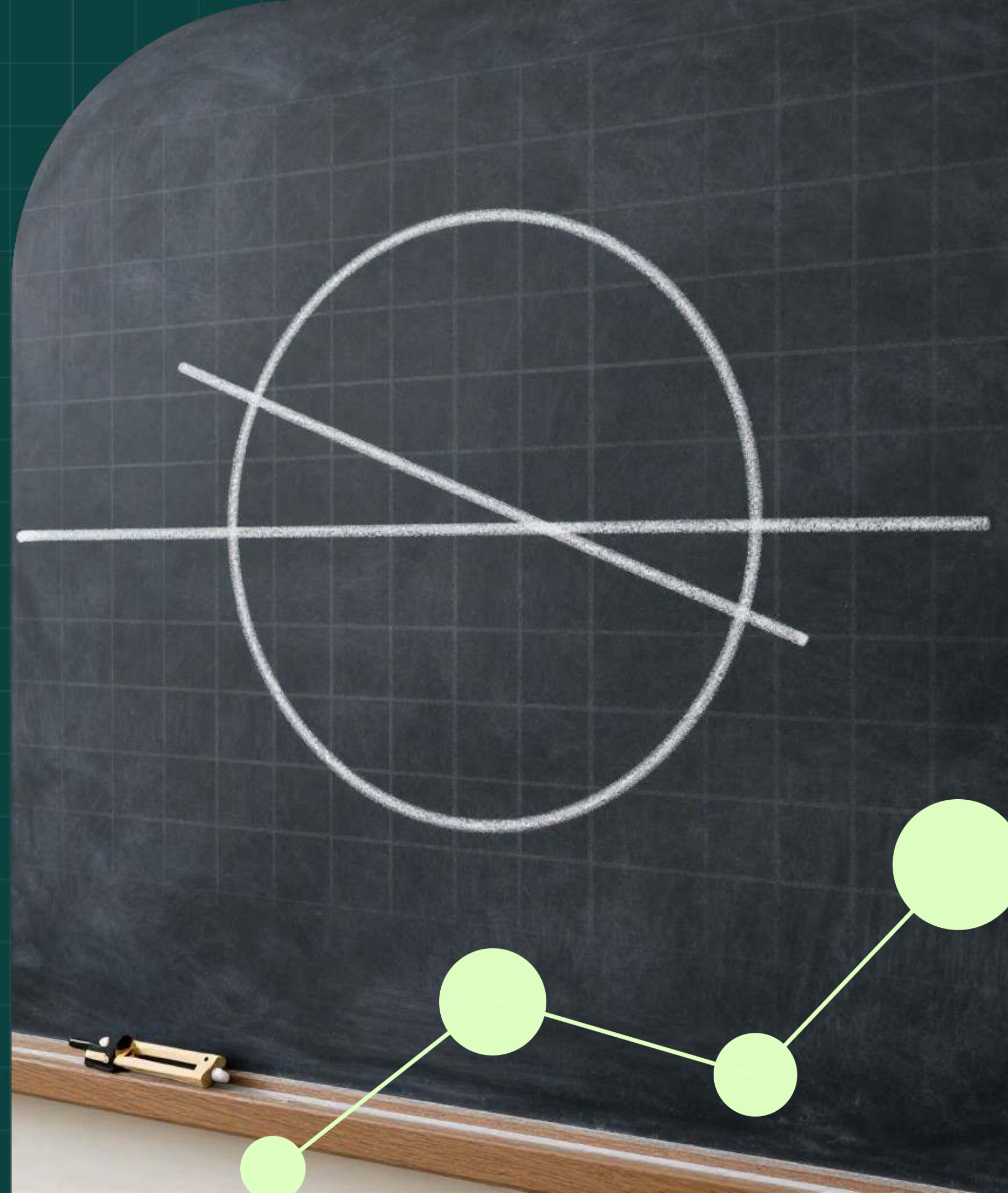




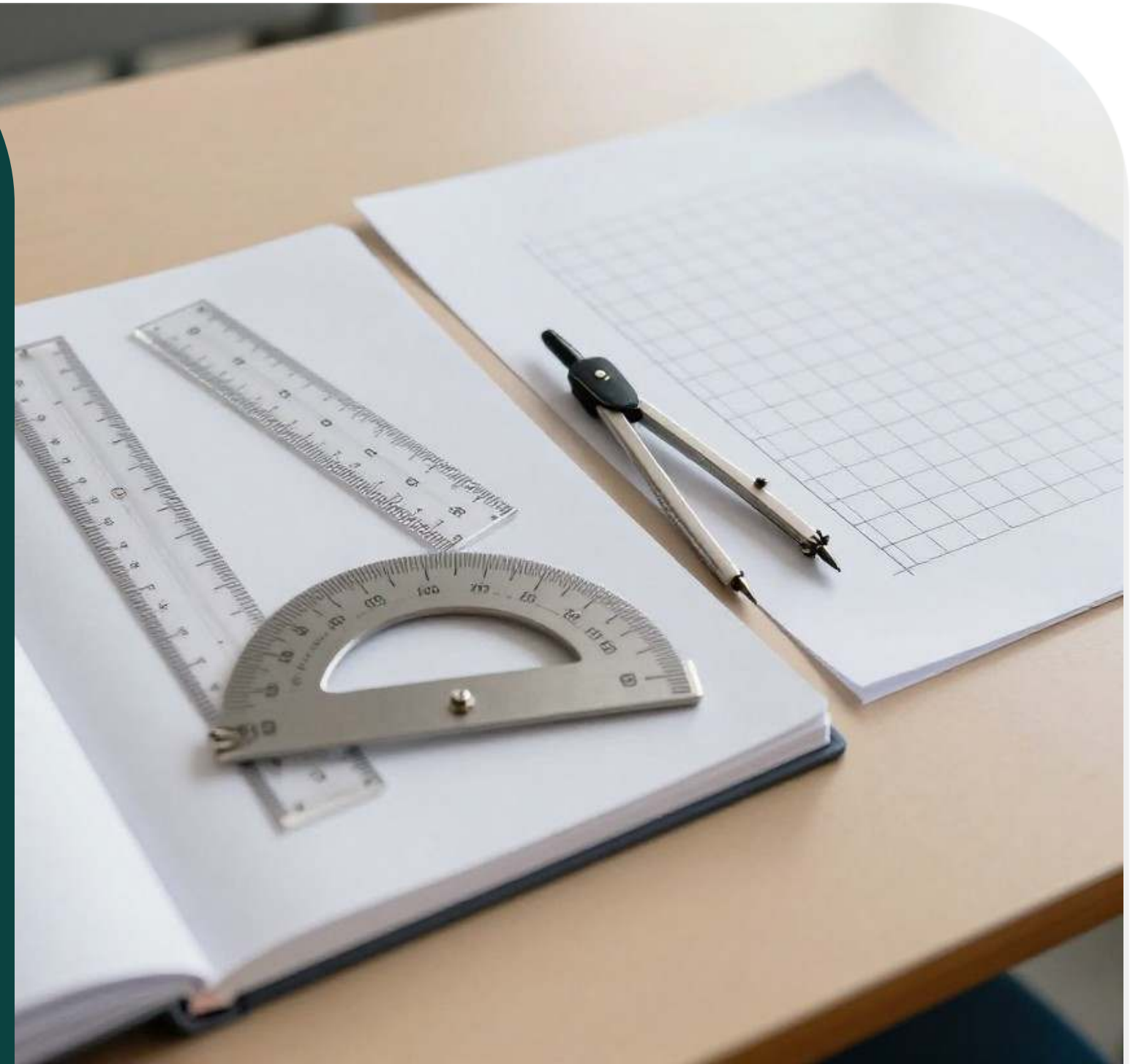
Уравнения окружности и прямой

Геометрия на координатной
плоскости становится языком
чисел и формул.



Координаты делают фигуры понятными

Две координаты задают точку, а уравнение собирает все точки фигуры в одну запись. Так проще находить окружности, прямые и проверять ответы без полного чертежа.



Она показывает, на каком расстоянии находится любая точка от центра и помогает записать окружность через координаты.

Формула расстояния между двумя точками на координатной плоскости



$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

— формула расстояния, лежащая в основе уравнения окружности.

Окружность как множество точек

4

● Одинаковое расстояние

Окружность образуют все точки плоскости, которые находятся на одном и том же расстоянии от центра. Это расстояние называют радиусом и обозначают буквой r .

● Центр окружности

Центр записывают как $C(a, b)$. Его координаты показывают, где расположена окружность на плоскости. Если центр смещается, меняется положение фигуры, но не её форма.

● Стандартная запись

Уравнение окружности имеет вид $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Оно сразу связывает координаты любой точки с центром и радиусом, поэтому удобно для решения задач.

● Что видно на рисунке

Обычно изображают центр, одну или несколько точек окружности и отрезок от центра до точки. Так легче увидеть, почему все точки находятся на равном расстоянии.



Как центр и радиус меняют окружность



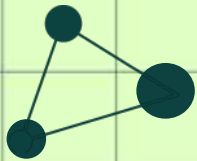
Сдвиг центра меняет расположение окружности на плоскости, а увеличение радиуса делает её больше. Форма остаётся одинаковой при любом положении.

Чем больше радиус, тем больше окружность; координаты центра определяют её сдвиг без изменения формы.



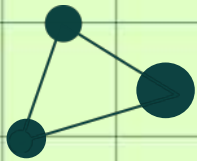
Иллюстративные данные по параметрам окружности, 8 класс

Проверка точки на принадлежность окружности



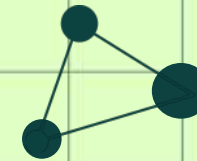
Подстановка координат

Чтобы проверить точку, её координаты подставляют в уравнение окружности. Если равенство выполняется точно, точка принадлежит окружности и лежит на её линии.



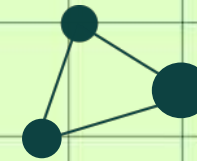
Внутри или снаружи

Если после подстановки левая часть меньше 9, точка находится внутри окружности. Если значение больше 9, точка лежит вне неё.



Пример вычисления

Для окружности $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ точка $(5, -1)$ подходит, потому что после подстановки получается $9=9$. Значит, эта точка лежит на окружности.



Полезная проверка

Такой способ помогает не только находить точки на окружности, но и быстро проверять ответы в задачах без дополнительного построения.

Стандартный вид уравнения окружности

Центр	Радиус	Уравнение	Пример
$C(a, b)$	r	$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$	
$C(2, -1)$	3	$(x-2)^2+(y+1)^2=9$	

В таблице показано, как параметры окружности переходят в её уравнение и как меняется знак в записи.

Знаки в скобках противоположны координатам центра, а радиус всегда возводится в квадрат.

Общий вид уравнения окружности

1

Раскрытие скобок

Если раскрыть скобки в стандартной записи, получается уравнение вида $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$. Это тот же самый объект, только записанный иначе.

2

Главные квадраты

В общем виде обязательно присутствуют x^2 и y^2 . Их коэффициенты одинаковы, потому что они описывают одну и ту же окружность, а не другую фигуру.

3

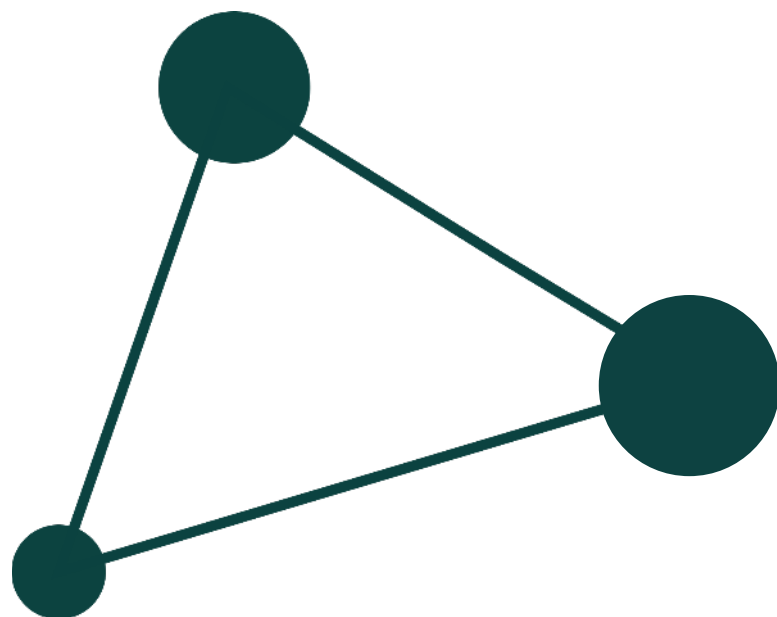
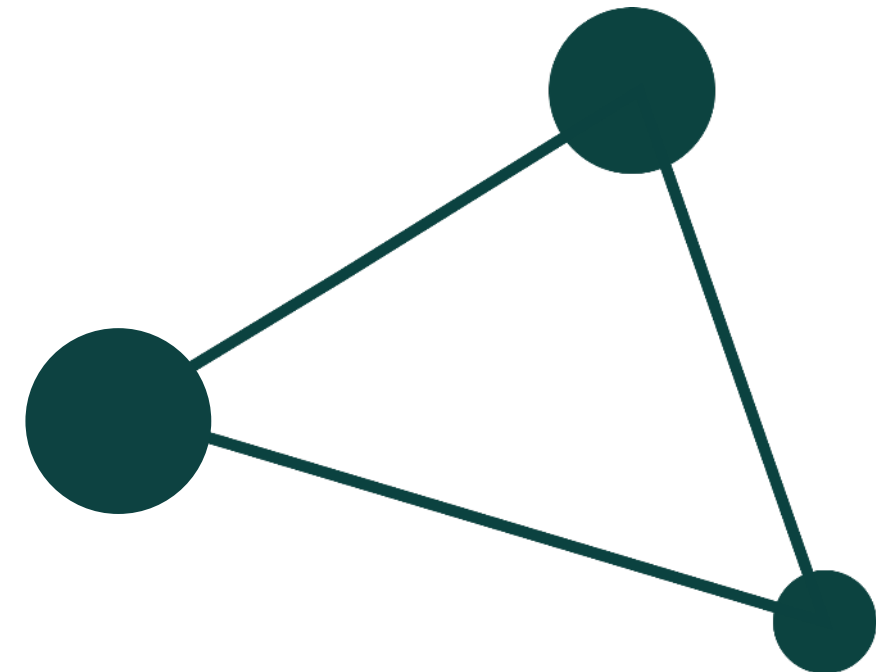
Нет члена xy

В уравнении окружности нет произведения xy . Если такой член появляется, запись уже не соответствует стандартному виду окружности.

4

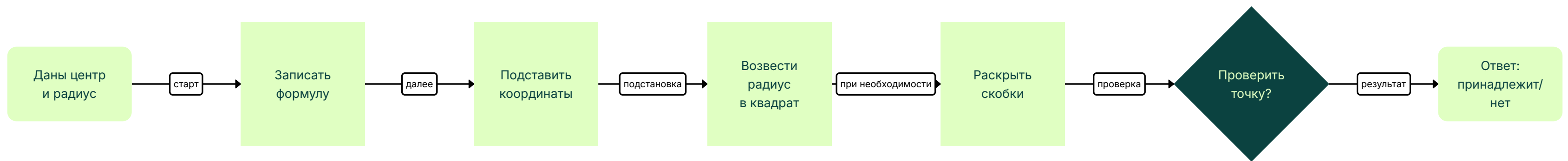
Связь коэффициентов

Коэффициенты D и E связаны с координатами центра, а число F зависит от радиуса. Поэтому по общей записи можно восстановить основные параметры фигуры.



Как записать уравнение окружности по данным задачи

Последовательность действий от известных центра и радиуса к уравнению и проверке точки.



Уравнение прямой в виде $y=kx+b$

10

1

Что означает k

Коэффициент k показывает наклон прямой. Если k положителен, линия идёт вверх слева направо; если отрицателен, она убывает.

2

Что означает b

Число b показывает, где прямая пересекает ось Oy . Это удобно: по одному коэффициенту сразу видно положение линии на плоскости.

3

Почему это важно

Каждая прямая состоит из бесконечного числа точек, а запись $y=kx+b$ позволяет описать их все одной короткой формулой.

Сравнение наклонов прямых



При одинаковом b прямые отличаются только направлением и крутизной наклона.

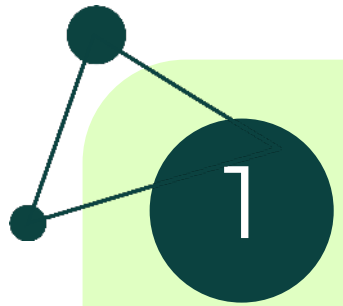
Чем больше $|k|$, тем заметнее наклон; знак k определяет рост или убывание прямой.



Составлено по определению уравнения прямой $y = kx + b$.

Прямая через две точки

12



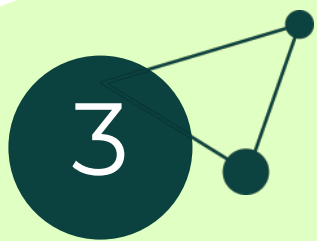
Находим наклон

Сначала берут две заданные точки и вычисляют коэффициент k по разности ординат, делённой на разность абсцисс. Это показывает, насколько быстро меняется y при изменении x .



Подставляем точку

Затем одну из точек подставляют в уравнение $y = kx + b$ и находят свободный член b . Так получают полную запись прямой, проходящей через обе точки.



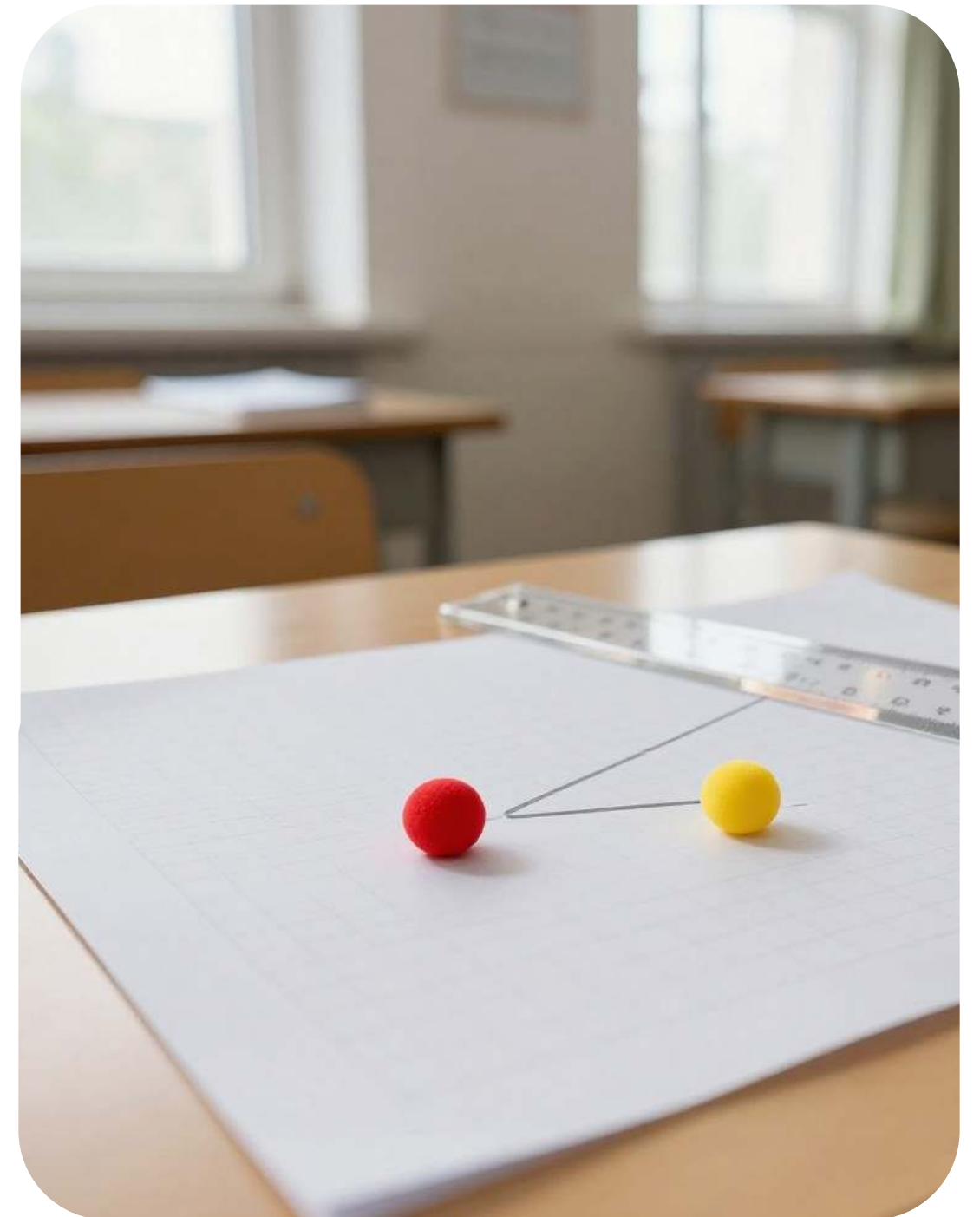
Проверяем результат

После вычислений полезно проверить, подходят ли обе точки к найденному уравнению. Если подстановка даёт верные равенства, прямая построена правильно и ошибок в вычислениях нет.



Особый случай

Если абсциссы точек равны, прямая вертикальна. В таком случае формула $y = kx + b$ не подходит, и уравнение записывают иначе.



Основные формы уравнения прямой

Форма	Где удобна	Что видно
$y = kx + b$	наклон	k и b
$Ax + By + C = 0$	преобразования	коэффициенты
$x/a + y/b = 1$	пересечения с осями	отрезки

Одна и та же прямая может быть записана по-разному. Каждая форма удобна для своей задачи.

Выбор формы зависит от задачи: для графика удобна одна запись, для вычислений и преобразований — другая.



Составлено по стандартным школьным формам уравнения прямой.

Как связаны прямая и окружность

14

1

Одна точка должна подходить к двум уравнениям

Точка пересечения обязана одновременно удовлетворять и уравнению окружности, и уравнению прямой. Поэтому её координаты должны пройти обе проверки без противоречий.

2

Подстановка даёт квадратное уравнение

Если вместо $y = kx + b$ подставить выражение в формулу окружности, получается уравнение второй степени. Именно его решения показывают возможные точки пересечения.

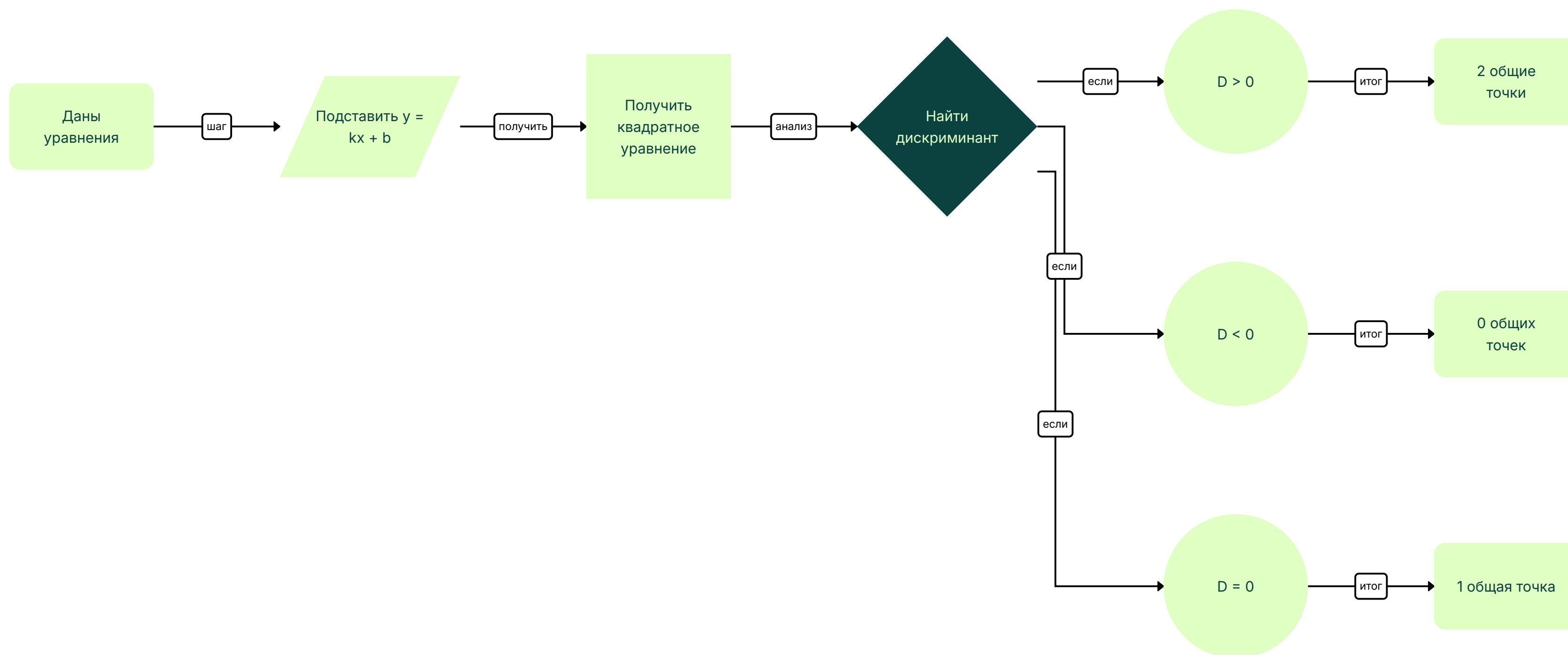
3

Количество решений отвечает на вопрос

Когда корней нет, линии не встречаются; когда корень один, прямая касается окружности; когда корней два, фигуры пересекаются в двух точках.

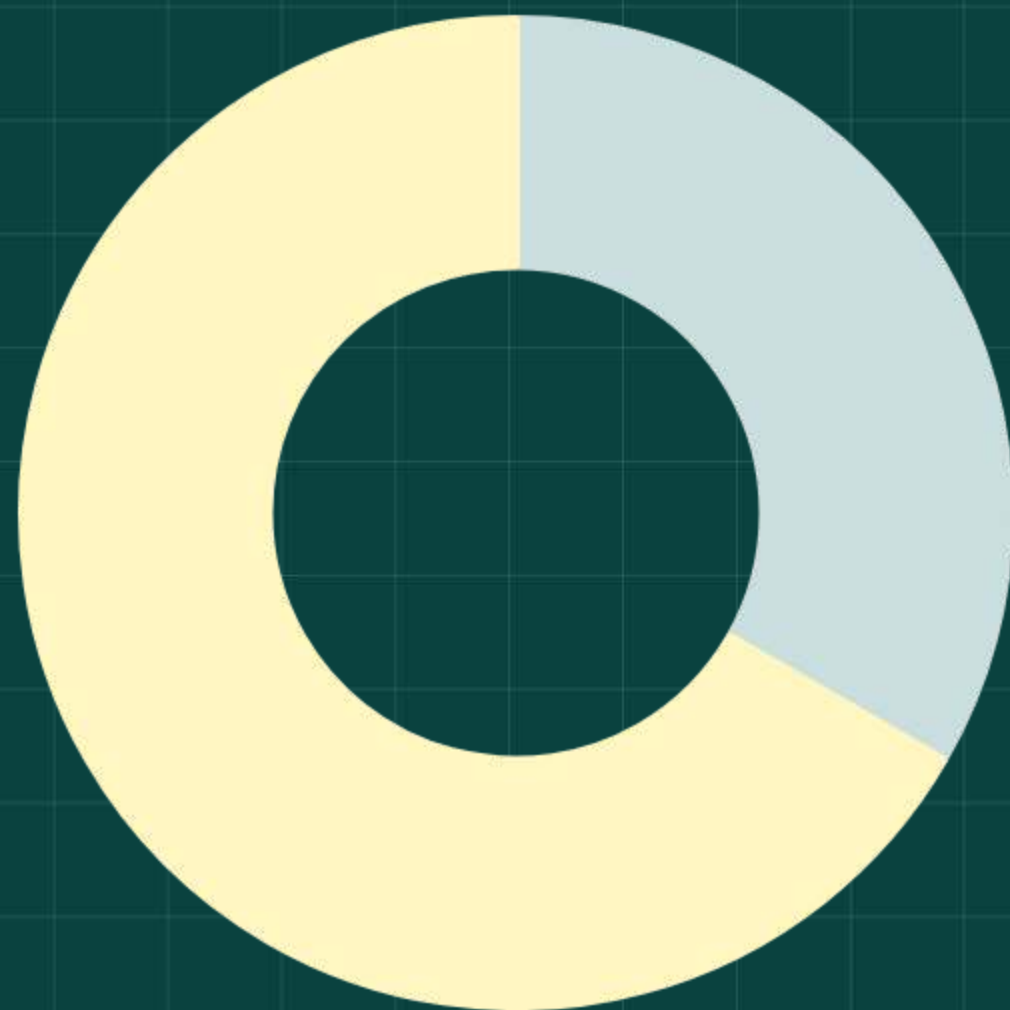
Определение числа общих точек

Алгоритм основан на подстановке уравнения прямой в уравнение окружности и анализе дискриминанта.



Три случая взаимного положения

0 общих точек 1 общая точка 2 общие точки



По числу корней легко понять, как расположены фигуры относительно друг друга, даже без подробного чертежа.

Алгебраическое решение напрямую показывает геометрический результат: отсутствие пересечения, касание или два пересечения.



Составлено по связи дискриминанта квадратного уравнения с числом общих точек.

Типичные ошибки при решении задач



Перепутанный знак

В формуле окружности знак у координат центра меняется на противоположный. Если записать его неверно, уравнение описывает уже другую окружность.



Забыли квадрат радиуса

В правой части должно стоять r^2 , а не r . Эта ошибка меняет размер окружности и приводит к неверным ответам уже на первом шаге.



Неточный коэффициент

При нахождении прямой часто ошибаются в вычислении k или свободного члена b . Тогда прямая проходит не через заданные точки.



Пропущена проверка

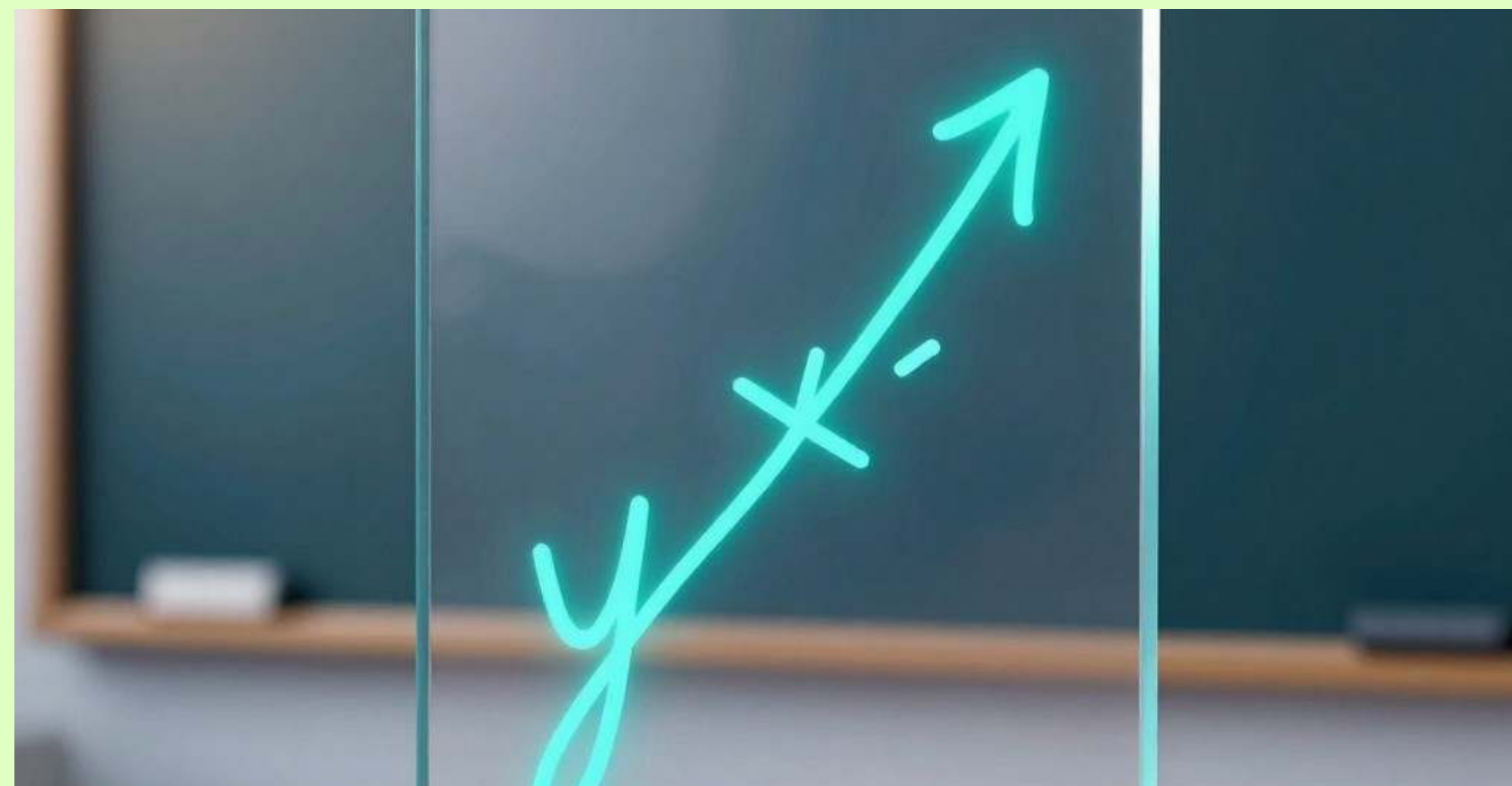
После решения полезно подставить координаты обратно в исходное уравнение. Такая проверка помогает быстро заметить вычислительную ошибку и исправить её.

Пример задачи с окружностью и прямой



Окружность на координатной плоскости

Уравнение $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$ задаёт окружность с центром в точке $(1, 2)$ и радиусом 4. На рисунке удобно отметить центр, затем провести радиус к любой точке окружности и увидеть её размер.



Прямая и точки пересечения

Прямая $y = x - 1$ идёт наклонно вверх и может пересечь окружность в двух местах. После подстановки её уравнения в формулу окружности получают квадратное уравнение, по которому находят координаты точек пересечения.

Что важно помнить о двух уравнениях

Фигура	Данные	Уравнение
Окружность	центр, радиус	$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
Прямая	k, b	$y = kx + b$
Общее	подстановка	квадратное уравнение

Сравним, какие данные нужны для окружности и прямой, и как затем находят их общие точки.

Для обеих фигур важны разные параметры, но совместное решение всегда сводится к подстановке и анализу квадратного уравнения.



Уравнения, которые связывают геометрию и алгебру

Координатный метод превращает рисунок в точный расчёт: окружность, прямая и их точки пересечения описываются уравнениями, а ответ легко проверить вычислениями.