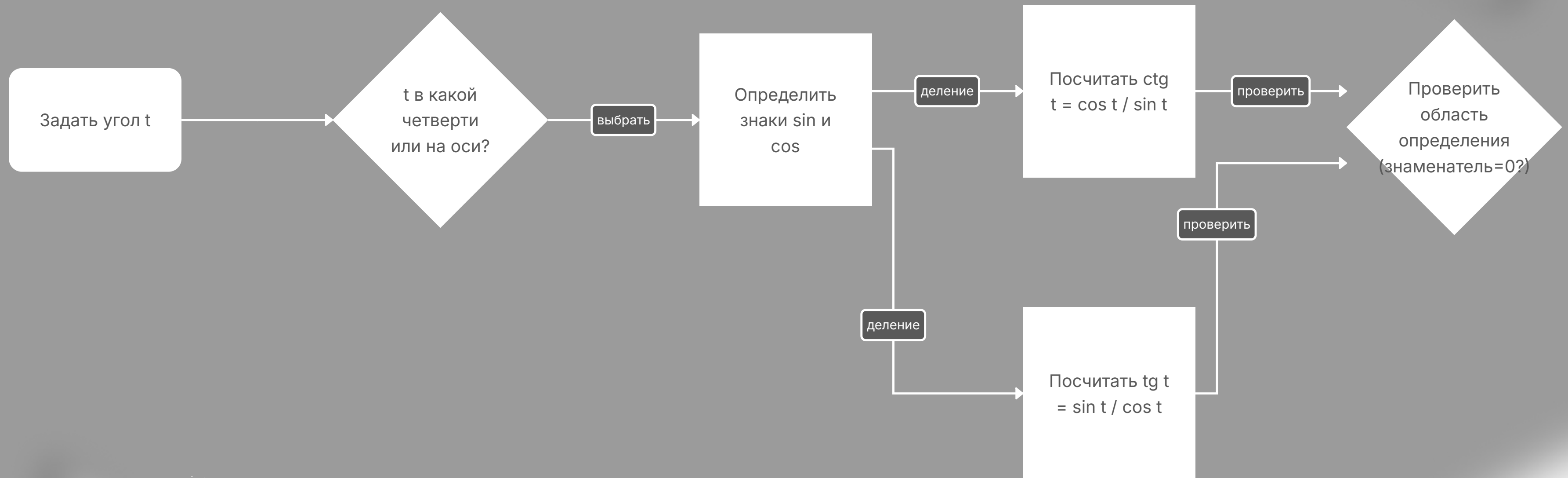
Знаки тангенса и котангенса — как дробь

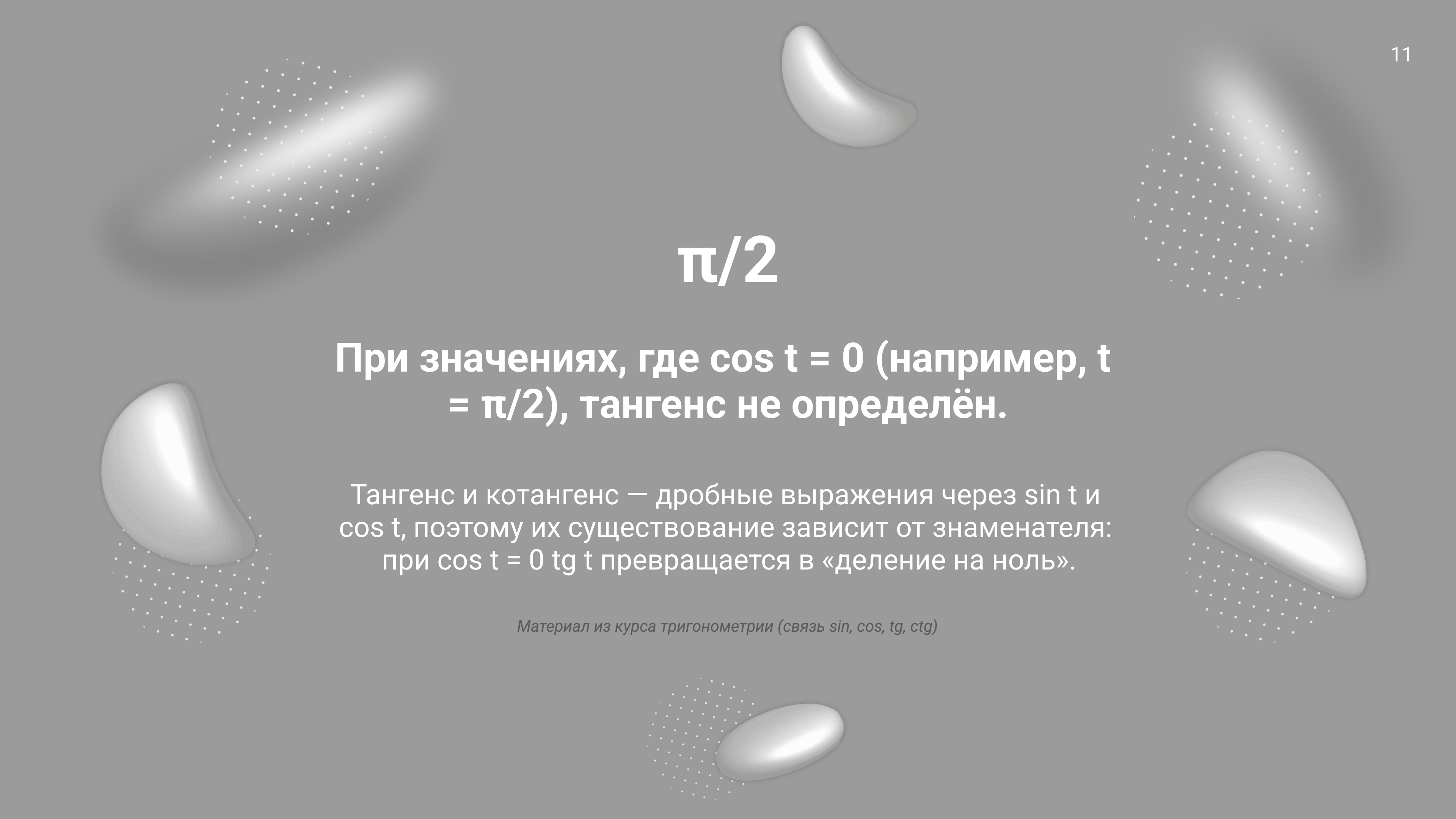
$\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$ выражаются отношениями $\sin$ и $\cos$, поэтому их знак определяется сочетанием знаков числителя и знаменателя. Там, где знаменатель равен нулю, функция не существует, и график делает «разрыв».

Алгоритм определения знака и значения

10

Схема помогает последовательно перейти от угла к $\sin$, $\cos$, tg и ctg с учётом области определения.





$\pi/2$

При значениях, где $\cos t = 0$ (например, $t = \pi/2$), тангенс не определён.

Тангенс и котангенс — дробные выражения через $\sin t$ и $\cos t$, поэтому их существование зависит от знаменателя: при $\cos t = 0$ $\operatorname{tg} t$ превращается в «деление на ноль».

Материал из курса тригонометрии (связь $\sin$, $\cos$, tg , ctg)

Графики $\sin t$ и $\cos t$

12

- На единичной окружности $\cos t$ — абсцисса точки, $\sin t$ — ордината. Отсюда видно: при увеличении t на $\pi/2$ значения меняются с фазовым сдвигом.
- Параллельное изображение помогает быстро сверять вычисления: там, где $\cos t = 0$ ($t = \pi/2 + \pi k$), $\sin t$ достигает ± 1 , и наоборот.

Графики $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$

- Вертикальные асимптоты показывают моменты, когда знаменатель равен нулю: у $\operatorname{tg} t$ это $\cos t = 0$, у $\operatorname{ctg} t$ — $\sin t = 0$.
- Непрерывные участки отделены разрывами и повторяются каждые π : характер монотонного роста tg и убывания ctg сохраняется на каждом интервале области определения.

Монотонность на промежутках

14

Шаг 2: $\sin t$ ($\pi/2$; $3\pi/2$)

На промежутке от $\pi/2$ до $3\pi/2$ синус, наоборот, убывает: график идёт сверху вниз, сохраняя непрерывность на интервале.

Шаг 1: $\sin t$ ($-\pi/2$; $\pi/2$)

На промежутке от $-\pi/2$ до $\pi/2$ синус последовательно растёт: значение функции увеличивается по мере продвижения аргумента t .

Шаг 3: $\cos t$ (0 ; π)

Косинус убывает при переходе от 0 до π . Это удобно для контрольных задач: по знаку и величине можно предсказать направление изменения.

Шаг 4: $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$ (каждый интервал области определения)

Тангенс возрастает на каждом промежутке, где он определён, а котангенс убывает на каждом таком промежутке, разделённом асимптотами.

Основные тригонометрические тождества

15

1

Фундаментальное тождество $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ опирается на единичную окружность: при $x = \cos t$ и $y = \sin t$ сумма квадратов координат равна 1 всегда, независимо от t .

2

Из него получают связи для тангенса: $1 + \operatorname{tg}^2 t = 1 / \cos^2 t$. Формула справедлива там, где $\cos t \neq 0$, то есть в точках области определения tg .

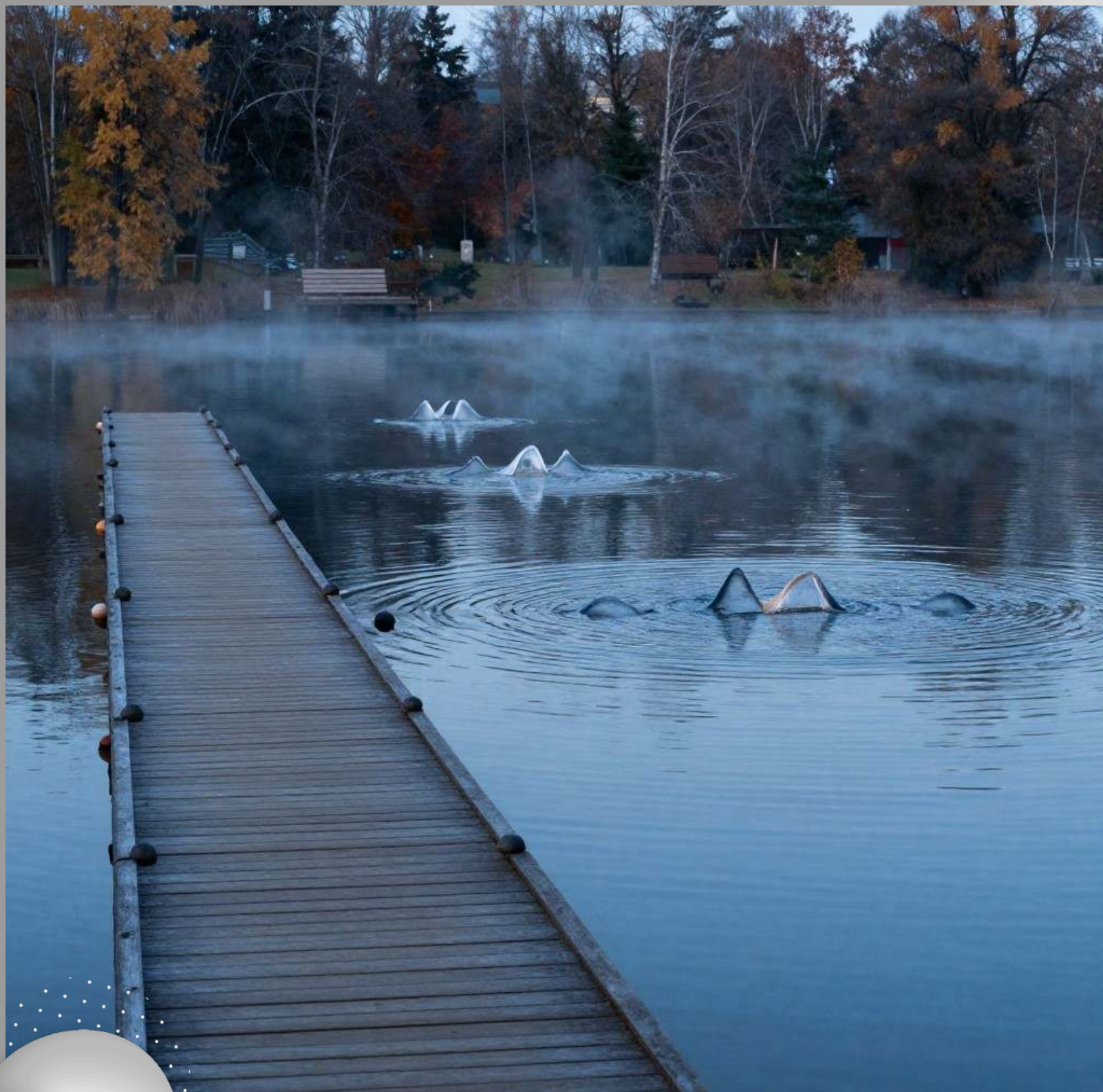
3

Аналогично выводится для котангенса: $1 + \operatorname{ctg}^2 t = 1 / \sin^2 t$, причём требуется $\sin t \neq 0$. Эти тождества полезны при преобразованиях и сокращениях дробей.

Опорные значения углов

- Ниже — набор «якорных» углов, где тригонометрические значения выражаются простыми числами; они помогают делать точные вычисления и проверять ответы.
- Там, где знаменатель дроби обращается в ноль, tg становится не определённым (при $t = \pi/2$). Одновременно видно симметричное «распределение» значений sin и cos.

Угол t	sin t	cos t	tg t
0	0	1	0
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	не определён



Преобразования графиков тригонометрических функций

- Сдвиг аргумента влияет на расположение графика по оси t : в $y = \sin(t + a)$ знак « $+a$ » означает сдвиг влево на a относительно исходного $\sin t$. Проверьте это на характерных точках.
- Масштабирование и отражение задаются коэффициентами: $y = A \sin(bt)$ меняет амплитуду (высота колебаний $|A|$) и период $T = 2\pi/|b|$. Отрицательный b дополнительно «переворачивает» по направлению изменения.

Параметры функции $y = A \sin(bt + c) + d$

18

- Если $A = 0$, график превращается в постоянную линию $y = d$. При этом период и фазовый сдвиг перестают «видны» проявляться, но формулы параметров сохраняются.
- Диаграмма связывает каждый параметр с отдельным «визуальным признаком»: амплитудой, периодом, сдвигом по t и уровнем. Так преобразования считываются без вычислительной перегрузки.

Практическое значение круговых функций



Вращение и угловые скорости

Синус и косинус удобны, чтобы описывать положение точки при повороте вокруг центра. Это основа для моделирования вращательных движений и поворотов в школьных задачах.



Колебания и маятник

Функции хорошо передают повторяющиеся процессы: отклонение маятника, работа пружины, характеристики колебательных систем. Период напрямую связан с шагом аргумента.



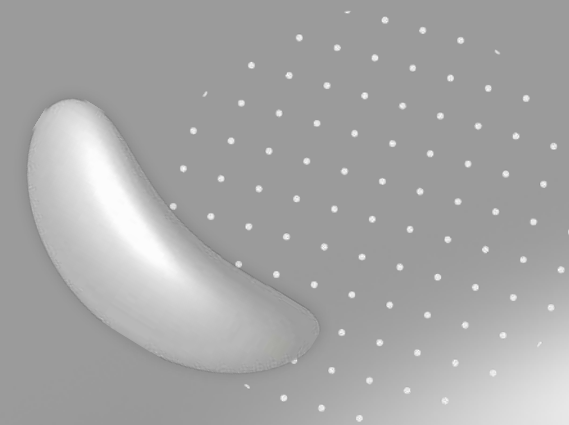
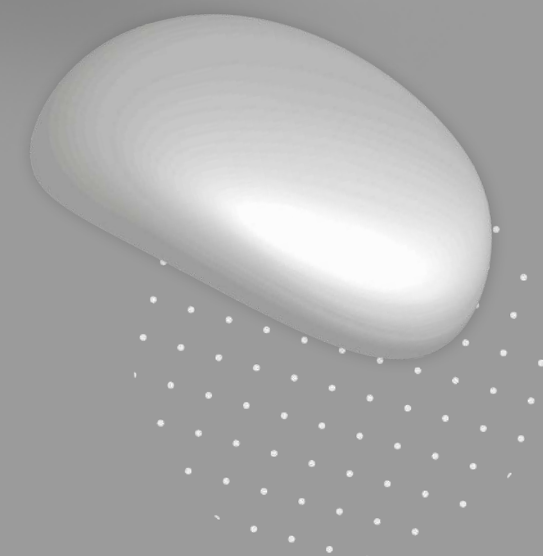
Звук и «волновые» сигналы

Отклонения давления в звуковой волне можно приближать синусоидами. Поэтому $\tan$ и $\cot$ встречаются в задачах на фазовые связи и наклоны графиков.



Свет и периодические явления

При анализе света используются периодические модели: отражение, интерференция и изменение интенсивности. Тригонометрия помогает находить амплитуды и фазовые различия.



Главное, что нужно запомнить

Синус и косинус задаются координатами на единичной окружности: их значения лежат в $[-1; 1]$ и период равен 2π . Тангенс и котангенс выражаются через отношения, имеют период π и разрывы. Ключевые свойства — чётность/нечётность, знаки, нули, монотонность и тождество $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.