



Квадратный трёхчлен: основа для уравнений и графиков

Формулы, корни и парабола — одна тема,
которая связывает всё вместе.



Где встречается квадратный трёхчлен

Квадратные выражения помогают решать уравнения, читать графики и разбирать простые задачи про движение, площадь и форму объектов вокруг нас, поэтому эта тема нужна и в алгебре, и в жизни.



Общий вид квадратного трёхчлена

1

Стандартная запись

Квадратный трёхчлен записывают как $ax^2 + bx + c$. В этом виде сразу видно, что старшая степень равна двум, а значит, перед нами именно квадратное выражение.

2

Коэффициенты

Число a — старший коэффициент, b стоит при x , а c называется свободным членом. По ним можно определить, как будет выглядеть график и какие свойства имеет выражение.

3

Почему a не равно нулю

Если $a = 0$, член x^2 исчезает, и выражение уже не будет квадратным. Тогда оно превращается в линейное или просто число, поэтому условие $a \neq 0$ обязательно.

Разбор квадратного трёхчлена на примере



● Коэффициент a

В выражении $2x^2 - 3x + 5$ число 2 показывает старший коэффициент. Оно задаёт основную форму параболы и влияет на то, насколько узким или широким будет график.

● Коэффициент b

Член $-3x$ связан с коэффициентом $b = -3$. Он меняет положение параболы на координатной плоскости и помогает понять, где будет располагаться её вершина.

● Свободный член

Число 5 — это c . Оно показывает значение выражения при $x = 0$, то есть точку пересечения графика с осью y .

Примеры квадратных трёхчленов

Таблица показывает три записи и их коэффициенты. По ним видно, что в квадратном трёхчлене могут отсутствовать отдельные слагаемые, но степень при x остаётся второй.

У квадратного трёхчлена не обязаны присутствовать все члены, но коэффициент при x^2 всегда есть и не равен нулю.

Трёхчлен	a	b	c
$x^2 - 4x + 4$	1	-4	4
$-3x^2 + 2x - 1$	-3	2	-1
$5x^2 + 7$	5	0	7

Корни квадратного трёхчлена

Что такое корни

Корни — это такие значения x , при которых квадратный трёхчлен обращается в ноль. Именно эти значения особенно важны при решении уравнений и построении графика.

Возможные случаи

У уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ может быть два различных корня, один двойной корень или ни одного действительного корня. Всё зависит от дискриминанта.

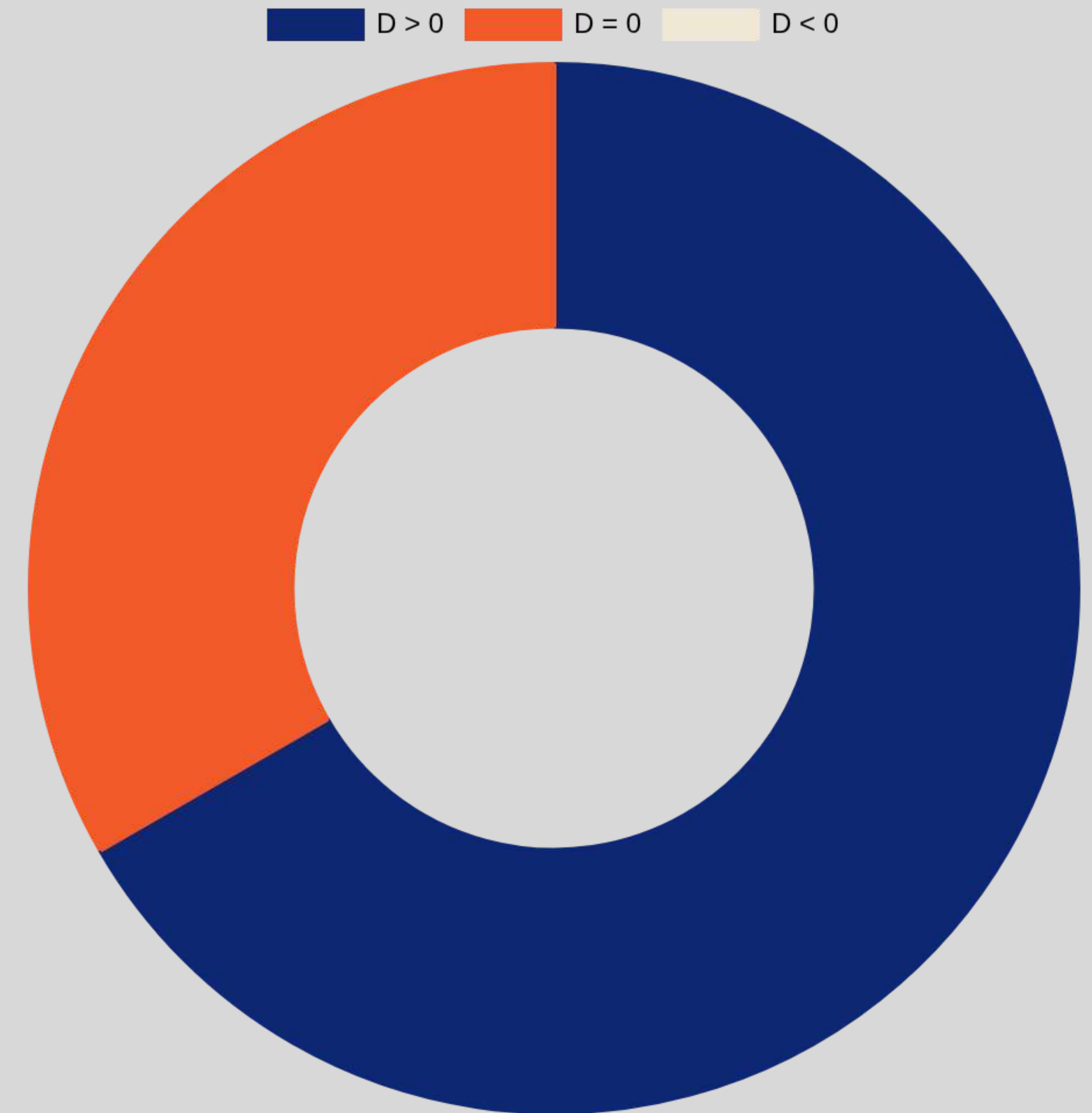
Зачем их искать

Корни показывают, где график пересекает ось x . Поэтому их поиск помогает одновременно решать уравнение, проверять ответ и понимать поведение параболы.

Дискриминант и число корней

Формула дискриминанта: $D = b^2 - 4ac$. Его знак показывает, сколько действительных решений получится у квадратного уравнения.

Если D положителен, корней два; при нуле — один двойной; при отрицательном значении действительных корней нет.



Формула корней квадратного уравнения

Основная запись

01

Корни находят по формуле $x = (-b \pm \sqrt{D}) / 2a$. Важно внимательно подставить все коэффициенты и не забыть, что знаменатель всегда содержит $2a$.

Два значения

02

Знак $\pm$ означает два возможных вычисления: с плюсом и с минусом перед корнем. Так получают либо два разных ответа, либо один и тот же, если дискриминант равен нулю.

Случай $D = 0$

03

Когда $D = 0$, корни совпадают. В этом случае получается один двойной корень, и формула даёт одинаковый результат при обеих подстановках.

Алгоритм решения квадратного уравнения

Последовательность действий для нахождения корней и проверки ответа

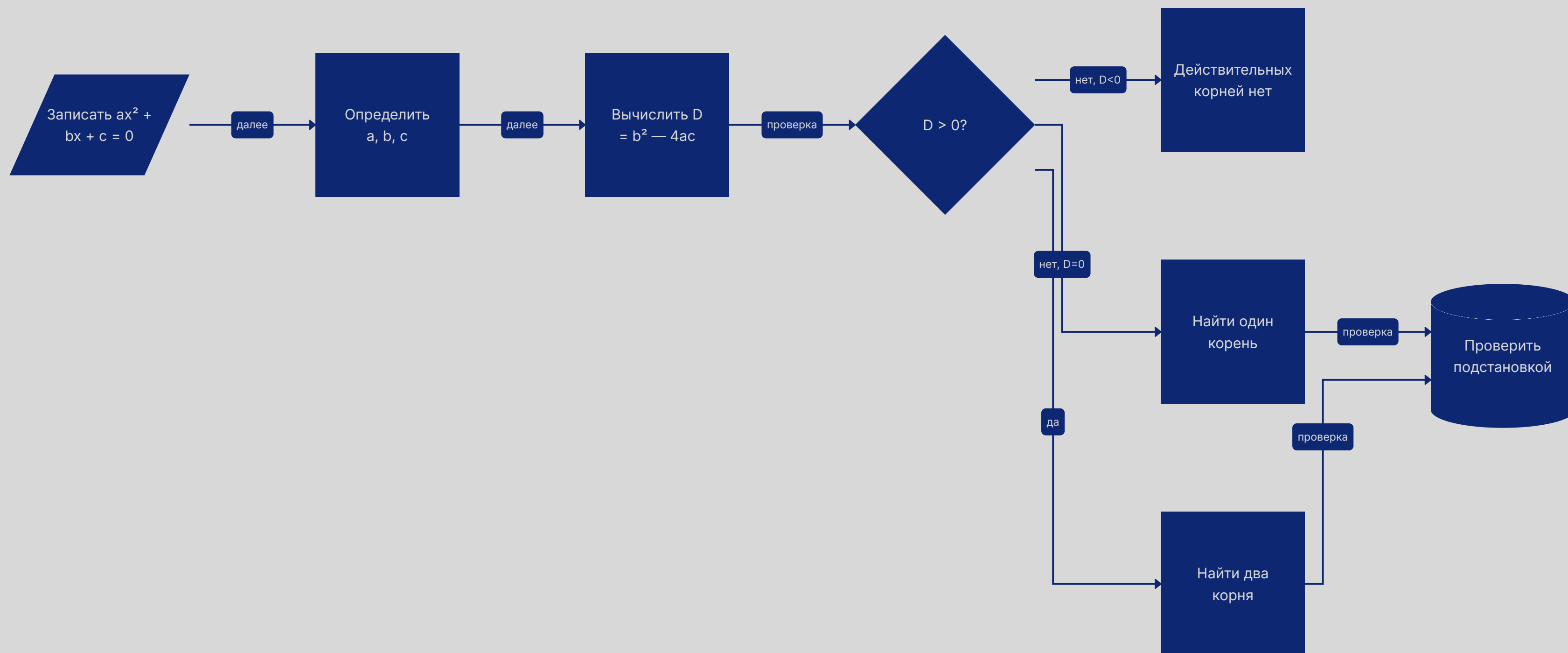
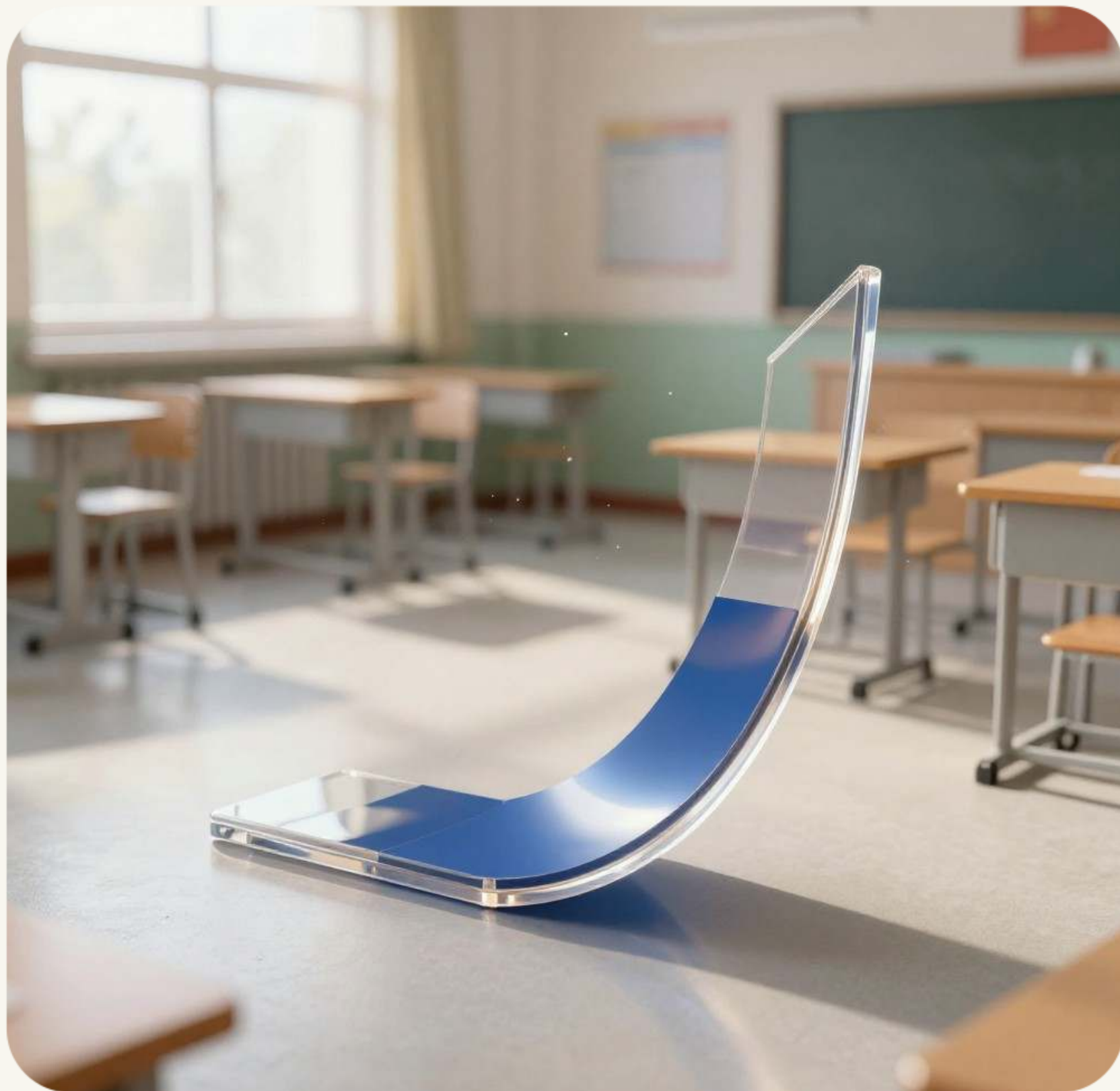


График функции $y = ax^2 + bx + c$



● Парабола

График квадратного трёхчлена — парабола. Её форма позволяет сразу понять, что функция изменяется не по прямой, а с изгибом, характерным для квадратных выражений.

● Направление ветвей

Если $a > 0$, ветви направлены вверх, а если $a < 0$ — вниз. Чем больше $|a|$, тем уже парабола и тем сильнее она вытянута по вертикали.

● Ключевые точки

Точка $(0; c)$ показывает пересечение с осью y , а корни уравнения — это точки пересечения с осью x . По этим точкам удобно читать график.

Как коэффициенты меняют вид параболы



Коэффициент a

Он задаёт направление ветвей параболы: при положительном a они направлены вверх, при отрицательном — вниз. Чем больше модуль a , тем уже и круче становится график.



Коэффициент b

Этот коэффициент влияет на положение вершины и оси симметрии. Из-за него парабола смещается по горизонтали, поэтому график меняет своё расположение относительно оси y .



Коэффициент c

Свободный член показывает, где график пересекает ось y . Если $x = 0$, остаётся именно c , поэтому по этому числу легко найти начальную точку параболы.

Связь формулы и графика

Признак	На графике
$a > 0$	ветви вверх
$a < 0$	ветви вниз
$c = 0$	через $(0; 0)$
$D > 0$	2 пересечения
$D = 0$	касание оси x
$D < 0$	нет пересечений

Сопоставление признаков квадратного трёхчлена с тем, что видно на его графике.

По формуле можно заранее предсказать вид параболы, а по графику — быстро проверить знак a , значение c и число действительных корней.

Разложение на множители

1

Найти корни

Сначала определяют, есть ли у квадратного трёхчлена корни. Если значения x_1 и x_2 существуют, именно они станут основой разложения на множители.

2

Записать через скобки

При двух корнях трёхчлен удобно представить в виде $a(x - x_1)(x - x_2)$. Такая запись делает выражение короче и помогает быстро выполнять дальнейшие преобразования.

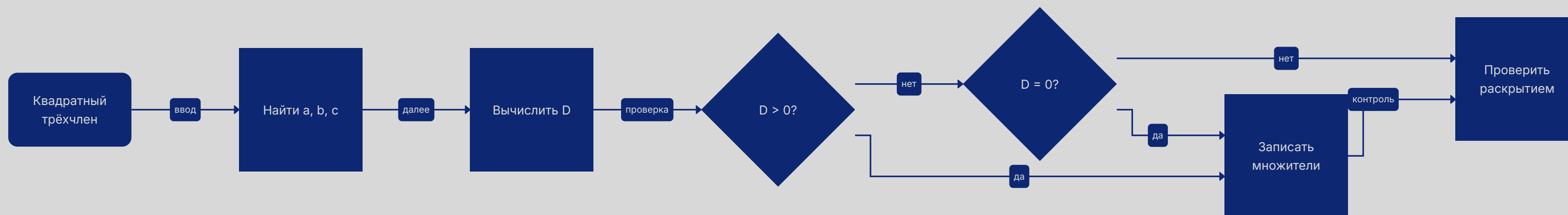
3

Проверить особый случай

Если корень один и он двойной, получается вид $a(x - x_0)^2$. После записи полезно раскрыть скобки и убедиться, что исходное выражение восстановилось точно.

От трёхчлена к множителям

Последовательность показывает, как из формулы перейти к разложению и проверить результат.



Особые случаи квадратного трёхчлена

Когда $c = 0$

Если свободный член равен нулю, выражение содержит общий множитель x . Его выносят за скобки, и трёхчлен сразу записывается в более простом виде.

Когда $b = 0$

При отсутствии члена с x получается форма $ax^2 + c$. Такой трёхчлен легче анализировать, потому что в нём меньше слагаемых и проще видеть общий характер графика.

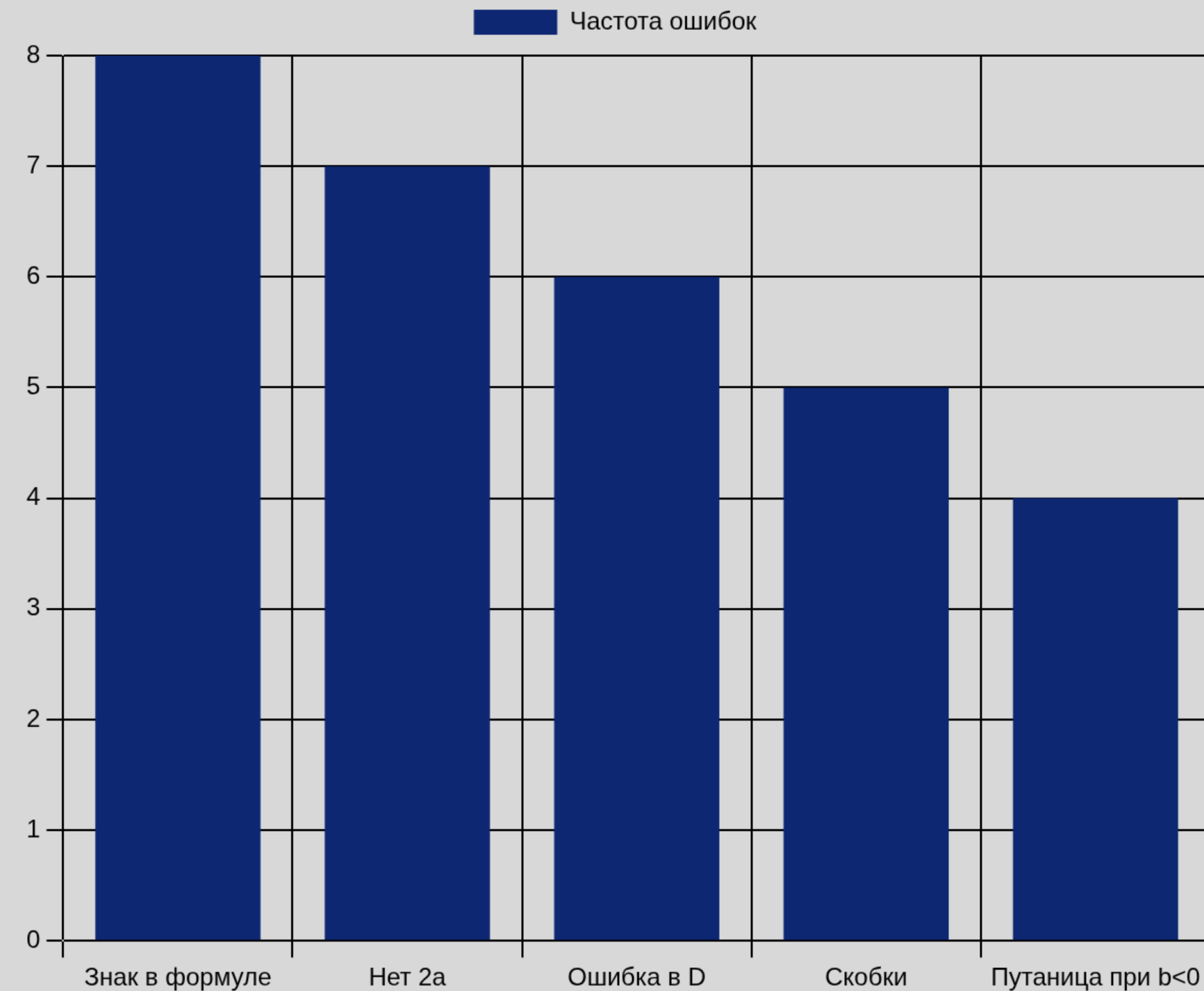
Полный квадрат

Некоторые трёхчлены сразу раскладываются как квадрат двучлена. Например, $x^2 - 6x + 9$ превращается в $(x - 3)^2$, что удобно для решения и проверки.

Типичные ошибки при вычислениях

Эта диаграмма показывает, на каких шагах чаще всего теряется точность. Особенно полезно отдельно проверять знаки и знаменатель после вычисления дискриминанта.

Чаще всего ошибки связаны не с самой формулой, а с невнимательностью при подстановке и раскрытии скобок. Значит, нужен пошаговый контроль.



Условная учебная шкала типичных ошибок при решении квадратных уравнений.

Квадратный трёхчлен в реальных ситуациях



● Полёт мяча

Когда мяч бросают вверх, его высота сначала растёт, потом уменьшается. Такой путь часто изображают параболой, поэтому квадратный трёхчлен помогает описывать движение.

● Площадь и размеры

В задачах на площадь квадратные выражения появляются, когда одна сторона зависит от другой. Тогда изменение размеров удобно описывать через формулу второго степени.

● Арки и мосты

Некоторые архитектурные формы напоминают параболу, особенно арки и своды. Из-за этого квадратные зависимости помогают связывать чертёж, измерения и математическую модель.

Мини-практика: проверка ответов

Сравните дискриминант, число корней и вид разложения для трёх простых примеров.

Знак дискриминанта сразу показывает, есть ли действительные корни. При $D > 0$ получаем два корня, при $D = 0$ — один двойной, при $D < 0$ — решений нет.

Пример	D	Корни	Вид
x^2-5x+6	1	2	$(x-2)(x-3)$
x^2+4x+4	0	1	$(x+2)^2$
x^2+1	-4	нет	не раскл.

Что нужно запомнить о квадратном трёхчлене



Общий вид

Квадратный трёхчлен всегда записывается как $ax^2 + bx + c$, и обязательно выполняется условие $a \neq 0$. Именно старшая степень делает выражение квадратным.



График параболы

Его график — парабола, поэтому по форме кривой можно судить о направлении ветвей, пересечениях с осями и влиянии коэффициентов на расположение.



Формула корней

Для решения квадратного уравнения используют дискриминант и формулу корней. Эти инструменты позволяют найти решения, даже когда их два, одно или нет совсем.



Разложение на множители

Если корни известны, трёхчлен удобно записать через скобки. Такая форма помогает проверять ответы, упрощать вычисления и быстрее решать похожие задания.

Главное о квадратном трёхчлене

Квадратный трёхчлен связывает запись формулы, поиск корней и вид параболы. Если помнить коэффициенты, дискриминант и разложение на множители, задачи становятся понятнее и решаются увереннее.