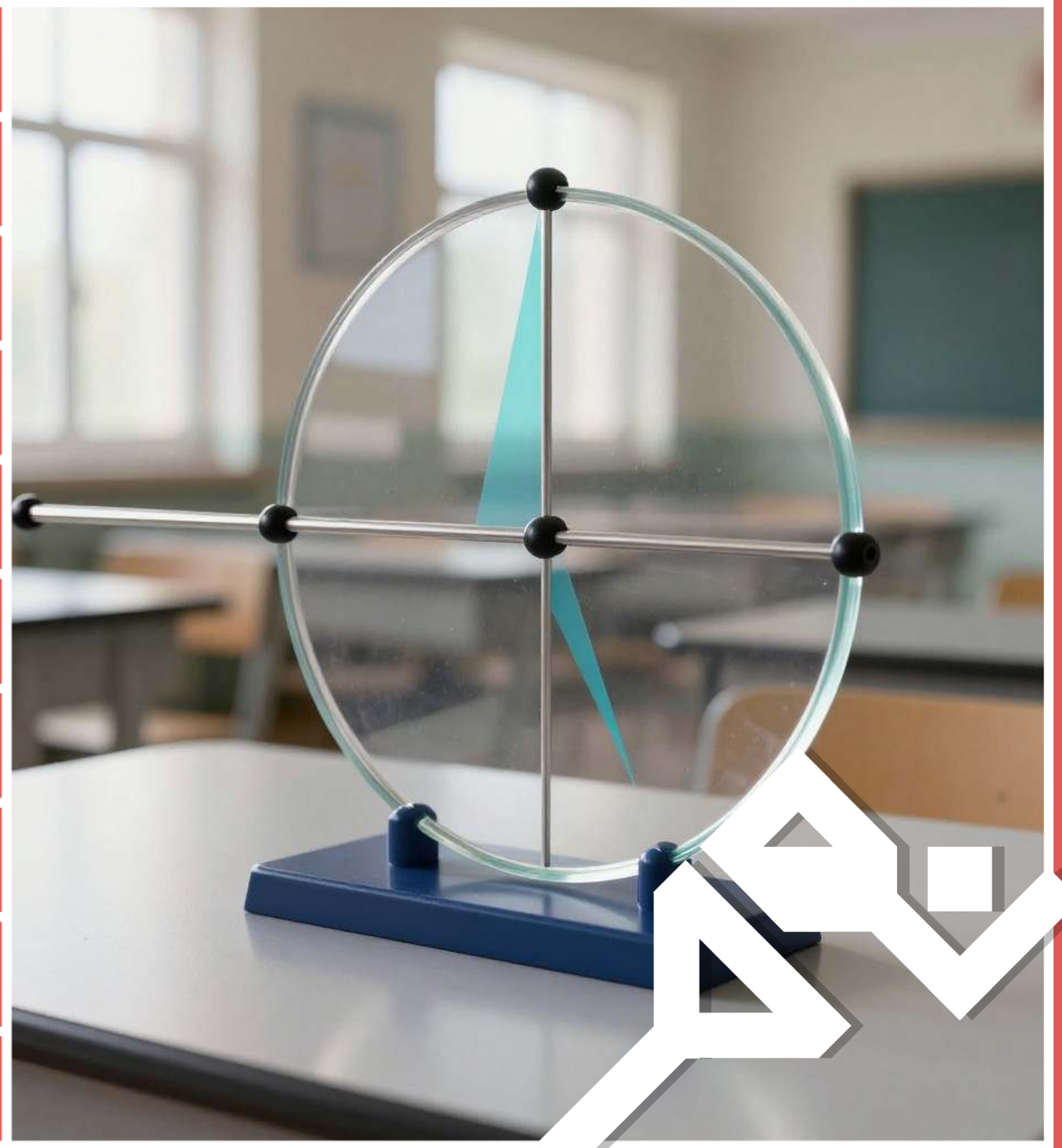


Пропорциональность отрезков хорд и секущих окружности

Свойства хорд, секущих и касательной:
 $AK \cdot KB = CK \cdot KD$, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, $PT^2 = PA \cdot PB$.



Место темы в курсе геометрии 9 класса

Раздел «Окружность» и логическое продолжение темы о хордах, касательных, секущих и центральных углах. Здесь свойства связываются с подобием треугольников, отношениями отрезков и уравнениями. Формулы помогают решать без линейки.



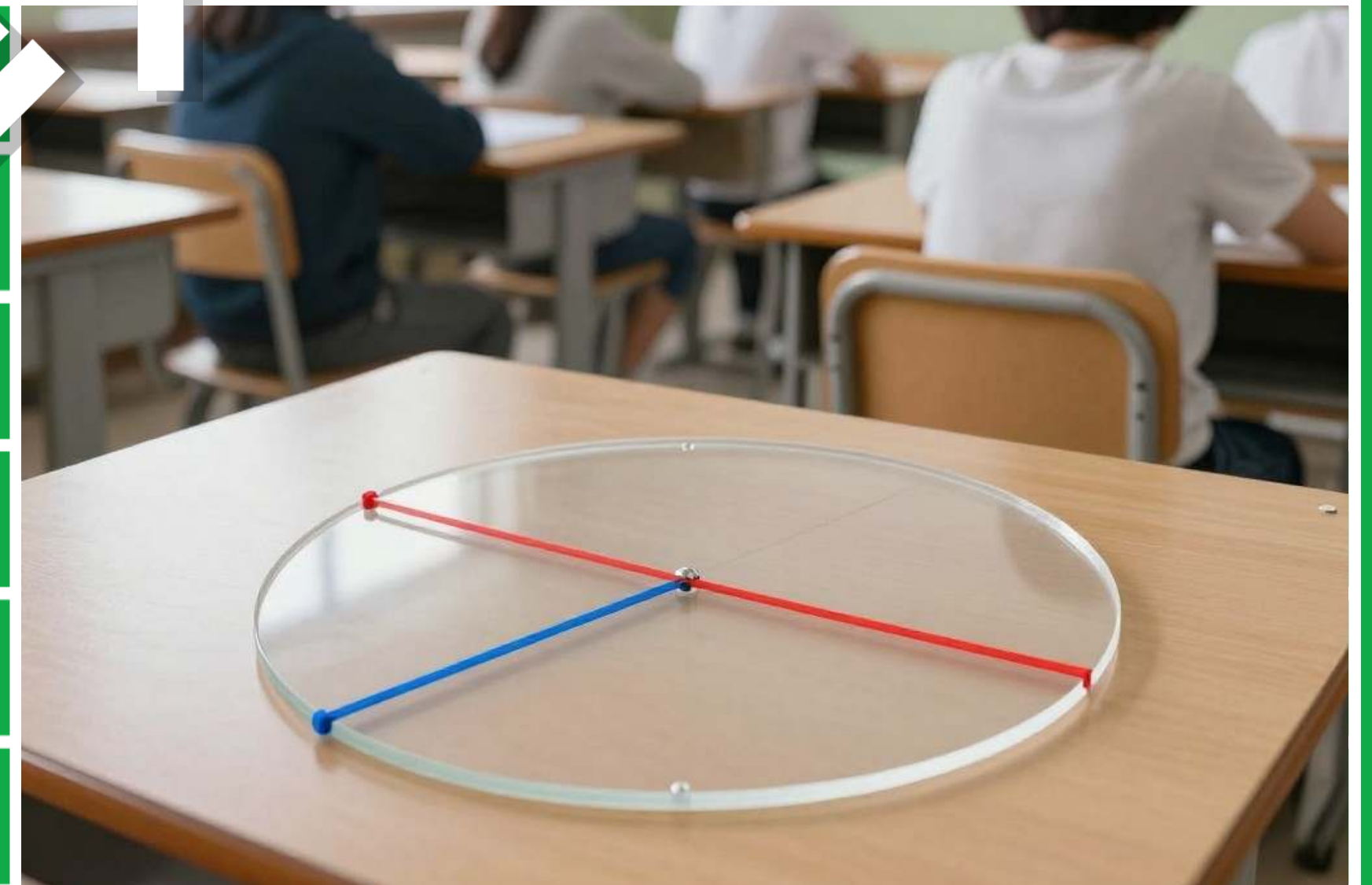
Основные элементы окружности на чертеже

Центр, радиус и отрезки, которые «лежат» в окружности

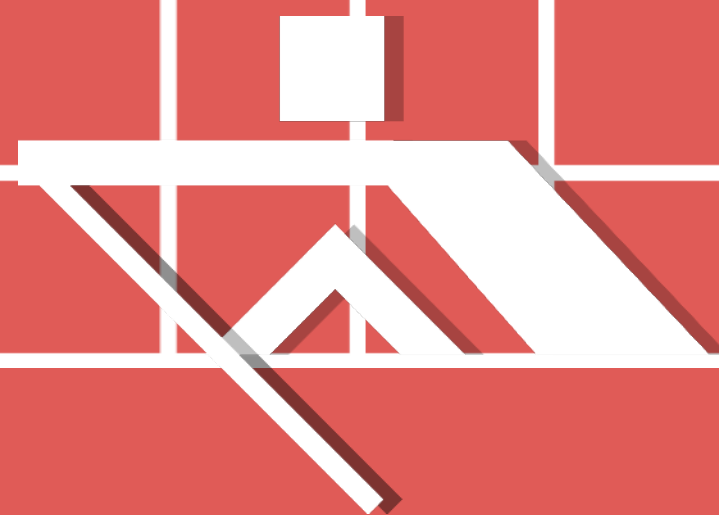
На чертеже обычно отмечают центр окружности и радиус: они задают положение и «масштаб» фигуры. Хорда соединяет две точки окружности, поэтому целиком лежит внутри круга. Это важно при выборе формулы.

Точки пересечения и внешние части

Секущая пересекает окружность в двух точках и поэтому имеет внутренний участок и две внешние части (если точка задана снаружи). Касательная касается окружности в одной точке. Подписи к точкам показывают, какие отрезки входят в произведения.



Теорема о пересекающихся хордах



Если две хорды окружности пересекаются в точке K внутри окружности, то выполняется равенство $AK \cdot KB = CK \cdot KD$. Произведение отрезков первой хорды равно произведению отрезков второй.

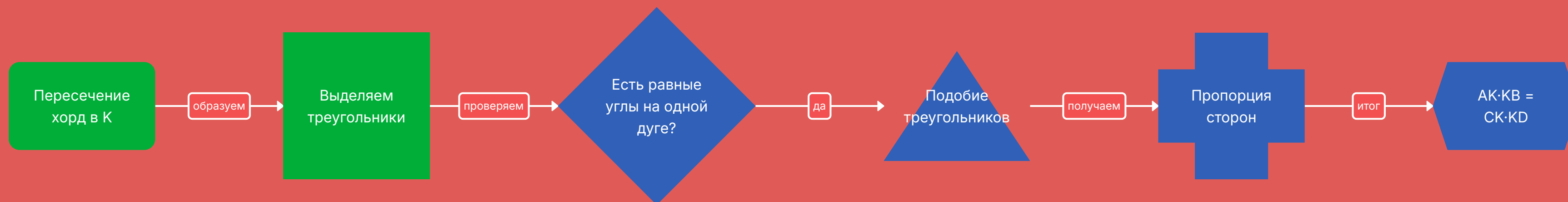
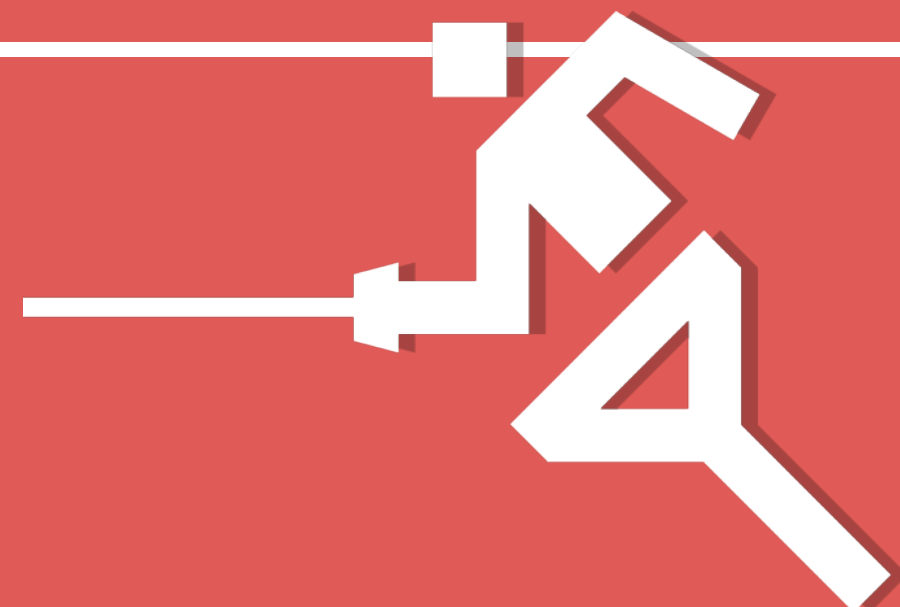
Теорема позволяет находить неизвестный отрезок: достаточно знать три из четырех величин, участвующих в произведениях. Это особенно удобно, когда на чертеже числа даны частями, а не целиком.



Формула применяется только в случае, когда точка пересечения находится внутри окружности. Если пересечение расположено иначе, меняются геометрические условия и правило уже не работает.

Как из геометрии получить равенство произведений

Цепочка рассуждений для случая пересекающихся хорд в точке К

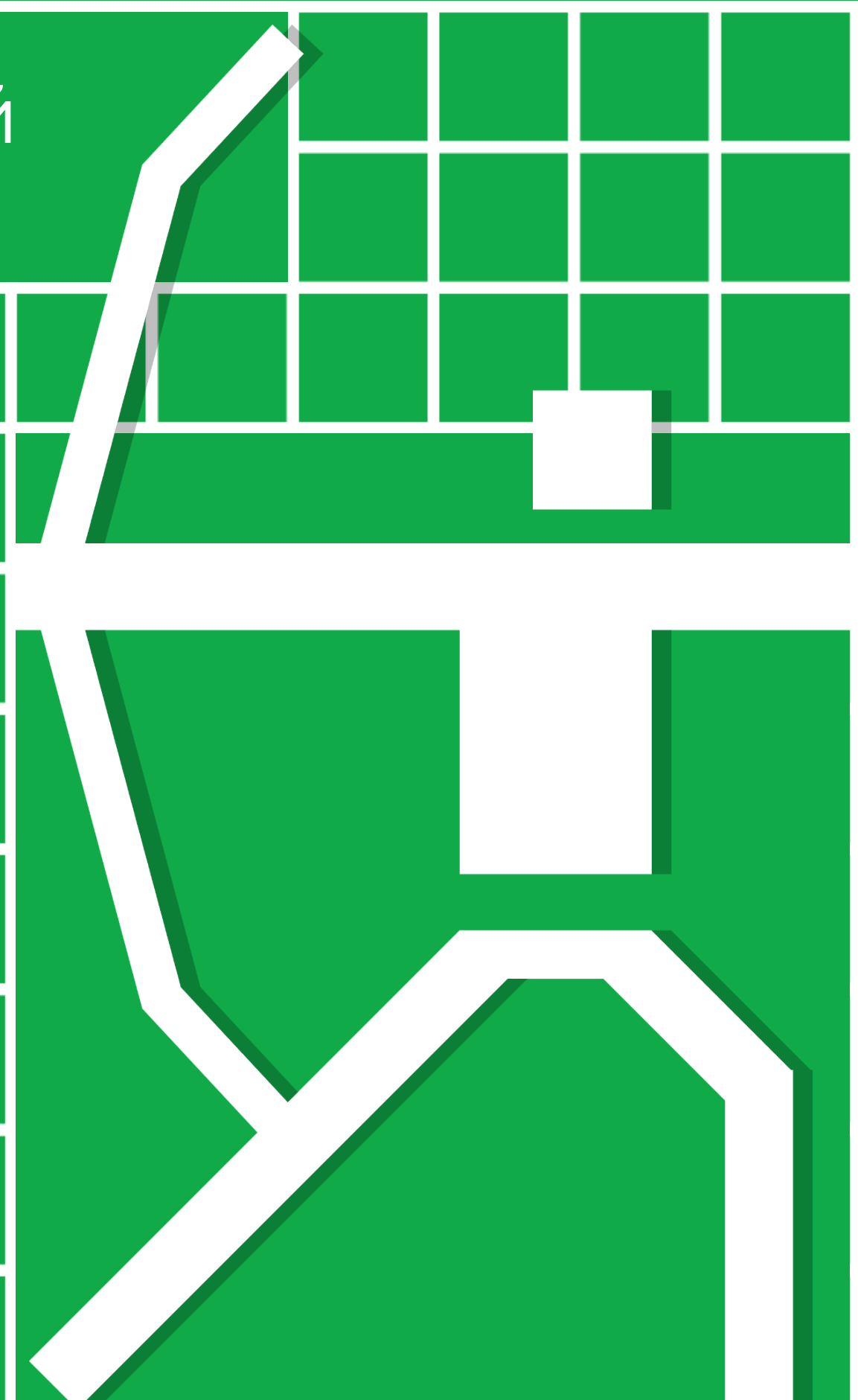


Теорема о двух секущих из одной внешней точки

Если из точки P , лежащей вне окружности, проведены две секущие PAB и PCD , то выполняется равенство $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Здесь P — внешняя точка, от которой начинаются обе прямые.

В этой записи PA и PC — внешние части секущих, то есть от P до ближайших точек пересечения. А PB и PD — полные длины секущих от внешней точки до дальнейшей точки пересечения с окружностью.

Формула удобна тем, что в ней обычно «спрятано» уравнение: зная три отрезка, можно найти четвертый. Важно правильно различать внешнюю часть и всю секущую.



При решении задач квадрат длины касательной связывают с отрезками секущей, чтобы быстро найти неизвестные длины.

1
Для касательной действует особая связь с секущей, где её длина входит в произведение через квадрат.

Свойство касательной и секущей для окружности (курс 9 класса)

Три основные формулы для окружности



Выбор формулы зависит от того, какие прямые и отрезки показаны на чертеже: внутри хорды, внешняя точка для секущих или касательная.

Во всех формулах сравниваются произведения отрезков; суммы вместо произведений использовать нельзя.

Случай	Формула	Что ищем
Хорды пересекаются внутри	$AK \cdot KB = CK \cdot KD$	часть хорды
Две секущие из точки P	$PA \cdot PB = PC \cdot PD$	неизвестный отрезок
Касательная и секущая	$PT^2 = PA \cdot PB$	длина касательной

Ключевые теоремы темы «Окружность»

Где встречаются окружности в реальных объектах

Колесо велосипеда и «точности без линейки»

В спицах и ободе колеса хорошо видна окружность, а натянутые элементы дают иллюстрации хорд и секущих. Если мысленно провести прямую, получатся отрезки, которые удобно соотнести по правилам произведений. Так формулы становятся инструментом для понимания формы.



Циферблат часов и касательная

Стрелки часов часто образуют линии, которые касаются круга в точке и пересекают его по дуге. Это помогает представить касательную и секущую на одном рисунке. Даже без измерений можно объяснять, почему квадрат одного отрезка связан с произведением других.



Окна, арки и знаки с круглыми формами

Окна, арки и дорожные знаки содержат круги и их фрагменты. Если провести через круг прямую, она станет секущей, а отрезок внутри — хордой. Понимание окружности помогает читать схемы, где длины и положения связаны не числами на линейке, а геометрией.



Алгоритм решения задач на отрезки хорд и секущих

1. Определите тип прямых

Посмотрите, что изображено: пересекаются ли хорды внутри, проведены ли две секущие из внешней точки или есть касательная вместе с секущей.

2. Разделите отрезки на нужные части

Выделите внешнюю часть, внутреннюю часть и «всю» секущую или хорду. От того, что именно вы подставляете, зависит правильность уравнения.

3. Выберите формулу и составьте уравнение

Подставьте значения в соответствующее равенство произведений. Обозначьте неизвестное одним числом и запишите уравнение прямо по формуле

4. Посчитайте и проверьте смысл

Найдите неизвестную длину, затем проверьте равенство произведений и убедитесь, что ответ положительный и согласуется с чертежом.

Типичные ошибки в задачах по теме



Путают хорду и секущую

Хорда имеет концы на окружности и целиком лежит внутри. Секущая проходит через окружность и пересекает её в двух точках, поэтому для них используются разные обозначения и формулы.



Берут не тот отрезок у секущих

В формулах для двух секущих важно различать внешний отрезок и весь путь от внешней точки до дальней точки пересечения. Ошибка возникает при подстановке внутренней части вместо внешней.



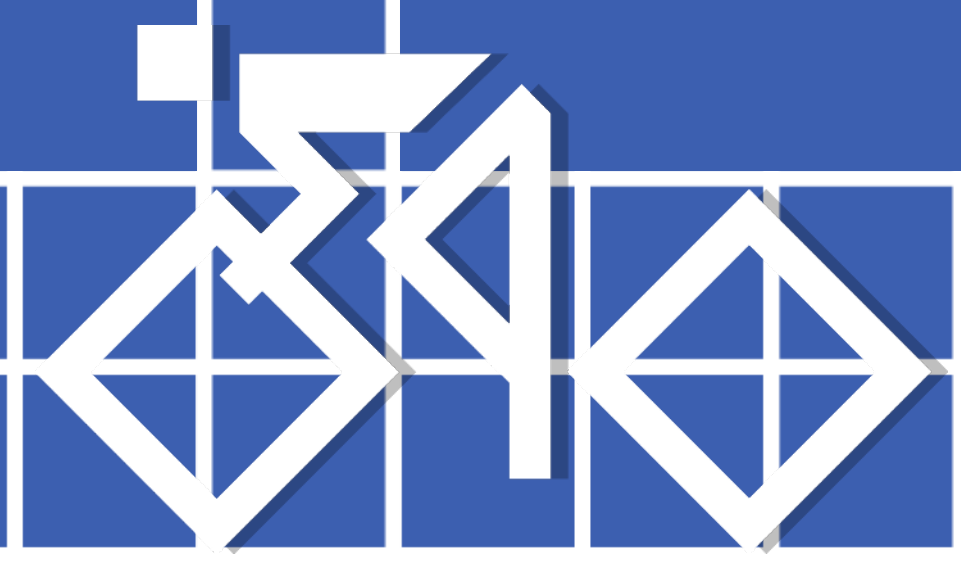
Складывают вместо умножения

Во всех трёх теоремах сравниваются произведения соответствующих отрезков. Если заменить умножение сложением, уравнение станет неверным, а проверка не сойдётся на числах.



Неверно обозначают точки пересечения

Иногда точки пересечения хорды и секущей помечают иначе, чем в условии. Тогда роли отрезков меняются местами, и произведения не соответствуют нужным границам отрезков.



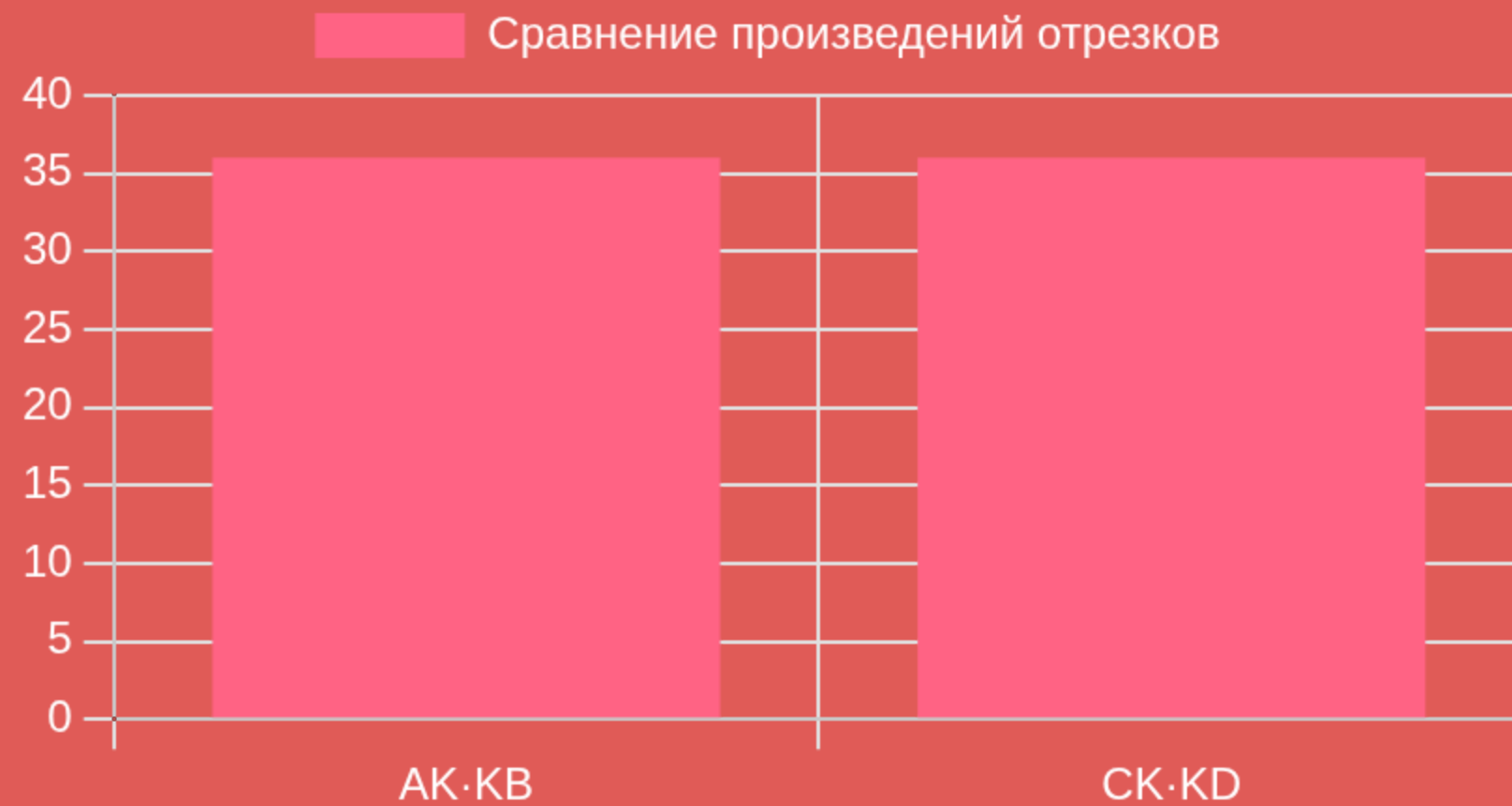
$AK \cdot KB = CK \cdot KD$: $3 \cdot 12 = 4 \cdot KD$, откуда $KD = 9$ см.
Проверка: $3 \cdot 12 = 36$ и $4 \cdot 9 = 36$.

9 см

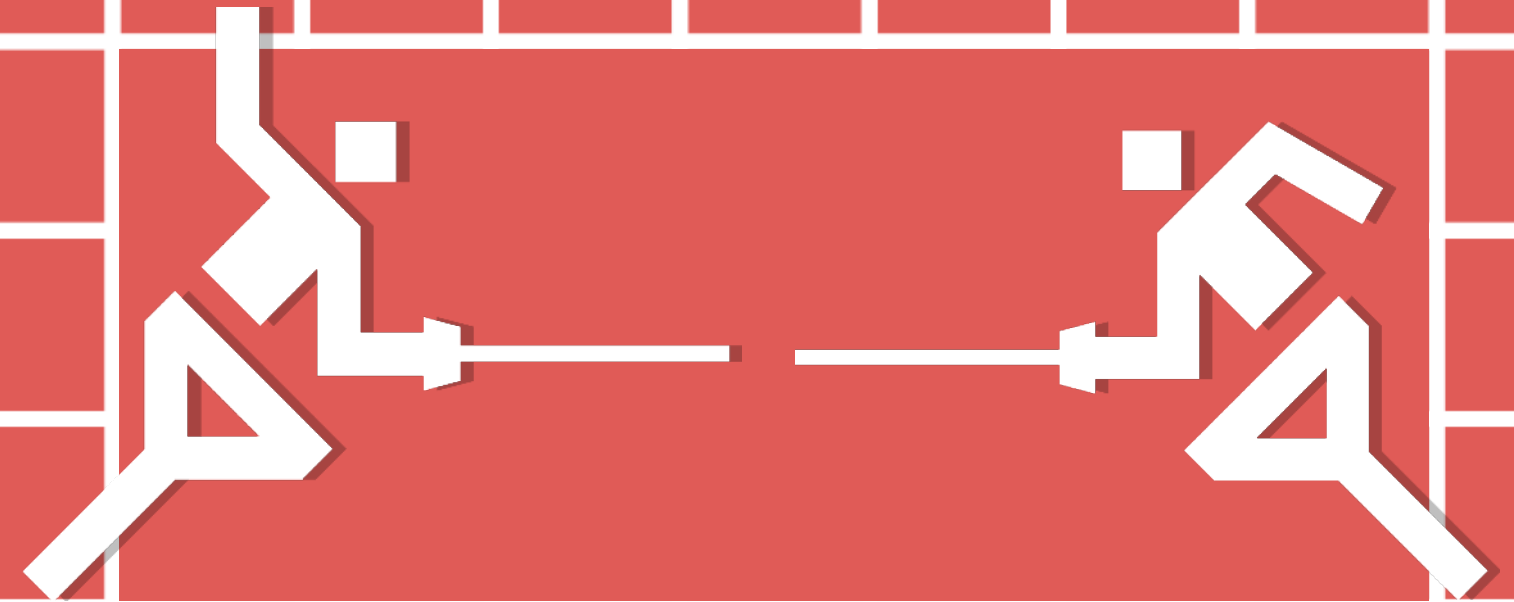
Значит, искомый
отрезок равен 9
сантиметрам.

Учебный пример по теореме о пересекающихся хордах
(равенство произведений).

Проверка равенства произведений в примере



Расчёт по исходным данным примера: AK = 3 см, KB = 12 см, CK = 4 см, KD = 9 см.



Одинаковые значения дают не «красивое совпадение», а подтверждение теоремы: произведения соответствующих отрезков при пересечении хордов одинаковы. Когда оба произведения совпадают, значит, найденный KD соответствует данным отрезкам на чертеже и теорема применена корректно.

Пример задачи на две секущие из одной точки

Внешний отрезок первой секущей равен 4 см, а вся секущая — 10 см. Для второй секущей внешний отрезок 5 см, а искомый — x .

По теореме для двух секущих из одной точки $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ получаем $4 \cdot 10 = 5 \cdot x$. После деления на 5 находим $x = 8$ см

Здесь важно помнить: в произведение входит внешняя часть и полная длина секущей от внешней точки до дальней точки пересечения, а не только внутренняя часть.



Обозначения на чертеже и их смысл



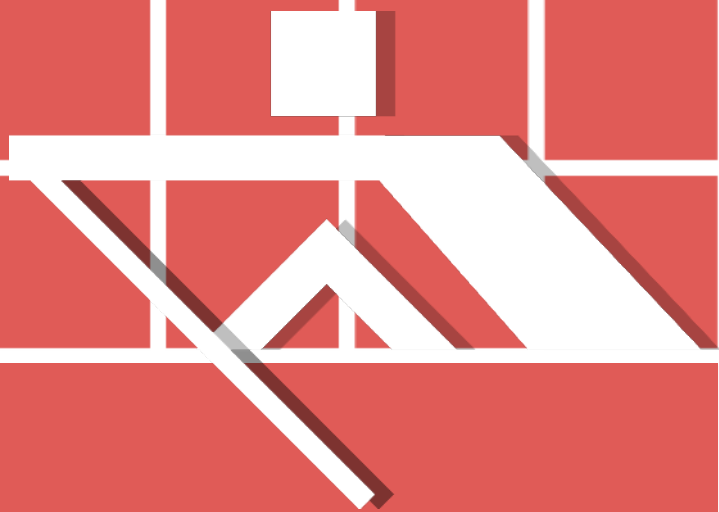
Элемент	Что обозначает	Где используется
Хорда АВ	Концы на окружности	АК·КВ и СК·КD
Секущая PAB	Прямая пересекает окружность в двух точках	РА·РВ
Внешний отрезок РА	От внешней точки до ближайшей точки пересечения	РА входит в произведение
Полная секущая РВ	От внешней точки до дальней точки пересечения	РВ входит в произведение

Обобщение типовой схемы обозначений из темы «Окружность» (хорды, секущие, касательная).

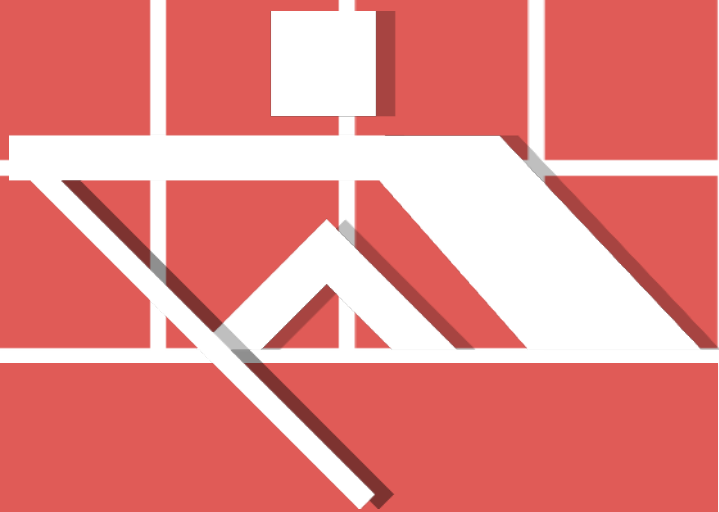
Ключевые обозначения помогают выбрать правильные отрезки в произведениях. Ошибка в роли отрезка ведёт к неверному уравнению, даже если арифметика выполнена правильно.

Если на чертеже точно понимать, что такое «внешний» и что такое «полная» секущая, то подстановка в формулы становится однозначной, а вероятность ошибок резко снижается.

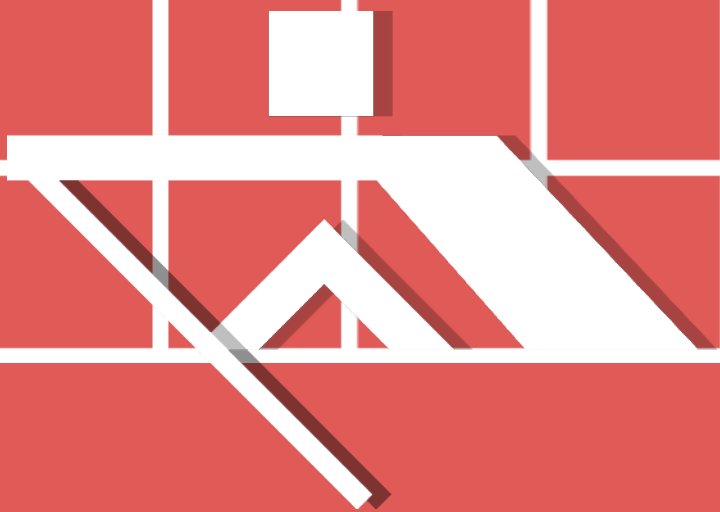
Почему формулы связаны с подобием треугольников



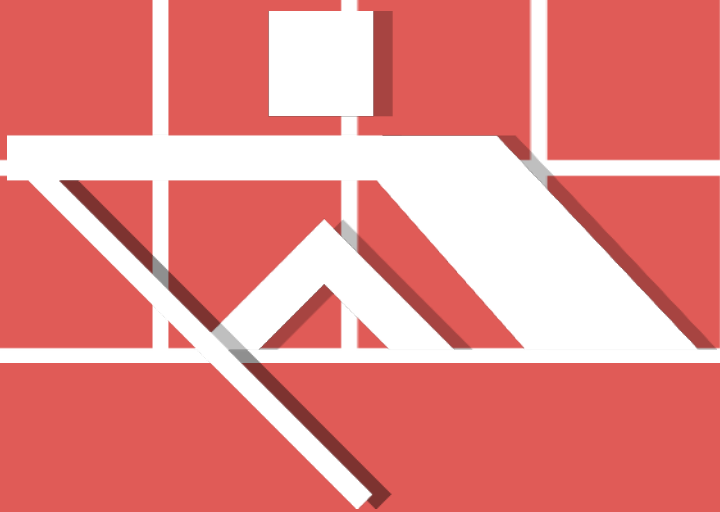
Когда две хорды пересекаются, точка пересечения делит их на отрезки, а вокруг неё образуются треугольники с общими углами.



Углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности, оказываются равными, поэтому возникает подобие треугольников.



Подобие даёт отношение соответствующих сторон, а уже из него получается равенство произведений отрезков: $AK \cdot KB = CK \cdot KD$.



Аналогично выводятся формулы для двух секущих и для касательной со секущей: в основе снова лежат равные углы и подобные треугольники.

Зачем эти свойства нужны в школьной геометрии

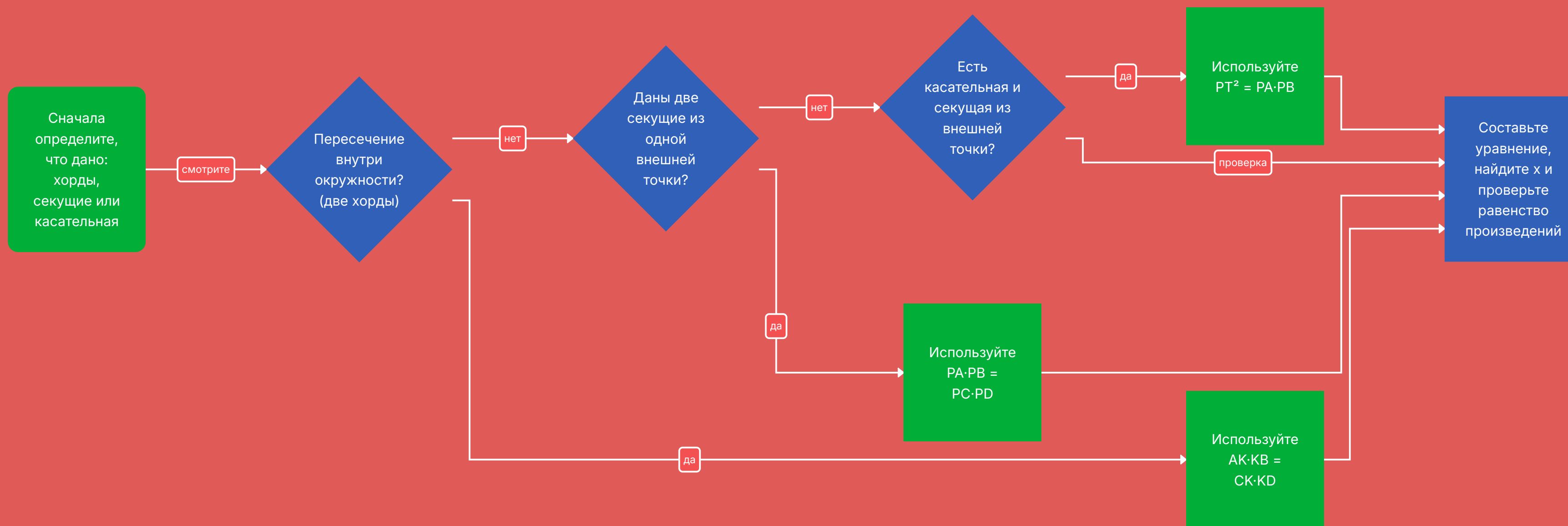
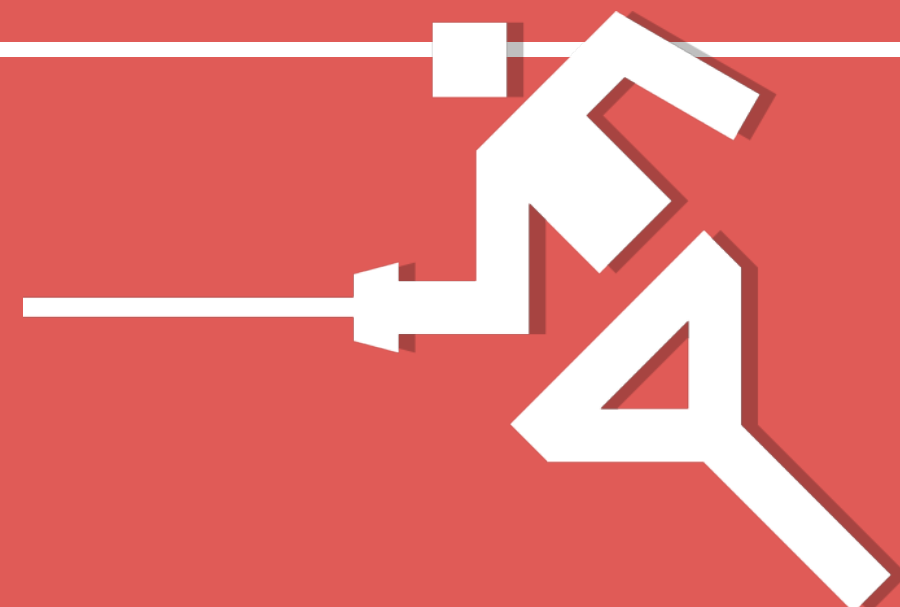
Эти теоремы позволяют находить длины отрезков по уже известным данным, когда мерить линейкой неудобно или невозможно.

В задачах про окружность формулы помогают составлять уравнения напрямую по чертежу, не «угадывая» размеры и не делая лишних построений.

Кроме вычислений, тема тренирует логические доказательства: ученик учится связывать рисунок с подобием треугольников и проверять ответ через равенство произведений.

Как выбрать нужную формулу

Опираемся на тип прямых относительно окружности и на то, какие части отрезков заданы в условии.



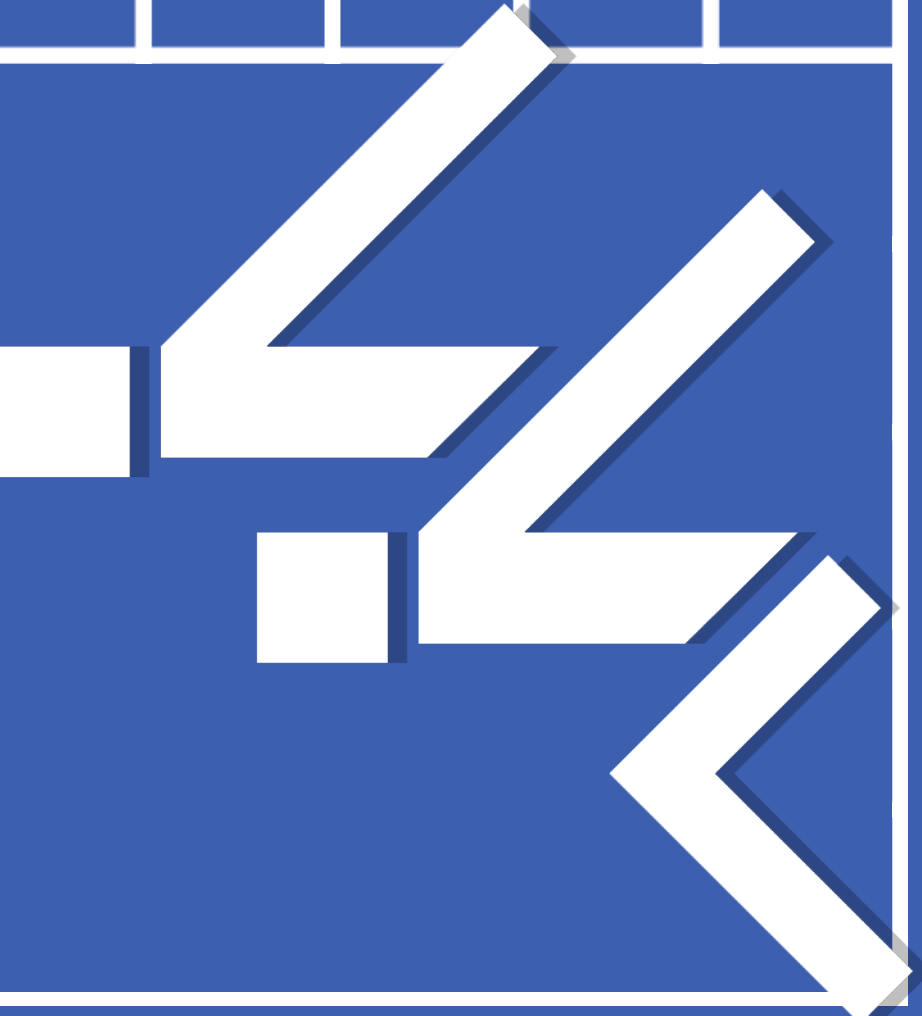
Главные выводы темы

Пропорциональность отрезков в окружности помогает находить неизвестные длины по известным значениям, используя только отношения и произведения отрезков.

Для правильного решения нужно точно определить тип фигуры: хорды, две секущие или касательная со секущей, а также понять, какие отрезки внешние и какие внутренние.

Нельзя подменять один отрезок другим: в формулах всегда берутся «соответствующие» части, разделённые точкой пересечения или внешней точкой.

Общий принцип темы — равенство произведений отрезков, которое вытекает из подобия треугольников и свойств углов окружности.



Окружность становится «считающей»: итоги урока

Свойства хорд, секущих и касательной образуют цельную часть темы «Окружность» в 9 классе. Они помогают решать задачи, проверять чертежи и превращать геометрию в точные числовые отношения.

